2
Borne supérieure et borne inférieure

I
Axiome de la borne supérieure

1. Soit A, une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathfrak{M}(A)$, l'ensemble des majorants de A :

$$M \in \mathfrak{M}(A) \iff \forall\, x \in A, \quad x \leqslant M$$

et $\mathfrak{m}(A)$, l'ensemble des minorants de A :

$$m \in \mathfrak{m}(A) \iff \forall\, x \in A, \quad m \leqslant x.$$

1.1 ✍ *Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une **borne supérieure** lorsque l'ensemble $\mathfrak{M}(A)$ de ses majorants admet un plus petit élément. Dans ce cas,* $\min \mathfrak{M}(A)$ *est noté* $\sup(A)$.

1.2 ✍ *Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une **borne inférieure** lorsque l'ensemble $\mathfrak{m}(A)$ de ses minorants admet un plus grand élément. Dans ce cas,* $\max \mathfrak{m}(A)$ *est noté* $\inf(A)$.

2. Borne supérieure et maximum

2.1 ➜ *Si la partie A admet un plus grand élément, alors elle admet aussi une borne supérieure et de plus* $\sup(A) = \max(A)$.

2.2 ➜ *Si A admet une borne supérieure et si cette borne appartient à A, alors c'est le plus grand élément de A, soit :* $\sup(A) = \max(A)$.

3. Axiome de la borne supérieure

Les deux énoncés suivants sont équivalents.

3.1 ➜ *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

3.2 ➜ *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

4. Questions pour réfléchir

1. Décrire $\mathfrak{M}(\varnothing)$ et $\mathfrak{m}(\varnothing)$.
2. Condition pour que $\mathfrak{M}(A)$ (resp. $\mathfrak{m}(A)$) soit une partie non vide de $\mathbb{R}$.
3. Conditions pour qu'une partie admette un plus grand élément ?
4. Exemple de partie $A \subset \mathbb{R}$ admettant une borne supérieure mais pas de plus grand élément ?
5. Soient A, une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure M et $\varepsilon > 0$.

5.a Il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < x_\varepsilon \leqslant M$.

5.b Existe-t-il $y_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < y_\varepsilon < M$?

6. Soient f et g, deux fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

6.a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \big[f(x) + g(x)\big] \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) + \sup_{x\in\mathbb{R}} g(x)$$

6.b Même si les deux fonctions f et g atteignent un maximum, leur somme $f + g$ n'atteint pas nécessairement un maximum.

7. Condition sur $A \subset \mathbb{R}$ pour que $\inf(A) = \sup(A)$.

II
Borne supérieure et inégalités

5. Majoration par le sup

5.1 ➜ *La borne supérieure de A est un majorant de A :*

$$\forall\, x \in A, \qquad x \leqslant \sup(A).$$

5.2 Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide et majorée. S'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers ℓ, alors $\ell \leqslant \sup(A)$.

5.3 ➜ *Pour toute partie bornée et non vide $A \subset \mathbb{R}$,*

$$\inf(A) \leqslant \sup(A).$$

6. Passage au sup

Connaissant une majoration par une quantité indépendante d'un paramètre x, on peut **passer au** sup sur ce paramètre.
Cette opération est analogue au **passage à la limite** pour une suite convergente, qui fait passer d'une propriété vraie à partir d'un certain rang à une propriété de la limite. →[5.2]

6.1 ➜ *Si A est une partie non vide et majorée par M :*

$$\forall\, x \in A, \quad x \leqslant M$$

alors :

$$\sup(A) \leqslant M.$$

6.2 ➜ *Si $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction majorée par M :*

$$\forall\, x \in A, \quad f(x) \leqslant M$$

alors

$$\sup_{x\in A} f(x) \leqslant M.$$

7. Passage à l'inf

7.1 ➜ *Si A est une partie non vide et minorée par m :*

$$\forall\, x \in A, \qquad x \geqslant m$$

*alors on peut **passer à l'**inf dans cette inégalité :*

$$\inf(A) \geqslant m.$$

7.2 ➜ *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction minorée par m :*

$$\forall\, x \in X, \quad f(x) \geqslant m$$

*alors on peut passer à l'*inf *dans cette inégalité :*

$$\inf_{x\in X} f(x) \geqslant m.$$

8. Caractérisation séquentielle

Soit A, une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

8.1 Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$ et une suite d'éléments de A qui converge vers $\inf(A)$.

8.2 ➜ *Un majorant M de A est égal à $\sup(A)$ si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M.*

9. ➜ *Soient A et B, deux parties de $\mathbb{R}$ qui admettent chacune une borne supérieure et une borne inférieure.*
Si $A \subset B$, alors

$$\inf(B) \leqslant \inf(A) \quad \textit{et} \quad \sup(A) \leqslant \sup(B).$$

II.1 Convergence des suites monotones

10.1 ➜ *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle croissante.*
Si elle est majorée, alors elle converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

Dans le cas contraire, elle diverge vers $+\infty$.

10.2 ➜ *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle décroissante.*
Si elle est minorée, alors elle converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

Dans le cas contraire, elle diverge vers $-\infty$.

11. Suites adjacentes

11.1 ✍ *Deux suites réelles sont* ***adjacentes*** *lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et que leur différence tend vers* 0.

11.2 ➔ *Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.*

12. ➔ **Limites des fonctions monotones**

Une fonction monotone $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *admet une limite à gauche finie et une limite à droite finie en chaque point* x_0 *de l'intervalle* $]a,b[$. *Elle admet aussi une limite à droite, finie ou infinie, au voisinage de* a *et une limite à gauche, finie ou infinie, au voisinage de* b.

II.2 Fonctions bornées

13. ✍ *Si* $f : X \to \mathbb{R}$ *est une fonction bornée, alors les* ***bornes*** *de* f *sont définies par :*

$$\inf_X f = \inf\big(f_*(X)\big) \quad et \quad \sup_X f = \sup\big(f_*(X)\big)$$

où $f_*(X)$ *est l'image de* X *par* f.

14. ✍ *Si* $f : X \to \mathbb{R}$ *est une fonction bornée, alors la* ***norme uniforme*** *de* f *est définie par :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \big|f(x)\big|.$$

15. ➔ *Si* $f : X \to \mathbb{R}$ *est une fonction bornée, alors*

$$\forall\, x \in X, \quad -\|f\|_\infty \leqslant f(x) \leqslant \|f\|_\infty.$$

Entraînement

16. Questions pour réfléchir

1. On suppose que

$$\forall\, x \in A, \quad x < M.$$

Comparer $\sup(A)$ et M : le passage au sup conserve-t-il les inégalités strictes ?

2. Si $u_i \leqslant v_j$ pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$, alors

$$\inf_{i\in I} u_i \leqslant \sup_{i\in I} u_i \leqslant \inf_{j\in J} v_j \leqslant \sup_{j\in J} v_j.$$

Illustrer ce résultat par une figure.

3. Si $u_i \leqslant v_i$ pour tout $i \in I$, alors

$$\inf_{i\in I} u_i \leqslant \inf_{i\in I} v_i \quad \text{et} \quad \sup_{i\in I} u_i \leqslant \sup_{i\in I} v_i.$$

Comparer $\sup_{i\in I} u_i$ et $\inf_{i\in I} v_i$ (à l'aide d'une figure).

4. Une suite réelle monotone est convergente si, et seulement si, elle est bornée.

5. Condition pour qu'une suite décroissante soit convergente ? Quelle est alors sa limite ?

6. Une suite positive qui n'est pas bornée tend-elle nécessairement vers $+\infty$?

7. Que dire de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la différence $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle ?

8. On considère une fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, monotone. Condition pour que $f(0^+)$ soit finie ? Cas de la limite en $+\infty$?

17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle bornée.

17.1 La suite de terme général

$$M_n = \sup_{p\geqslant n} |u_p|$$

est une suite positive décroissante.

17.2 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 si, et seulement si, la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

18. Soit A, une partie non vide de $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \inf_{a\in A} |x-a|.$$

Alors

$$\forall\, (a,x,y) \in A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \leqslant |x-y| + |y-a|$$

et l'application φ est 1-lipschitzienne.

III

Interversion des bornes

19. Conventions

On fait ici appel aux conventions usuelles

19.1 Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majorée, alors $\sup(A) = +\infty$.

19.2 Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas minorée, alors $\inf(A) = -\infty$.

19.3 Avec ces conventions, toute suite croissante tend vers sa borne supérieure et toute suite décroissante tend vers sa borne inférieure. →**[10]**

20. Les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.

21. La fonction G définie par

$$\forall\, x > 0, \quad G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$$

tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

22. Théorème de Fubini positif

1. Si $\sum x_n$ est une série dont le terme général est positif, alors la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ a un sens, que la série soit convergente ou divergente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} x_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} x_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

2. Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\Big) = \sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\Big),$$

que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ soit sommable ou non.

23. Les expressions suivantes tendent vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x+t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

24.1

$$\lim_{x\to0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

24.2

$$\lim_{x\to0} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t} = 1$$

24.3

$$\lim_{x\to0} \int_0^{1} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ell\mathrm{n}\, 2$$

24.4 Cas général
On suppose que
– quel que soit $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(t,x)]$ est croissante et positive sur $]a,b[$;
– quel que soit $x \in]a,b[$, la fonction $[t \mapsto f(t,x)]$ est intégrable sur I
– et que les fonctions $[t \mapsto f(t,a+)]$ et $[t \mapsto f(t,b-)]$ sont continues par morceaux sur I.
Alors la fonction

$$F = \left[x \mapsto \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t\right]$$

est croissante et admet une limite finie en a (resp. en b) si, et seulement si, la fonction $[t \mapsto f(t,a+)]$ (resp. $[t \mapsto f(t,b-)]$) est intégrable sur $]a,b[$.
Dans ce cas,

$$F(a+) = \int_a^b f(t,a+)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F(b-) = \int_a^b f(t,b-)\,\mathrm{d}t.$$

25. Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, une famille réelle.
25.1 Pour tout $i \in I$,

$$\inf_{j\in J} u_{i,j} \leqslant \inf_{j\in J} \sup_{k\in I} u_{k,j}.$$

25.2 * *Pour toute famille réelle* $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, *bornée ou non,*

$$\sup_{i\in I} \inf_{j\in J} u_{i,j} \leqslant \inf_{j\in J} \sup_{i\in I} u_{i,j}.$$

25.3 On pose

$$M = \sup_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}.$$

Si M' est un réel tel que $M' < M$, alors il existe $i_0 \in I$ et $j_0 \in J$ tels que

$$M' < u_{i_0,j_0} \leqslant M$$

donc

$$M' < \sup_{i\in I} \sup_{j\in J} u_{i,j} \leqslant M \quad \text{et} \quad M' < \sup_{j\in J} \sup_{i\in I} u_{i,j} \leqslant M.$$

25.4 * *Pour toute famille réelle* $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, *majorée ou non,*

$$\sup_{i\in I} \sup_{j\in J} u_{i,j} = \sup_{j\in J} \sup_{i\in I} u_{i,j} \quad \textit{et} \quad \inf_{i\in I} \inf_{j\in J} u_{i,j} = \inf_{j\in J} \inf_{i\in I} u_{i,j}.$$

Pour aller plus loin

26. Questions pour réfléchir
1. Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majorée (resp. pas minorée), on pose $\sup(A) = +\infty$ (resp. $\inf(A) = -\infty$). Discuter la légitimité de cette convention.
2. Comment définir $\inf(\varnothing)$ et $\sup(\varnothing)$?
3. *Suite de* **[8.1]** – Il existe une suite d'éléments de A^c qui converge vers $\sup(A)$.
4. L'opération de passage au sup est-elle une majoration ou une minoration ?
5. On suppose que A admet M pour borne supérieure.
5.a Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers M, alors on peut extraire une suite croissante $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers M. Il existe donc une suite croissante d'éléments de A qui converge vers M.
5.b Existe-t-il une suite strictement croissante d'éléments de A qui converge vers M ?
6. L'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leqslant 2\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$. Elle admet une borne supérieure en tant que partie de $\mathbb{R}$, mais pas en tant que partie de $\mathbb{Q}$.
7. *Suite de* **[25.2]** – Étudier le cas d'égalité. →**[4.98]**