1
Convexité

I
Barycentres et parties convexes

1. Soit E, un espace vectoriel.

1.1 ✍ *On considère un **système pondéré**, c'est-à-dire une famille finie de couples $(A_k, \alpha_k) \in E \times \mathbb{K}$ dont le **poids total** n'est pas nul :*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0.$$

1.2 ✍ *Le **barycentre** du système pondéré*

$$[(A_k, \alpha_k)]_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

de poids total α est le point $G \in E$ défini par

$$G = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot A_k.$$

1.3 **Système pondéré normalisé**
Si le poids total du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est égal à 1, alors le barycentre $G \in E$ de ce système est caractérisé par

$$G = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k.$$

1.4 ✍ *Un point G de E est une **combinaison convexe** des points $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de E lorsqu'il existe une famille de réels $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ tels que*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \alpha_k \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \qquad \text{et} \qquad G = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k.$$

1.5 ✍ *L'**isobarycentre** des points $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de E est le barycentre du système pondéré $[(A_k, 1)]_{1 \leqslant k \leqslant n}$:*

$$G = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

Associativité du barycentre

2. ➔ *Soit $(A_0, \alpha_0), \dots, (A_n, \alpha_n)$, un système pondéré dont le poids total n'est pas nul.*
Pour un entier $1 \leqslant m < n$ tel que les poids partiels

$$p_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \qquad \text{et} \qquad p_2 = \sum_{k=m}^{n} \alpha_k$$

soient tous les deux non nuls, on note G_1 et G_2, les barycentres des systèmes $[(A_k, \alpha_k)]_{0 \leqslant k < m}$ et $[(A_k, \alpha_k)]_{m \leqslant k \leqslant n}$.
Alors le barycentre G du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est aussi le barycentre du système pondéré (G_1, p_1), (G_2, p_2).

Exemples géométriques simples

3. Soient A et B, deux points distincts.

3.1 La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B.

3.2 ✍ *Le **segment** $[A, B]$ est l'ensemble des combinaisons convexes de A et B :*

$$[A, B] = \big\{(1-t)A + tB,\ t \in [0, 1]\big\}.$$

3.3 L'isobarycentre de A et B est le milieu du segment $[A, B]$.

4. ✍ *Soient A, B et C, trois points. Le **triangle** ABC est l'ensemble des combinaisons convexes de A, B et C.*

Parties convexes

5. ✍ *Une partie $K \subset E$ est **convexe** lorsque*

$$\forall\, (A, B) \in K^2, \qquad [A, B] \subset K.$$

6. L'intersection de deux parties convexes de E est une partie convexe de E.

7.1 ➔ *Une partie $K \subset E$ est convexe si, et seulement si, toute combinaison convexe de points de K appartient à K.* →**[39]**

7.2 Si K est convexe, alors, quels que soient les points A, B et C dans K, le triangle ABC est contenu dans K.

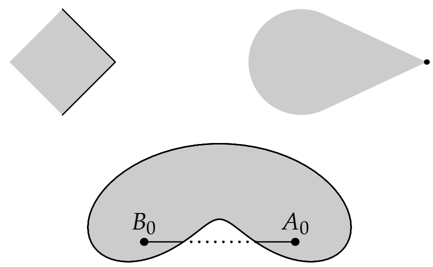
8. **Exemples et contre-exemple**

8.1 Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

8.2 Tout triangle est convexe.

8.3 Tout sous-espace vectoriel de E est convexe.

8.4



Entraînement

9. **Questions pour réfléchir**

1. Quel que soit le scalaire $\lambda \neq 0$, les systèmes pondérés

$$[(A_k, \alpha_k)]_{1 \leqslant k \leqslant n} \qquad \text{et} \qquad [(A_k, \lambda\alpha_k)]_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

ont même barycentre.

2. Soit F, un sous-espace de E qui contient $A_1, \dots, A_n$. Tout barycentre de $A_1, \dots, A_n$ appartient à F.

3. L'isobarycentre des points $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une combinaison convexe des points $A_1, \dots, A_n$.

4. Si les poids $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont strictement positifs, alors le barycentre du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une combinaison convexe des points $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

5. On considère une série statistique de N valeurs.

5.a Dans quel cas la moyenne n'est-elle pas modifiée lorsqu'on ajoute une valeur à cette série ?

5.b Dans quel cas la moyenne n'est-elle pas modifiée lorsqu'on ajoute deux valeurs à cette série ?

6. En fin de seconde, 5% des filles et 7% des garçons redoublent. Que dire du taux de redoublement ?

7. Dans l'entreprise A, le salaire moyen des 180 ouvriers est de $1,15$ k€ et celui des 20 cadres est de $2,2$ k€. Dans l'entreprise B, le salaire moyen des 100 ouvriers est de $1,1$ k€ et celui des 100 cadres est de $2,07$ k€.
Le salaire moyen des ouvriers est donc *plus* élevé dans l'entreprise A que dans l'entreprise B et le salaire moyen des cadres est *plus* élevé dans l'entreprise A que dans l'entreprise B.
Cependant, le salaire moyen global est *moins* élevé dans l'entreprise A que dans l'entreprise B. Expliquer.

8. Plus de la moitié des professeurs d'un lycée ont au moins 45 ans. Que dire de l'âge moyen des professeurs de cet établissement ?

9. Soient $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, une famille de réels strictement positifs. On note

$$\forall\, 0 \leqslant m \leqslant n, \qquad \sigma_m = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k.$$

On pose alors $G_0 = A_0$ et

$$\forall\, 1 \leqslant m \leqslant n, \quad G_m = \frac{\sigma_{m-1}}{\sigma_m}\, G_{m-1} + \frac{\alpha_m}{\sigma_m}\, A_m.$$

Alors G_n est le barycentre du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{0\leqslant k\leqslant n}$.

10. L'union de deux parties convexes de E est-elle une partie convexe de E ?

10. Barycentre et applications linéaires

Soit G, le barycentre du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n}$.
Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $f(G)$ est le barycentre du système pondéré $[(f(A_k), \alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n}$.

II

Fonctions convexes

11.1 ✍ *Une application f définie sur un intervalle I, à valeurs réelles est **convexe** lorsque, quels que soient x et y dans I,*

$$\forall\, \lambda \in [0,1], \quad f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

11.2 ✍ *Une application f est **concave** lorsque $-f$ est convexe.*

11.3 Soient f, une application convexe de l'intervalle I dans $\mathbb{R}$ et $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, une famille de points de I.
Quels que soient les réels positifs $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dont la somme est égale à 1,

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i)$$

et en particulier

$$f\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i).$$

II.1 Caractérisations géométriques

12. Cordes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On note A et B, les points du graphe de f d'abscisses respectives $x \in I$ et $y \in I$ avec $x < y$.

12.1 L'**arc** (A, B) est la partie du graphe de f qui correspond aux abscisses comprises entre x et y :

$$(A, B) = \big\{\big(z, f(z)\big),\ x \leqslant z \leqslant y\big\}.$$

12.2 Le segment

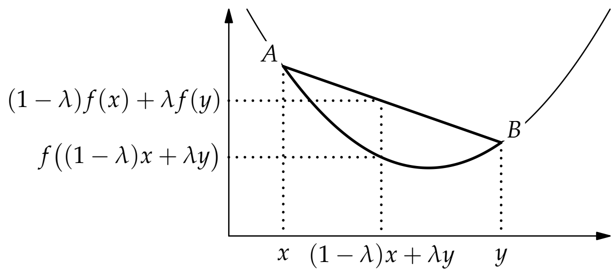
$$[A, B] = \big\{(1-t)A + tB,\ t \in [0,1]\big\}$$

est la **corde interceptée** par l'arc (A, B).

12.3 La corde $[A, B]$ est le graphe de la fonction affine φ définie par

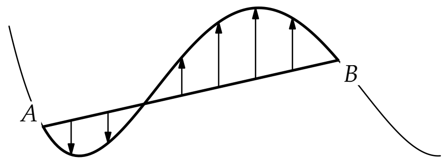
$$\forall\, z \in [x, y], \quad \varphi(z) = \frac{y-z}{y-x}\, f(x) + \frac{z-x}{y-x}\, f(y).$$

12.4 ➔ *Une fonction est convexe si, et seulement si, tout arc de son graphe est situé au-dessous de la corde qu'il intercepte.* →**[26]**



12.5 ➔ *Une fonction est concave si, et seulement si, tout arc de son graphe est situé au-dessus de la corde qu'il intercepte.*

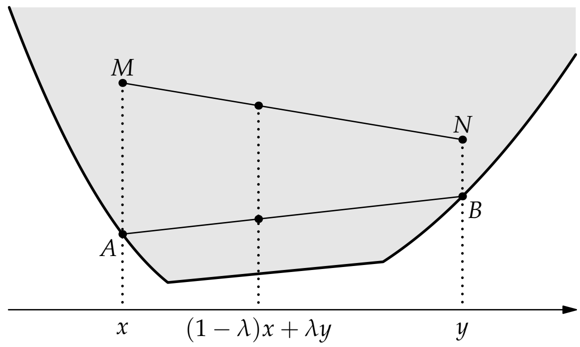
12.6 Exemple de fonction qui n'est ni convexe, ni concave.



13. Épigraphe

13.1 ✍ *Soit f, une application de I dans $\mathbb{R}$. L'**épigraphe** de f est l'ensemble des points du plan situés au-dessus du graphe de f, soit :*

$$E_f = \big\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \,:\, y \geqslant f(x)\big\}.$$



13.2 ➔ *Une fonction de I dans $\mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.*

14. Sécantes

14.1 Soient x, u, y, trois réels tels que $x < u < y$. Alors u est une combinaison convexe de x et y :

$$u = \frac{y-u}{y-x}\, x + \frac{u-x}{y-x}\, y.$$

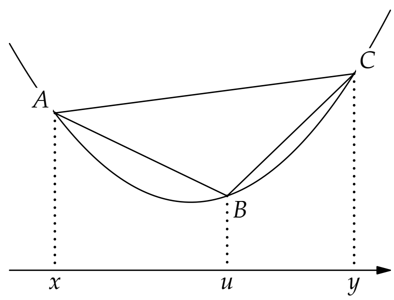
14.2 ➔ *Soit f, une application convexe de l'intervalle I dans $\mathbb{R}$. Quels que soient les points x, u, y de I tels que $x < u < y$,*

$$\frac{f(u)-f(x)}{u-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(u)}{y-u}.$$

14.3 ➔ *Soit f, une application de I dans $\mathbb{R}$ telle que, quels que soient les points x, u, y de I tels que $x < u < y$,*

$$\frac{f(u)-f(x)}{u-x} \leqslant \frac{f(y)-f(u)}{y-u}.$$

Alors la fonction f est convexe sur I.

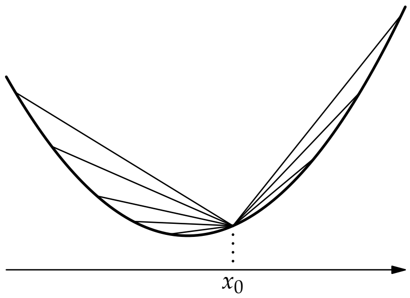


II.2 Caractérisations analytiques

15. ➜ *Une application f de l'intervalle I dans $\mathbb{R}$ est convexe sur I si, et seulement si, pour tout point $x_0 \in I$, l'application τ_{x_0} définie par*

$$\forall\, x \in I \setminus \{x_0\}, \qquad \tau_{x_0}(x) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

est croissante.



Fonctions dérivables

16. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une application convexe et dérivable. Alors

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y)$$

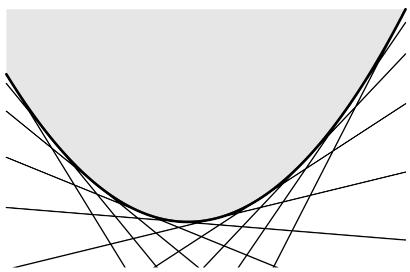
quels que soient $x < y$ dans I.

17. ➜ *Soient $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$, une application dérivable. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

17.1 *La fonction f est convexe.*

17.2 *La dérivée f' est croissante.*

17.3 *Le graphe de f est en tout point situé au-dessus de ses tangentes.*



18. ➜ **Fonctions deux fois dérivables**

Soit f, une application deux fois dérivable de l'intervalle I dans $\mathbb{R}$.

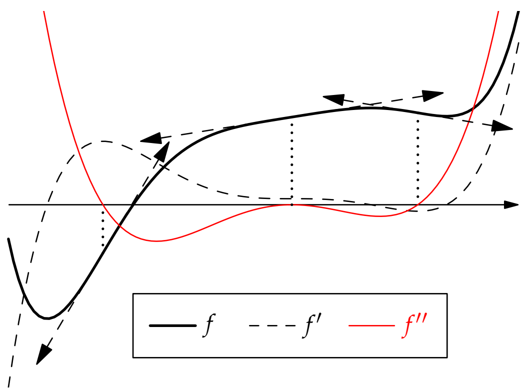
18.1 *La fonction f est convexe sur I si, et seulement si, sa dérivée seconde f'' est positive sur I.*

18.2 *La fonction f est concave sur I si, et seulement si, sa dérivée seconde f'' est négative sur I.*

19. Soit f, une application deux fois dérivable sur I.

19.1 ✍ *Le graphe de f présente un **point d'inflexion** en $x_0 \in I$ lorsque $f''(x_0) = 0$.*

19.2 **Exemples de points d'inflexion**



19.3 ✍ *On parle de **point d'inflexion géométrique** lorsque $f''(x)$ n'est pas du même signe au voisinage gauche de x_0 et au voisinage droit de x_0.*

19.4 Si le graphe de f présente un point d'inflexion géométrique en x_0, alors le graphe de f traverse la tangente en ce point.

II.3 Exemples usuels

20. Les fonctions affines $[x \mapsto ax + b]$ sont à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.

21. La fonction polynomiale du second degré définie par

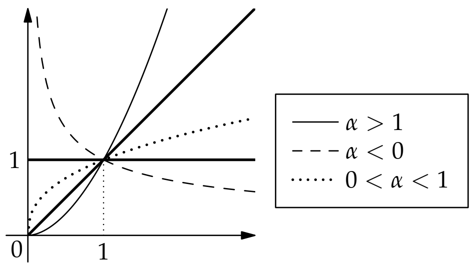
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

est convexe pour $a > 0$ et concave pour $a < 0$.

22. La fonction définie par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = x^\alpha$$

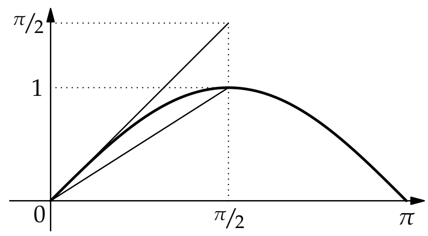
est convexe sur $]0, +\infty[$ pour $\alpha \leqslant 0$ et $\alpha \geqslant 1$; elle est concave pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.



23. **Fonctions trigonométriques**

23.1 La fonction sin est concave sur $[0, \pi]$.

$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$$



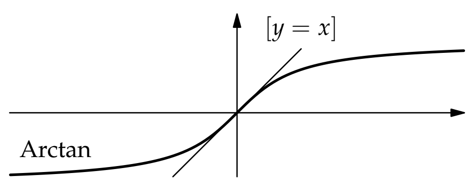
23.2 La fonction cos est concave sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

23.3 La fonction tan est concave sur $]-\pi/2, 0]$ et convexe sur $[0, \pi/2[$.

$$\forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \qquad \tan x > x$$

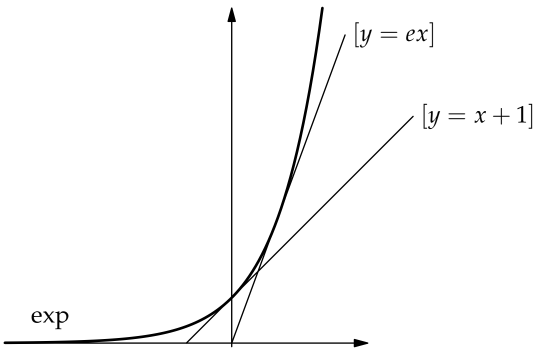
Sa réciproque, Arctan, est convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall\, x > 0, \qquad 0 < \operatorname{Arctan} x < x$$



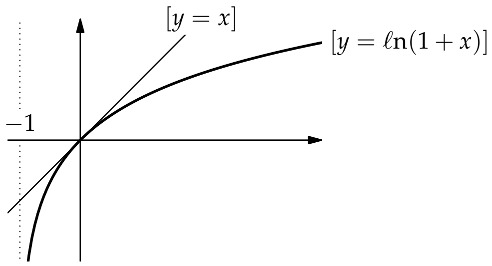
24.1 La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad e^x \geqslant \max\{1+x,\, ex\}.$$



24.2 La fonction ℓn est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall\, x > -1, \qquad \ell\mathrm{n}(1+x) \leqslant x.$$



24.3 La fonction ch est convexe sur $\mathbb{R}$.
24.4 La fonction sh est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$.

Entraînement

25. Questions pour réfléchir

1. L'application $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, pour tout x et tout y de I,

$$\forall\, 0 < \lambda < 1, \qquad f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

2. Si une fonction à valeurs réelles est continue sur $[a,b]$ et convexe sur $]a,b[$, alors elle est convexe sur $[a,b]$.
3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Si $f''(x_0) > 0$, alors il existe un voisinage $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ de x_0 sur lequel la fonction f est convexe.
4. Si une fonction convexe croissante (resp. décroissante) réalise une bijection de I sur J, alors sa bijection réciproque est concave (resp. convexe) sur J.
5. Soit f, une fonction convexe de classe $\mathscr{C}^2$ dont la dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle I. Elle réalise une bijection de I sur un intervalle J et la bijection réciproque g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur J. Expression de la dérivée seconde de g ?

26. Soient $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$, deux points du graphe d'une fonction convexe f. On suppose que $a < b$.
26.1 Si $f(a) < f(b)$, alors f est croissante sur $[b, +\infty[$.
26.2 Pour $x < a$ et pour $x > b$, le point $M = (x, f(x))$ du graphe de f est situé au-dessus de la droite (AB) :

$$(b-a)f(x) \geqslant x\big(f(b) - f(a)\big) + bf(a) - af(b).$$

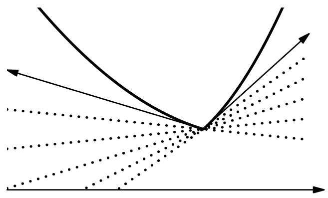
26.3 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et bornée, alors f est constante.

27. Dérivabilité et droites d'appui
Soit f, une fonction convexe sur un intervalle ouvert I.
27.1 La fonction f est dérivable à gauche et dérivable à droite en chaque point de I et

$$\forall\, x \in I, \quad f'_g(x) \leqslant f'_d(x).$$

Les deux fonctions f'_g et f'_d sont croissantes sur I. →[38]

27.2 ✍ *Soit f, une fonction convexe sur l'intervalle I. On appelle **droite d'appui** toute droite passant par un point du graphe de f et située sous le graphe de f.*



27.3 La droite représentée par

$$y = a(x - x_0) + f(x_0)$$

est une droite d'appui si, et seulement si, $f'_g(x_0) \leqslant a \leqslant f'_d(x_0)$.

III

Inégalités de convexité

28. Inégalité triangulaire
L'inégalité triangulaire

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

traduit la convexité de la fonction $[x \mapsto |x|]$.

29. Inégalité de Schwarz

$$\forall\, (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n, \qquad \Big|\sum_{k=1}^{n} x_k\Big| \leqslant \Big[n\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)\Big]^{1/2}$$

30. Inégalité arithmético-géométrique
Par concavité de ℓn,

$$\forall\, x, y > 0, \qquad \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

Il y a égalité si, et seulement si, $x = y$. →[35]

31. Extrema d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I, à valeurs réelles. On suppose qu'il existe un réel x_0 tel que $f'(x_0) = 0$ (**point critique**).
31.1 Si $f''(x_0) > 0$, alors f atteint un minimum local en x_0.
31.2 Si $f''(x_0) < 0$, alors f atteint un maximum local en x_0.

32. La convexité peut servir à étudier les extrema d'une fonction numériques de plusieurs variables.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

33. Exemples et contre-exemples

1. Exemple de fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et :
   - 1.a positive sur $\mathbb{R}$;
   - 1.b négative sur $\mathbb{R}$;
   - 1.c croissante sur $\mathbb{R}$;
   - 1.d décroissante sur $\mathbb{R}$;
   - 1.e non minorée sur $\mathbb{R}$;
   - 1.f bornée sur $\mathbb{R}$;
   - 1.g bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Exemple de fonction convexe sur $[0,1]$:
   - 2.a qui n'est pas dérivable ;
   - 2.b qui n'est pas continue. →[38]
3. Exemple de fonction convexe sur $\mathbb{R}$, qui tend vers $-\infty$ au voisinage de $-\infty$, qui tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et dont le graphe admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

4. Exemple de fonction convexe et monotone sur $\mathbb{R}$ dont le graphe admet une branche parabolique en $-\infty$ et une branche parabolique en $+\infty$.

34. Questions pour réfléchir

1. Comparer les notions de **barycentre** et de **moyenne**.
2. Généraliser le théorème [**2**].
3. Soient A, B et C, trois points non alignés du plan $\mathscr{P}$.

3.a Le demi-plan limité par la droite (AB) et contenant le point C est l'ensemble des barycentres de la forme

$$(1-\gamma)\big(\alpha A + (1-\alpha)B\big) + \gamma C$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}_+$.

3.b Le triangle ABC est l'intersection de trois demi-plans.

4. Tout sous-espace affine de E est convexe.
5. Soit $(\alpha_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$, une subdivision du segment $[a, b]$. Si la restriction de f à chaque sous-segment $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ est une fonction convexe, la fonction f est-elle convexe sur $[a, b]$?
6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue. On suppose que

$$f\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

pour toute famille finie $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de points de I (l'entier n, supérieur à 2, pouvant varier). La fonction f est-elle convexe ?

7. Dans quelle mesure le graphe d'une fonction convexe est-il assimilable à une parabole ?
8. *Suite de* [**19.2**] – Les graphes de f, f' et f'' ont été tracés avec des échelles différentes. Pourquoi ?

35. Inégalité arithmético-géométrique

Quels que soient les réels $x_1, \dots, x_n$ positifs ou nuls, →[**40.4**]

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

36. Inégalité de Hölder

Soient deux réels p et q strictement supérieurs à 1 tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On dit que ces réels sont **conjugués**.

Pour tout réel $p > 1$ et tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d$, on pose

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

1. Soient $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ dans $\mathbb{K}^d$ tels que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Alors, par concavité de ℓn,

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d, \quad |x_i y_i| \leqslant \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leqslant 1.$$

2. On en déduit l'**inégalité de Hölder** : →[**3.59**]

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^d, \quad \sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q.$$

37. Douze étudiants sont réunis autour d'une table ronde pour fêter les vingt ans de l'un d'eux. On remarque que l'âge de chacun est égal à la moyenne de l'âge de ses deux voisins. Quel est l'âge des voisins de celui dont on célèbre l'anniversaire ?

Approfondissement

38. Régularité des fonctions convexes

Soit f, une fonction convexe sur un intervalle ouvert I.

38.1 La fonction f est continue sur I. →[**33.** 2.b]

38.2 L'ensemble des points de I en lesquels f n'est pas dérivable est fini ou dénombrable. →[**27.1**]

39. Enveloppe convexe d'une famille finie de points

Soit A, une partie non vide de l'espace vectoriel E.

L'**enveloppe convexe** de A est la plus petite partie convexe de E qui contienne A.

39.1 Il existe au moins une partie convexe de E qui contient A. L'enveloppe convexe de A est l'intersection de toutes les parties convexes de E qui contiennent A.

39.2 Soient $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, une famille de points d'un sous-espace affine E et K, l'ensemble des combinaisons convexes des points $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

1. L'ensemble K est une partie convexe de E qui contient les points $A_1, \dots, A_n$.
2. Toute partie convexe de E qui contient les points $A_1, \dots, A_n$ contient l'ensemble K.
3. Quelle est l'enveloppe convexe de trois points non alignés ?

39.3 Théorème de Gauss Lucas

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme non constant.

4. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) \neq 0$. Il existe des entiers $m_1, \dots, m_r$ supérieurs à 1 et des complexes deux à deux distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que

$$\frac{P'(z_0)}{P(z_0)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{z_0 - \alpha_k}.$$

5. Les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de P.

39.4 Optimisation sous contrainte

Soit K, l'enveloppe convexe des points $A_1, \dots, A_n$. On note φ, une forme linéaire sur E considérée comme une application de K dans $\mathbb{R}$ et on pose

$$\lambda = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \varphi(A_k) \quad \text{et} \quad \mu = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \varphi(A_k).$$

6. Pour tout $M \in K$, le réel $\varphi(M)$ est une combinaison convexe de $\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n)$.
7. L'application φ atteint un maximum et un minimum sur K. Ces extrema sont atteints en l'un des points $A_1, \dots, A_n$.

39.5 Mesures de probabilité sur un ensemble fini

L'ensemble fini $E = \{1, \dots, n\}$ est muni de la tribu $\mathscr{E} = \mathfrak{P}(E)$, dite **tribu discrète**. On peut identifier toute mesure de probabilité sur $(E, \mathscr{E})$ à une fonction de E dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on note ε_k, la mesure de Dirac en k, définie par

$$\varepsilon_k(k) = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, j \neq k, \quad \varepsilon_k(j) = 0.$$

L'ensemble des mesures de probabilité sur $(E, \mathscr{E})$ est l'enveloppe convexe des mesures de Dirac $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$.

40. Convexité stricte

La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **strictement convexe** lorsque tout arc est situé strictement au-dessous de la corde qu'il intercepte (à l'exception évidente des points de contact) : pour tout x et y distincts dans I,

$$\forall\, 0 < t < 1, \qquad f\big((1-t)x + ty\big) < (1-t)f(x) + tf(y).$$

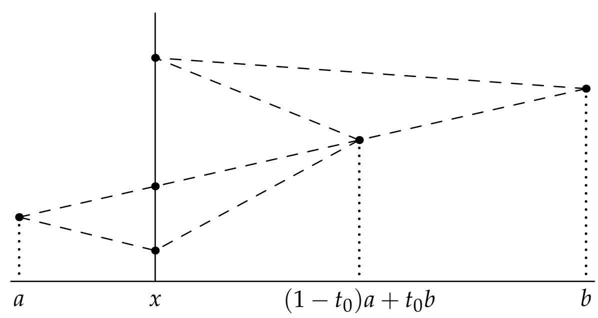
40.1 Soit f, une fonction convexe sur $[a, b]$.

S'il existe $0 < t_0 < 1$ tel que

$$f\big((1-t_0)a + t_0 b\big) = (1-t_0)f(a) + t_0 f(b),$$

alors

$$\forall\, t \in [0, 1], \qquad f\big((1-t)a + tb\big) = (1-t)f(a) + tf(b).$$



Autrement dit, si une fonction convexe n'est pas strictement convexe, alors elle est affine sur (au moins) un intervalle de longueur strictement positive.

40.2 Soit f, une fonction deux fois dérivable sur I, dont la dérivée seconde est strictement positive.

La fonction f est strictement convexe. De plus, tout arc est situé strictement au-dessus de ses tangentes (à l'exception évidente des points de contact) :

$$\forall\, x_0 \in I,\ \forall\, x \neq x_0, \qquad f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) < f(x).$$

40.3 Soient $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ dans I tels que

$$f\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Alors, par convexité de f,

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{n} f\Big(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} x_k\Big) &+ \frac{1}{n} f(x_n)\\ &= \frac{n-1}{n}\Big[\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\Big] + \frac{1}{n} f(x_n)\end{aligned}$$

et par convexité stricte,

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} x_k = x_n.$$

40.4 Inégalité arithmético-géométrique

Quels que soient $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs,

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

avec égalité si, et seulement si, $x_1 = \cdots = x_n$.

Pour aller plus loin

41. Questions pour réfléchir

1. Toute partie convexe est connexe par arcs.
2. L'enveloppe convexe [**39**] d'une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
3. Soit f, une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des points $x_0 \in \mathbb{R}$ en lesquels f n'est pas dérivable est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$.

42. Courbe d'imposition

Dans le cas général, le calcul de l'impôt sur le revenu repose sur le **revenu imposable** R et le **quotient familial** $Q = R/N$, où N est le **nombre de parts**. L'**impôt brut** I est alors donné par

$$I = T_m \times R - N \times b = N(T_m \times Q - b)$$

où T_m est le **taux marginal**. Les valeurs de T_m et b dépendent de la valeur de Q (en euros) :

– $T_m = 0$, $b = 0$ et $I = 0$ si $Q < 6\,011$
– $T_m = 5{,}5\%$ et $b = 330{,}61$ si $6\,011 \leqslant Q < 11\,991$
– $T_m = 14\%$ et $b = 1\,349{,}84$ si $11\,991 \leqslant Q < 26\,631$
– $T_m = 30\%$ et $b = 5\,610{,}8$ si $26\,631 \leqslant Q < 71\,397$
– $T_m = 41\%$ et $b = 13\,464{,}47$ si $71\,397 \leqslant Q < 151\,200$
– $T_m = 45\%$ et $b = 19\,512{,}47$ si $Q \geqslant 151\,200$.

42.1 Le nombre de parts N étant fixé, l'impôt brut I est une fonction f affine par morceaux, continue et convexe du quotient familial Q.

42.2 Idées reçues

Dans chaque cas étudié, on suppose qu'un seul paramètre varie.

1. Lors que le revenu imposable augmente : $R_2 > R_1$, l'impôt augmente aussi : $I_2 > I_1$, mais $R_2 - I_2 > R_1 - I_1$, même si on passe d'une tranche à la suivante.

La convexité de f fait que l'augmentation de l'impôt est proportionnellement plus importante pour les revenus moyens que pour les revenus élevés :

– À la suite d'une promotion, un célibataire ($N = 1$) voit son revenu imposable R passer de 25 k€ à 30 k€. Son impôt brut passe alors de $2{,}1$ k€ à $3{,}4$ k€, soit une augmentation de 58%.
– Un autre célibataire voit son revenu imposable passer de 100 k€ à 120 k€. Son impôt brut passe alors de $27{,}5$ k€ à $35{,}7$ k€, soit une augmentation de 30%.

2. Un couple ne fait pas nécessairement d'économies en passant de l'imposition séparée à l'imposition commune car la fonction f n'est pas strictement convexe [**40**].

3. Lorsqu'un ménage fiscal ayant déjà deux enfants à charge ($N = 3$) déclare un troisième enfant à charge ($N = 4$), l'impôt brut diminue en passant de $3f(R/3)$ à $4f(R/4)$ et cette diminution est d'autant plus importante que R est élevé car l'ordonnée à l'origine $-b$ est négative et que sa valeur absolue est une fonction croissante de Q. (L'administration fiscale prévoit dans ce cas un **plafonnement** du quotient familial.)

43. Barycentre dans un sous-espace affine

Par définition, les éléments d'un sous-espaces affine sont des **points**. Mais comme un sous-espace affine $\mathscr{F}$ est une partie d'un espace vectoriel E, on peut considérer les points de $\mathscr{F}$ comme des vecteurs de E.

En particulier, quels que soient les points A et B de $\mathscr{F}$, le vecteur $\boldsymbol{AB}$ est défini comme la combinaison linéaire $(B - A)$ des vecteurs A et B de E, de telle sorte que

$$A + \boldsymbol{AB} = B.$$

43.1 ✍ *Une partie $\mathscr{F}$ de l'espace vectoriel E est un **sous-espace affine** si, et seulement si, il existe un sous-espace vectoriel F tel que*

$$\forall\, A \in \mathscr{F}, \quad M \in \mathscr{F} \iff \boldsymbol{AM} \in F.$$

*Le sous-espace vectoriel F est la **direction** du sous-espace affine $\mathscr{F}$.*

43.2 Une famille de couples $(A_k, \alpha_k) \in \mathscr{F} \times \mathbb{K}$ étant donnée, si le poids total n'est pas nul, alors le barycentre G de ce système pondéré est l'unique solution de l'équation

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\Big) \cdot \boldsymbol{OM} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \boldsymbol{OA_k}$$

d'inconnue $M \in \mathscr{F}$, quel que soit le point $O \in \mathscr{F}$ choisi.

43.3 Si au contraire le poids total est nul, alors la combinaison linéaire

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \boldsymbol{OA_k}$$

est un vecteur de F qui est indépendant du point $O \in \mathscr{F}$ choisi.

44. Soient A, B et C, trois points non alignés d'un espace affine euclidien de dimension 3.

44.1 L'ensemble des points M tels que

$$\|-2\boldsymbol{MA} + \boldsymbol{MB} + 4\boldsymbol{MC}\| = \|\boldsymbol{MA} + \boldsymbol{MB} + \boldsymbol{MC}\|$$

est un plan.

44.2 L'ensemble des points M tels que

$$\|\boldsymbol{MA} + 2\boldsymbol{MB}\| = \|3\boldsymbol{MB} + \boldsymbol{MC}\|$$

est une sphère. →[**49.2**]

44.3 Pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble des points $M \in E$ tels que

$$\|\boldsymbol{MA}\|^2 - \|\boldsymbol{MB}\|^2 = k$$

est un plan affine, orthogonal à la droite (AB).

45. On suppose que la dimension de l'espace affine $\mathscr{E}$ est égale à 3 et que sa direction E est munie d'une structure euclidienne. On considère trois points non alignés A, B et C.

1. L'ensemble des points M tels que

$$(2\boldsymbol{MA} + \boldsymbol{MB}) \wedge \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{0}$$

est une droite parallèle à la droite (BC).

2. L'ensemble des points M tels que

$$(\boldsymbol{MA} - 3\boldsymbol{MB}) \wedge (\boldsymbol{MB} + 3\boldsymbol{MC}) = \mathbf{0}$$

est une droite contenue dans le plan du triangle ABC.

3. L'ensemble des points M tels que

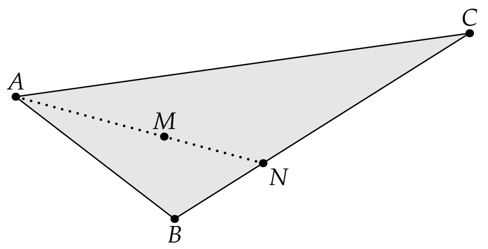
$$(\boldsymbol{MA} + \boldsymbol{MB} + \boldsymbol{MC}) \wedge (3\boldsymbol{MA} + \boldsymbol{MB} - 4\boldsymbol{MC}) = \mathbf{0}$$

est une droite contenue dans le plan du triangle ABC.

46. Représentation barycentrique d'un triangle

Soient A, B et C, trois points non alignés du plan et M, une combinaison convexe de A, B et C : il existe trois réels positifs α, β et γ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et

$$M = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$



1. Si deux des trois poids sont nuls, alors M est l'un des sommets du triangle ABC.
2. Si un des poids est nul, alors M est sur l'un des côtés du triangle.
3. Si les trois poids sont strictement positifs, alors M est à l'intérieur du triangle. Dans ce cas,

$$\begin{cases} N = \frac{\beta}{\beta+\gamma} B + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} C \in \,]B, C[\\ M = \alpha A + (1-\alpha) N \in \,]A, N[\,. \end{cases}$$

47. Caractérisation affine du barycentre

On considère une famille de points $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ d'un sous-espace affine $\mathscr{E}$ de direction E, une famille de réels $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et l'application $f : \mathscr{E} \to E$ définie par

$$\forall\, M \in \mathscr{E}, \quad f(M) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \boldsymbol{MA_k}.$$

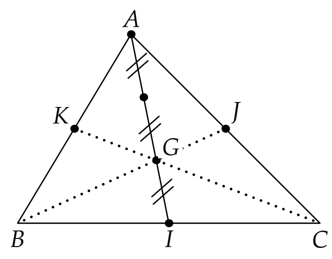
On pose $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

1.
$$\forall\, M, G \in \mathscr{E}, \quad f(M) = f(G) + \alpha \cdot \boldsymbol{MG}.$$

2. Si $\alpha = 0$, alors la fonction f est constante.
3. Si $\alpha \neq 0$, alors il existe un, et un seul, point $G \in \mathscr{E}$ tel que $f(G) = \mathbf{0}$. Ce point G est le barycentre du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n}$.

48. Isobarycentre et médianes

Soient A, B et C, trois points du plan formant un triangle. L'isobarycentre G des points A, B et C est le point de concours des trois médianes.



Si I est le milieu du côté $[B, C]$, alors G est au tiers de la hauteur sur $[A, I]$:

$$\boldsymbol{IG} = {}^1\!/_3 \cdot \boldsymbol{IA}.$$

49. Fonction de Leibniz

On suppose que l'espace vectoriel E est muni d'une structure euclidienne.

49.1 On considère un système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n}$ et la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, M \in E, \quad f(M) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \|\boldsymbol{MA_k}\|^2.$$

1. On suppose que le poids total α n'est pas nul et on note G, le barycentre du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n}$. Alors

$$f(M) = \alpha \|\boldsymbol{MG}\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \|\boldsymbol{GA_k}\|^2$$

et les lignes de niveau de f sont des sphères (éventuellement vides).

2. Si $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$), alors la fonction f atteint son minimum absolu (resp. son maximum absolu) en $M = G$.
3. Que dire des lignes de niveau de f lorsque $\alpha = 0$?

49.2 Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, distinct de 1. L'ensemble des points M tels que

$$\frac{\|\boldsymbol{MA}\|}{\|\boldsymbol{MB}\|} = k$$

est une sphère dont le centre est le barycentre du système $[(A, 1), (B, -k^2)]$.

50. Soient G_1 et G_2, deux points distincts. On pose

$$\forall\, M \in E, \quad g(M) = \langle\, \boldsymbol{MG_1} \,|\, \boldsymbol{MG_2} \,\rangle.$$

1. La fonction g atteint son minimum absolu en G_0, milieu du segment $[G_1, G_2]$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble des points M tels que $g(M) = k$ est une sphère (éventuellement vide) dont le centre est sur la droite (G_1G_2).
3. L'ensemble des points M tels que $g(M) = 0$ est la sphère de diamètre $[G_1, G_2]$.

51. On suppose que E est un espace de dimension 3 muni d'une structure euclidienne.

51.1 Si A, B et C sont trois points distincts, alors l'ensemble des points M tels que

$$\langle\, 2\boldsymbol{MA} - 3\boldsymbol{MB} + 4\boldsymbol{MC} \,|\, \boldsymbol{AB} \,\rangle = 0$$

est un plan affine, orthogonal à la droite (AB).

51.2 On suppose que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. L'ensemble des points M tels que

$$\langle\, 2\boldsymbol{MA} - \boldsymbol{MB} - \boldsymbol{MC} \,|\, \boldsymbol{MA} \,\rangle = 0$$

est un plan affine qui contient A.

2. L'ensemble des points M tels que

$$\langle\, 3\boldsymbol{MA} + \boldsymbol{MB} - 4\boldsymbol{MC} \,|\, \boldsymbol{MA} \,\rangle = \langle\, \boldsymbol{MA} - 2\boldsymbol{MB} + 3\boldsymbol{MC} \,|\, \boldsymbol{AB} \,\rangle$$

est un plan affine.

3. La fonction f définie par

$$\forall\, M \in E, \quad f(M) = \langle\, \boldsymbol{MA} + 2\boldsymbol{MB} \,|\, \boldsymbol{MB} + 2\boldsymbol{MC} \,\rangle$$

atteint un minimum absolu mais n'est pas majorée.

4. La fonction f définie par

$$\forall\, M \in E, \quad f(M) = \langle\, 2\boldsymbol{MA} + \boldsymbol{MB} \,|\, \boldsymbol{MA} - 3\boldsymbol{MC} \,\rangle$$

atteint un maximum absolu mais n'est pas minorée.

5. La fonction f définie par

$$\forall\, M \in E, \quad f(M) = \langle\, \boldsymbol{MA} - 2\boldsymbol{MC} \,|\, -5\boldsymbol{MB} + \boldsymbol{MC} \,\rangle$$

atteint un minimum absolu mais n'est pas majorée.

6. La fonction f définie pour tout $M \in E$ par

$$f(M) = \langle\, \boldsymbol{MA} - 3\boldsymbol{MB} + 2\boldsymbol{MC} \,|\, \boldsymbol{MA} + \boldsymbol{MB} + 2\boldsymbol{MC} \,\rangle$$

n'est ni majorée, ni minorée.

7. La fonction f définie pour tout $M \in E$ par

$$f(M) = \langle\, 2\boldsymbol{MA} - 5\boldsymbol{MB} + 3\boldsymbol{MC} \,|\, \boldsymbol{MA} + \boldsymbol{MB} - 2\boldsymbol{MC} \,\rangle$$

est constante.