

1. Une **norme** sert à mesurer la distance qui sépare deux points. On peut ainsi définir la notion de **suite convergente**, puis de la notion de **fonction continue**.

I

Norme et distance associée

2. \triangleleft Soit E , un espace vectoriel réel ou complexe. Le corps des scalaires est noté \mathbb{K} .

On appelle **norme sur E** toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$

2.1 qui sépare les points :

$$N(x) = 0 \iff x = 0_E$$

2.2 est positivement homogène :

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$

2.3 et vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

3. Inégalité triangulaire

L'inégalité [2.3] peut être généralisée au cas d'une combinaison linéaire quelconque et exprimée sous la forme plus forte de l'encadrement [3.2].

3.1 Quels que soient les vecteurs x_1, \dots, x_n dans E et les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$,

$$N\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| N(x_k).$$

3.2 \rightarrow Si N est une norme sur E , alors

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x \pm y) \leq N(x) + N(y)$$

quels que soient x et y dans E .

4. Espaces vectoriels normés

4.1 \triangleleft Un **espace vectoriel normé** est un espace vectoriel E sur lequel est défini une norme N .

4.2 La restriction d'une norme N sur E à un sous-espace vectoriel F de E est une norme sur F .

4.3 \triangleleft Soient (E, N) , un espace vectoriel normé et F , un sous-espace vectoriel de E . La **norme induite** par N sur le sous-espace F est la restriction de N à F .

5. Exemples fondamentaux

5.1 La valeur absolue est une norme sur \mathbb{R} .

5.2 Le module est une norme sur \mathbb{C} (vu comme un espace vectoriel réel aussi bien que comme un espace vectoriel complexe).

5.3 La norme associée au produit scalaire sur un espace pré-hilbertien est une norme.

Distance associée à une norme

6. \triangleleft La **distance** associée à la norme N sur E est l'application

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

définie par

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad d(x, y) = N(x - y).$$

7. \rightarrow La distance d associée à une norme N est une application **symétrique** :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad d(x, y) = d(y, x)$$

7.2 qui sépare les points :

$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$

7.3 qui vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

7.4 et qui est **invariante par translation** :

$$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, \quad d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

8. Parties bornées, fonctions bornées

8.1 \triangleleft Une partie A de E est **bornée** pour la norme N lorsque

$$\exists M > 0, \forall x \in A, \quad N(x) \leq M.$$

8.2 \triangleleft Une application $f : X \rightarrow E$ est **bornée** pour la norme N sur E lorsque son image $f_*(X)$ est une partie bornée de E :

$$\exists M > 0, \forall x \in X, \quad N(f(x)) \leq M.$$

Sphère unité et boules unité

9. Soit N , une norme sur l'espace vectoriel E .

9.1 \triangleleft Un vecteur $x \in E$ est **unitaire** lorsque $N(x) = 1$.

9.2 \triangleleft La **sphère unité** S^1 de (E, N) est définie par

$$S^1 = [N(x) = 1].$$

9.3 \rightarrow Pour tout vecteur $x \in E$ non nul, il existe un scalaire $\lambda > 0$ et un vecteur $u \in S^1$ tels que

$$x = \lambda u.$$

Cette factorisation de x est unique.

9.4 \triangleleft La **boule unité (fermée)** B_f^1 est définie par

$$B_f^1 = [N(x) \leq 1]$$

et la **boule unité ouverte** B_o^1 par

$$B_o^1 = [N(x) < 1].$$

10. \rightarrow On suppose que $\|\cdot\|$ est la norme associée à un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ sur E . Pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \max_{\|y\|=1} |(x | y)| = \max_{\|y\| \leq 1} |(x | y)|.$$

11. Diamètre d'une partie bornée

11.1 \triangleleft Le **diamètre** d'une partie non vide et bornée A de E est défini par

$$\phi(A) = \sup_{(x, y) \in A \times A} d(x, y).$$

11.2 Il existe deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telles que

$$\phi(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n).$$

Distance à une partie

12.1 \triangleq La distance d'un point $x \in E$ à une partie non vide A de E est définie par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

12.2 Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$d(x, A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, u_n)$$

et une telle suite est bornée.

12.3 La distance de x à une partie A est nulle si, et seulement si, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, u_n) = 0.$$

13. \rightarrow Soit A , une partie non vide de E .

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Entraînement**14. Questions pour réfléchir**

1. Soient $(F, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé et $f \in L(E, F)$. L'application $N_f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x \in E, \quad N_f(x) = \|f(x)\|$$

est une norme sur E si, et seulement si, f est injective.

2. Un sous-espace vectoriel est-il une partie bornée?
3. Une intersection de parties bornées est-elle bornée?
4. Condition pour que l'union d'une famille de parties bornées soit encore bornée.
5. Le complémentaire d'une partie bornée est-il borné?
6. Une application linéaire est-elle bornée?
7. Soient N_1 et N_2 , deux normes distinctes sur E . Il existe un vecteur $x \in E$ unitaire pour N_1 sans être unitaire pour N_2 .
8. Que dire d'un vecteur $x \in E$ dont la norme $N(x)$ ne dépend pas de la norme N définie sur E ?
9. La sphère unité et la boule unité sont-elles des parties bornées? des sous-espaces vectoriels?
10. Suite de [10] –

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sup_{\|y\| < 1} |(x|y)|.$$

11. Que dire de A lorsque $\phi(A) = 0$?
12. Quelle que soit la norme N , le diamètre de la sphère unité et celui de la boule unité sont égaux à 2.
13. Le plan \mathbb{R}^2 est muni de la norme euclidienne canonique.
- 13.a Le diamètre de l'ellipse

$$A = \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right]$$

est égal à $2 \max\{|a|, |b|\}$.

- 13.b Quel est le plus petit cercle dans lequel cette ellipse est inscrite?
- 13.c Quel est le plus grand cercle inscrit dans cette ellipse?
14. Diamètre de l'ensemble

$$A = [4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 1]$$

lorsque $E = \mathbb{R}^3$ est muni de la norme définie par

$$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad N(u) = \sqrt{4x^2 + y^2 + 4z^2}.$$

15. Condition sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ pour que

$$d(0, I) = \min_{y \in I} d(0, y).$$

15. Sphère unité dans un espace euclidien

Soit N , la norme associée à un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur \mathbb{R}^3 .

1. Par quelle équation la sphère unité $S^1(N)$ est-elle représentée dans une base orthonormée pour $(\cdot|\cdot)$?

2. Il existe une base \mathcal{B}_0 orthonormée pour le produit scalaire canonique et trois réels a, b et c , strictement positifs tels que $S^1(N)$ admette

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

pour équation relativement à \mathcal{B}_0 .

3. Interprétation géométrique.

16. On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ est muni de la norme définie par

$$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad N(u) = \sqrt{x^2 + 3y^2}.$$

1. L'affinité $[(x, y) \mapsto (x, \sqrt{3}y)]$ est une isométrie de (\mathbb{R}^2, N) sur \mathbb{R}^2 muni de la norme euclidienne canonique.

2. L'ensemble $A = [2x^2 + y^2 \leq 1]$ est une partie bornée pour N , de diamètre $2\sqrt{3}$.

II**Suites****17. Suites convergentes**

17.1 \triangleq Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge vers $a \in E$ pour la norme $\|\cdot\|$ lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a_n - a\| = 0.$$

17.2 Unicité de la limite

Si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a et vers b pour la même norme $\|\cdot\|$, alors $a = b$.

17.3 \triangleq Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est convergente (pour la norme $\|\cdot\|$) lorsqu'il existe $a \in E$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a_n - a\| = 0.$$

Dans ce cas, a est la limite (pour la norme $\|\cdot\|$) de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

17.4 Méthode

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a si, et seulement si, il existe une suite réelle $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|a_n - a\| \leq \varepsilon_n.$$

17.5 \triangleq Une suite est divergente (pour $\|\cdot\|$) lorsqu'elle n'est pas convergente pour $\|\cdot\|$.

Séries

18. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite d'éléments de E .

18.1 \triangleq La série $\sum a_k$ est convergente (pour la norme $\|\cdot\|$) lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

est convergente pour la norme $\|\cdot\|$.

18.2 \triangleq Dans ce cas, la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est notée

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

et appelée somme de la série $\sum a_k$.

18.3 \triangleq Si la série $\sum a_k$ est convergente, le reste d'ordre n est défini par

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

18.4 \rightarrow Si la série $\sum a_k$ est convergente, alors la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des restes converge vers 0_E .

II.1 Propriétés des suites convergentes

19. On considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et toutes les propriétés énoncées sont relatives à la norme $\|\cdot\|$ qui a été choisie.

20.1 Si l'application $f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ est lipschitzienne :

$$\exists K > 0, \forall (x, y) \in E \times E, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E$$

et si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ pour $\|\cdot\|_E$, alors la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell) \in F$ pour $\|\cdot\|_F$.

20.2 Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors la suite réelle $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\|\ell\|$.

20.3 \rightarrow Toute suite convergente est bornée.

21. \rightarrow Si les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $a \in E, b \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

21.1 la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(a + b)$;

21.2 la suite $(\lambda_n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (λa) .

22. Suites extraites

22.1 Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et tend aussi vers ℓ .

22.2 Si les deux suites extraites

$$(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$$

convergent vers la même limite ℓ , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

23. Valeurs d'adhérence

On connaît le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle ou complexe bornée, on peut extraire une suite convergente.

23.1 \triangleq Un élément ℓ de E est une *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite extraite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ .

23.2 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour valeur d'adhérence si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

23.3 Une suite convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence : sa limite.

23.4 \rightarrow Une suite qui admet au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.

24. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle bornée telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \frac{1}{2} u_{2n} = 0.$$

Si a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $-2a$ est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

II.2 Relations de comparaison

25. On considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et on souhaite déterminer avec plus ou moins de précision l'ordre de grandeur d'une suite de vecteurs.

Les suites de référence sont, en général, des suites réelles dont le terme général est strictement positif.

26. Domination

26.1 \triangleq La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E est *dominée* par la suite réelle $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque la suite réelle $(\|a_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$a_n = \mathcal{O}(\alpha_n) \iff \|a_n\| = \mathcal{O}(\alpha_n)$$

26.2 La suite de vecteurs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si, et seulement si, la suite de vecteurs $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha_n \cdot b_n$$

est bornée.

27. Négligeabilité

27.1 \triangleq La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E est *négligeable* devant la suite réelle $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque la suite réelle $(\|a_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$a_n = o(\alpha_n) \iff \|a_n\| = o(\alpha_n)$$

27.2 La suite de vecteurs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite réelle $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si, et seulement si, la suite de vecteurs $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha_n \cdot b_n$$

tend vers 0_E .

28. Équivalence

28.1 Si $\|a_n - b_n\| = o(\|b_n\|)$, alors $\|a_n - b_n\| = o(\|a_n\|)$.

28.2 \triangleq Deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs sont *équivalentes* :

$$a_n \sim b_n$$

lorsque

$$\|a_n - b_n\| = o(\|b_n\|).$$

28.3 Si $a_n \sim b_n$, alors $\|a_n\| \sim \|b_n\|$ et si la norme est associée à un produit scalaire, alors l'angle formé par les vecteurs a_n et b_n tend vers 0.

28.4 S'il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de scalaires qui tend vers 1 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda_n \cdot b_n,$$

alors $a_n \sim b_n$.

II.3 Exemples usuels de normes

29. Normes sur \mathbb{K}^d

Les normes usuelles sur \mathbb{K}^d sont les suivantes :

29.1 \triangleq La *norme euclidienne canonique* sur \mathbb{R}^d :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d), \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^d x_k^2}.$$

29.2 \triangleq La *norme produit* sur \mathbb{K}^d :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq d} |x_k|$$

et la norme définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^d |x_k|.$$

30. Normes sur des espaces de matrices

De même, l'espace $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices est muni de trois normes usuelles.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

30.1 \triangleq La *norme euclidienne canonique* sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est définie par

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2}.$$

30.2 \triangleq Pour tout $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{i,j}|.$$

31. Normes sur des espaces de suites

31.1 \triangleq Suites bornées

On note $\ell^\infty(\mathbb{K})$, l'espace vectoriel des suites bornées d'éléments de \mathbb{K} :

$$u \in \ell^\infty(\mathbb{K}) \iff \exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N}, |u_k| \leq M.$$

et la norme naturelle sur l'espace $\ell^\infty(\mathbb{K})$ est définie par

$$\|u\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k|.$$

31.2 \triangleq Familles sommables

Une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{K} est **sommable** lorsque la série de terme général positif $\sum \|u_k\|$ est convergente.

L'espace vectoriel des suites sommables est noté $\ell^1(\mathbb{K})$ et la norme naturelle sur l'espace $\ell^1(\mathbb{K})$ est définie par

$$\|u\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

31.3 \triangleq Familles de carré sommable

Une suite u d'éléments de \mathbb{K} est dite **de carré sommable** lorsque la série $\sum u_k^2$ est absolument convergente.

L'espace vectoriel des suites sommables est noté $\ell^2(\mathbb{K})$.

La norme naturelle sur $\ell^2(\mathbb{R})$ est définie par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2}$$

et sur $\ell^2(\mathbb{C})$ par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^2}.$$

32. Normes sur des espaces de fonctions

32.1 \triangleq Soient (E, N) , un espace vectoriel normé et X , un ensemble non vide. La **norme (de la convergence) uniforme** (sur X) sur l'espace $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées de X dans E est définie par

$$\forall f \in \mathcal{B}(X, E), \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} N(f(x)).$$

32.2 \triangleq L'espace $E = \mathcal{C}^1(I)$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $I = [a, b]$ peut être normé par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} N(f(x)) \quad \text{ou par} \quad \|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

32.3 \triangleq La norme canonique sur l'espace $\mathcal{L}_c^1(I)$ des fonctions continues et intégrables sur l'intervalle I , dite **norme de la convergence en moyenne** sur I , est définie par

$$\forall f \in \mathcal{L}_c^1(I), \|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt.$$

32.4 \triangleq La norme canonique sur l'espace $\mathcal{L}_c^2(I)$ des fonctions continues et de carré intégrable sur l'intervalle I , dite **norme de la convergence en moyenne quadratique** sur I , est définie par

$$\forall f \in \mathcal{L}_c^2(I), \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}.$$

II.4 Normes d'algèbre

33. Une algèbre (associative unitaire) est aussi un espace vectoriel, mais certaines normes définies sur une algèbre sont plus utiles que d'autres.

34. \triangleq Soit E , une algèbre associative unitaire E . Une norme N sur E est une **norme d'algèbre*** lorsque

$$N(1_E) = 1 \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in E \times E, \quad N(xy) \leq N(x)N(y).$$

Une **algèbre normée*** est une algèbre associative unitaire munie d'une norme d'algèbre.

35. Soit (E, N) , une algèbre normée.

35.1 Pour tout $a \in E$: si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , alors la suite produit $(au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a\ell$.

35.2 \rightarrow Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a et si $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b , alors la suite produit $(a_nb_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ab .

36. Exemples fondamentaux

36.1 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sont deux algèbres normées.

36.2 Si X est un ensemble non vide et (E, N) est une algèbre normée, alors la norme de la convergence uniforme sur X est une norme d'algèbre sur $\mathcal{B}(X, E)$.

36.3 La norme euclidienne canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas une norme d'algèbre bien que \rightarrow [30.1]

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Entraînement

37. Questions pour réfléchir

1. Une suite qui tend vers l'infini n'admet pas de valeur d'adhérence.

2. Une suite qui n'est pas bornée peut-elle admettre une valeur d'adhérence?

3. L'équivalence des suites de vecteurs est une relation d'équivalence.

4. Si $\|a_n\| \sim \|b_n\|$, les suites de vecteurs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles équivalentes?

5. Suite de [28.4] – Examiner la réciproque.

6. Représenter les boules unités de \mathbb{R}^2 pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

7. Étant donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ de E , on considère sa base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_d^*)$ et on pose

$$\forall x \in E, \quad N_1(x) = \sum_{k=1}^d |e_k^*(x)| \quad \text{et} \quad N_\infty(x) = \max_{1 \leq k \leq d} |e_k^*(x)|.$$

Les applications N_1 et N_∞ sont deux normes sur E .

8. Expression générale des normes euclidiennes sur \mathbb{R}^d .

9. Condition sur la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que l'application N_a définie par

$$N_a(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k u_k|$$

soit une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{K})$; sur $\ell^1(\mathbb{K})$; sur $\ell^2(\mathbb{K})$.

10. Condition sur la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que l'application N_a définie par

$$N_a(u) = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k u_k|^2}$$

soit une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{K})$; sur $\ell^1(\mathbb{K})$; sur $\ell^2(\mathbb{K})$.

11. L'application définie par

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt$$

ne définit pas une norme sur l'espace $\mathcal{L}^1(I)$ des fonctions intégrables sur I .

12. Condition sur la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ pour que l'application N_g définie par

$$N_g(f) = \int_I |f(t)g(t)| dt$$

soit une norme sur $\mathcal{L}_c^1(I)$.

13. Condition sur la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ pour que l'application N_g définie par

$$N_g(f) = \sqrt{\int_I |f(t)g(t)|^2 dt}$$

soit une norme sur $\mathcal{L}_c^2(I)$.

38. Comparaisons de normes

38.1 La norme définie sur l'espace E des suites réelles bornées par

$$\forall u \in E, \|u\| = \sup_{x \in [0,1[} \left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \right|$$

est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$ au sens où : \rightarrow [31.1]

$$\forall u \in E, \|u\| \leq \|u\|_\infty.$$

Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\|u_n\|$ tende vers 0 alors que $\|u_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

38.2 La norme définie sur l'espace F des fonctions continues et bornées de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} par

$$\forall f \in F, \|f\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t} |\cos t| dt}$$

est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$: \rightarrow [32.1]

$$\exists K > 0, \forall f \in F, \|f\| \leq K \|f\|_\infty.$$

Ces deux normes ne sont pas équivalentes car

$$\forall \varepsilon > 0, \exists f \in F, \begin{cases} \|f\|_\infty = 1 \\ \|f\| \leq \varepsilon \end{cases}.$$

III

Applications linéaires

III.1 Applications lipschitziennes

39. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux espaces vectoriels normés et $\Omega \subset E$.

39.1 \Leftrightarrow Une application $f : \Omega \rightarrow F$ est k -lipschitzienne lorsque

$$\forall (x, y) \in \Omega \times \Omega, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

On note $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$, l'ensemble des applications k -lipschitziennes de Ω dans F .

39.2 Pour tout $k > 0$, l'ensemble $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$ est convexe.

39.3 $\forall 0 \leq k \leq k', \mathcal{L}_k(\Omega, F) \subset \mathcal{L}_{k'}(\Omega, F)$.

39.4 \Leftrightarrow L'ensemble des applications lipschitziennes de Ω dans F est noté $\mathcal{L}(\Omega, F)$ et défini par :

$$\mathcal{L}(\Omega, F) = \bigcup_{k \in \mathbb{R}_+} \mathcal{L}_k(\Omega, F).$$

39.5 L'ensemble $\mathcal{L}(\Omega, F)$ est un espace vectoriel.

39.6 Si $f : \Omega \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont lipschitziennes, alors la composée $g \circ f : \Omega \rightarrow G$ est lipschitzienne.

40. Exemples

40.1 Une fonction constante est 0-lipschitzienne.

40.2 L'application $[x \mapsto \|x\|_E]$ est 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

40.3 Pour tout $a \in E$, l'application $[x \mapsto d(x, a)]$ est lipschitzienne de E dans \mathbb{R} .

40.4 Quelle que soit A , partie non vide de E , l'application $[x \mapsto d(x, A)]$ est 1-lipschitzienne de E dans \mathbb{R} . \rightarrow [13]

40.5 Si \mathbb{R}^3 est muni de la norme produit [29.2], alors les applications

$$[(x, y, z) \mapsto x], [(x, y, z) \mapsto y], [(x, y, z) \mapsto z]$$

sont lipschitziennes de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} .

40.6 La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = x - x^2$$

vérifie

$$\forall 0 \leq x < y \leq 1, |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

et appartient à $\mathcal{L}_1([0, 1], \mathbb{R})$. Mais quel que soit $0 \leq k < 1$, la fonction f n'appartient pas à $\mathcal{L}_k([0, 1], \mathbb{R})$. \rightarrow [58]

III.2 Continuité des applications linéaires

41. \Leftrightarrow Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux espaces vectoriels normés. On note $L_c(E, F)$, l'ensemble des applications linéaires lipschitziennes de E dans F .

42. L'ensemble $L_c(E, F)$ est un espace vectoriel.

43. \rightarrow **Caractérisation de $L_c(E, F)$**

Soit f , une application linéaire de E dans F . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. L'application f est lipschitzienne sur E .
2. Il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E.$$

3. L'application f est bornée sur la sphère unité de E .
4. L'application f est bornée sur la boule unité fermée de E .
5. L'application f est bornée sur la boule unité ouverte de E .

44. Propriété de Lipschitz et continuité

On démontrera plus loin qu'une application linéaire est continue si, et seulement si, elle est lipschitzienne.

44.1 On démontre donc qu'une application linéaire T est continue sur E en prouvant l'existence d'une constante $k > 0$ telle que \rightarrow [43]

$$\forall x \in E, \|T(x)\| \leq k \|x\|.$$

44.2 Réciproquement, on démontre qu'une application linéaire T n'est pas continue sur E en exhibant une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E tels que

$$\frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

45. Exemples

45.1 Que $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ soit muni de la norme $\|\cdot\|_1$, de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ ou de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$, la transposition est continue :

$$\forall M \in E, \|{}^t M\| \leq \|M\|.$$

45.2 Soient E , un espace préhilbertien réel et $x_0 \in E$. L'application $f = [x \mapsto \langle x_0 | x \rangle]$ est continue :

$$\forall x \in E, |f(x)| \leq \|x_0\| \|x\|.$$

45.3 Si l'espace E des suites complexes convergentes est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, l'application L qui, à toute suite $u \in E$, associe sa limite $L(u)$ est continue :

$$\forall u \in E, |L(u)| \leq \|u\|_\infty.$$

45.4 Si $E = \ell^\infty(\mathbb{K})$ est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, alors les endomorphismes T et D de E définis par

$$\forall n \in \mathbb{N}, T(u)_n = u_{n+1} \quad \text{et} \quad D(u)_n = u_{n+1} - u_n$$

sont continus :

$$\forall u \in E, \|T(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \quad \|D(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty.$$

45.5 Exemples de formes linéaires sur $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$

On considère les formes linéaires définies par

$$V(f) = f(1) - f(0) \quad \text{et} \quad T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t) dt$$

où φ est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$. →[60]

1. Si E est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, alors les formes linéaires V et T_φ sont continues :

$$\forall f \in E, \quad |V(f)| \leq 2\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad |T_\varphi(f)| \leq \left[\int_0^1 |\varphi(t)| dt \right] \|f\|_\infty.$$

2. On suppose que E est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ de convergence en moyenne.

- 2.a La forme linéaire V n'est pas continue.
- 2.b La forme linéaire T_φ est continue :

$$\forall f \in E, \quad |T_\varphi(f)| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1.$$

3. On suppose que E est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ de convergence en moyenne quadratique.

- 3.a La forme linéaire V n'est pas continue.
- 3.b La forme linéaire T_φ est continue.

Complément : notion de norme subordonnée

46. On suppose que l'espace vectoriel E est muni d'une norme $\|\cdot\|$. La **norme subordonnée*** à $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace $L_c(E)$ des endomorphismes de E .

46.1 \Leftrightarrow Soit $f \in L_c(E)$. →[43]

La **norme d'application linéaire*** de f , dite **norme subordonnée*** à la norme $\|\cdot\|$ sur E , est définie par

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|.$$

46.2 Soit $f \in L_c(E)$.

- 1. $\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq \|f\| \|x\|_E.$
- 2. $\forall \lambda \in \text{Sp}(f), \quad |\lambda| \leq \|f\|.$
- 3. Si K est une constante réelle telle que

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E$$

alors $\|f\| \leq K$.

46.3 * L'application $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $L_c(E)$. [34]

47. Norme d'un projecteur

Soit $p \in L(E)$, un projecteur non identiquement nul.

47.1 Si le projecteur p est lipschitzien, alors $\|p\| \geq 1$.

47.2 Si E est un espace euclidien, alors :

- 1. Si p est un projecteur orthogonal, alors il est lipschitzien et $\|p\| = 1$.
- 2. Si le projecteur p est lipschitzien sans être un projecteur orthogonal, alors $\|p\| > 1$.

48. On admet que, pour toute norme N sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une constante $K > 0$ (qui dépend de N et de A) telle que

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad N(AX) \leq K N(X).$$

48.1 \Leftrightarrow Soit N , une norme sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. La **norme subordonnée*** à N de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est définie par

$$\|A\| = \sup_{N(X)=1} N(AX).$$

48.2 Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad N(AX) \leq \|A\| N(X).$$

48.3 Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\|A\| = \sup_{N(X) \leq 1} N(AX) = \sup_{X \neq 0} \frac{N(AX)}{N(X)}.$$

48.4 * Pour toute norme N sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la norme subordonnée à N est une norme d'algèbre sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Entraînement

49. Questions pour réfléchir

- 1. L'ensemble $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$ est-il un espace vectoriel ?
- 2. Si f et g sont lipschitziennes de Ω dans \mathbb{R} , alors $\max\{f, g\}$ et $\min\{f, g\}$ sont lipschitziennes de Ω dans \mathbb{R} .
- 3. Soient E et F , deux espaces vectoriels isomorphes et φ , un isomorphisme de F sur E .
 - 3.a Pour toute norme N sur E , l'application $\|\cdot\| = N \circ \varphi$ est une norme sur F .
 - 3.b La bijection φ est lipschitzienne de $(F, \|\cdot\|)$ dans (E, N) et sa réciproque est lipschitzienne de (E, N) dans $(F, \|\cdot\|)$.

50. Endomorphismes de $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$

L'espace E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de convergence uniforme sur $[0, 1]$.

1. L'application u définie par

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], \quad u(f)(x) = (1-x)f(0) + xf(1)$$

est un endomorphisme continu de E et $\|u\| = 1$.

2.a Pour toute fonction $f \in E$, il existe une, et une seule, primitive F de f telle que

$$\int_0^1 F(t) dt = 0$$

2.b

$$\forall x \in [0, 1], \quad F(x) = \int_0^1 \left(\int_s^x f(t) dt \right) ds.$$

2.c L'application v définie par $v(f) = F$ est un endomorphisme continu de E et $\|v\| = 1/2$.

51. Une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$

L'espace $E = \mathbb{R}[X]$ est muni de la norme définie par

$$\forall P \in E, \quad \|P\| = \max_{k \in \mathbb{N}} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!}.$$

La forme linéaire

$$T = \left[P \mapsto \int_0^1 \frac{P(t) \ln t}{1+t} dt \right]$$

est continue. L'équation $|T(P)| = \|T\| \|P\|$ admet $P = 0$ pour seule solution.

52. Suites périodiques complexes

Le sous-espace $E \subset \ell^\infty(\mathbb{K})$ des suites périodiques est muni de la norme uniforme.

1. L'application L définie par

$$L(u) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p u_k,$$

où p est une période de la suite $u \in E$, est une forme linéaire continue sur E et $\|L\| = 1$.

2. L'application linéaire θ de $F = \text{Ker } L$ dans E définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta(u)_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

n'est pas continue.

53. Les espaces $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$ et $F = \mathcal{C}^1([0, 1])$ sont respectivement munis des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$. →[32.2]

Pour toute fonction $f \in E$ et tout $x \in [0, 1]$, on pose

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad U(f)(x) = \int_0^x tf(t) dt.$$

Les applications linéaires T et U sont continues de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(F, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1})$, $\|T\| = 2$ et $\|U\| = 3/2$. →[45.5]

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

54. Exemples et contre-exemples

1. Exemple de partie A telle que la distance $d(0_E, A)$ ne soit pas atteinte :

$$\forall y \in A, \quad d(0_E, y) > d(0_E, A).$$

2. Exemple de suite divergente qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

3. Exemple de suite admettant une infinité de valeurs d'adhérence.

4. Exemple de suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'espace $\mathcal{C}^1([0, 1])$ qui converge vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$.

5. Exemples de normes d'algèbre sur $L_c(E)$; sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

55. Méthodes

1. Comment calculer la distance de l'origine à un cercle ? (On se place dans le plan euclidien canonique.)

2. Comment démontrer qu'une suite est divergente ?

3. Comment démontrer qu'une application linéaire est lipschitzienne ?

Approfondissement

56. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$f(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)}{k!}.$$

Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(X^n) \geq 2^{n-1}$$

la forme linéaire f n'est continue sur $\mathbb{R}[X]$ ni pour la norme de la convergence uniforme sur $[0, 1]$ [32.1] ni pour la norme de la convergence en moyenne sur $[0, 1]$ [32.3].

Pour aller plus loin

57. Questions pour réfléchir

1. Une norme N sur E est dite **euclidienne** lorsqu'il existe un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ tel que

$$\forall x \in E, \quad N(x) = \sqrt{(x | x)}.$$

1.a Comment savoir si une norme N est euclidienne ?

1.b Exemple de norme qui n'est pas euclidienne.

2. Soient N_1 et N_2 , deux normes sur E . Si une partie A de E est bornée pour N_1 , est-elle nécessairement bornée pour N_2 ?

3. Que dire de l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite de Cauchy ?

4. Si (E, N) est une algèbre normée, alors la multiplication interne $[(x, y) \mapsto xy]$ est continue de $E \times E$ dans E .

5. Suite de [40.5] – Et si \mathbb{R}^3 est muni d'une autre norme ?

6. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors $L_c(E) = L(E)$ quelle que soit la norme considérée sur E .

58. Constante de Lipschitz optimale

Soit $f : \Omega \rightarrow F$, une fonction lipschitzienne.

58.1 Il existe $k_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\{k \in \mathbb{R}_+ : f \in \mathcal{L}_k(\Omega, F)\} = [k_0, +\infty[.$$

58.2 \Leftrightarrow Si $f \in \mathcal{L}(\Omega, F)$, la constante de Lipschitz optimale de f est

$$\min\{k \in \mathbb{R}_+ : f \in \mathcal{L}_k(\Omega, F)\}.$$

58.3 Une fonction lipschitzienne est constante si, et seulement si, sa constante de Lipschitz optimale est nulle.

58.4 La constante de Lipschitz optimale des exemples [40.2], [40.3] et [40.4] est égale à 1.

58.5 On peut voir la constante de Lipschitz optimale comme une borne supérieure.

Soit $\Omega \subset E$. Pour tout $(x, y) \in \Delta = \Omega \times \Omega \setminus \{(x, x), x \in \Omega\}$, on pose

$$T(x, y) = \frac{\|f(x) - f(y)\|_F}{\|x - y\|_E}.$$

1. Une fonction $f : \Omega \rightarrow F$ est lipschitzienne si, et seulement si, la fonction T est bornée sur Δ . Dans ce cas, la constante de Lipschitz optimale de f est la borne supérieure de T sur Δ .

2. La fonction T atteint-elle un maximum ? \rightarrow [40.6]

3.a L'application qui, à toute application $f \in \mathcal{L}(\Omega, F)$, associe la constante de Lipschitz optimale de f est-elle une norme sur $\mathcal{L}(\Omega, F)$?

3.b Si $f \in L_c(E, F)$, alors $\|f\|$ est la constante de Lipschitz optimale de f .

59. Inégalités de Hölder et de Minkowski

Sur \mathbb{K}^d , on peut définir une famille de normes sur le modèle des trois normes fondamentales. De même, sur le modèle des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, on peut définir une famille de normes de convergence en moyenne sur des sous-espaces de $\mathcal{C}^0(I)$.

59.1 Normes sur \mathbb{K}^d

Pour tout réel $p > 1$ et tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

1. L'inégalité de Hölder [1.36] s'énonce sous la forme

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^d, \quad \sum_{i=1}^d |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

où p et q sont deux réels conjugués : $1/p + 1/q = 1$.

1.a Que devient l'inégalité de Hölder pour $p = 2$?

1.b Analogie de l'inégalité de Hölder pour la norme $\|\cdot\|_1$?

2. L'inégalité de Minkowski est une version de l'inégalité triangulaire.

2.a Quels que soient x et y dans \mathbb{K}^d , pour tout $1 \leq i \leq d$,

$$|x_i + y_i|^p \leq |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

2.b

$$\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p/q}$$

2.c L'application $[x \mapsto \|x\|_p]$ est une norme sur \mathbb{K}^d .

3. Soit $x \in \mathbb{K}^d$.

3.a Il existe un indice $1 \leq i \leq d$ tel que $|x_i|$ soit maximal. Cet indice est-il unique ?

3.b

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p.$$

59.2 Normes sur des espaces de suites

4. Pour tout $p > 1$, l'ensemble $\ell^p(\mathbb{K})$ des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_k^p$ soit absolument convergente est un sous-espace vectoriel de $\ell^1(\mathbb{K})$.

5. Si $u \in \ell^p(\mathbb{K})$ et $v \in \ell^q(\mathbb{K})$, alors la série $\sum u_k v_k$ est absolument convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

6. La norme naturelle sur $\ell^p(\mathbb{K})$ est définie par

$$\|u\|_p = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p \right)^{1/p}.$$

7. Pour toute suite sommable $u \in \ell^1(\mathbb{K})$,

$$\|u\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|u\|_p.$$

59.3 Normes sur $\mathcal{C}^0(I)$

Soit I , un intervalle de \mathbb{R} . Pour tout réel $p > 1$, on note $\mathcal{L}_c^p(I)$, l'ensemble des fonctions continues sur I telles que f^p soit intégrables sur I et on pose

$$\forall f \in \mathcal{L}_c^p(I), \quad \|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

On considère deux réels conjugués p et q .

8. Inégalité de Hölder.

Si $f \in \mathcal{L}_c^p(I)$ et $g \in \mathcal{L}_c^q(I)$, alors le produit fg est continu et intégrable sur I et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

9. Inégalité de Minkowski.

Si f et g appartiennent à $\mathcal{L}_c^p(I)$, alors $f + g \in \mathcal{L}_c^p(I)$ et

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

10. Pour tout $p > 1$, l'ensemble $\mathcal{L}_c^p(I)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathcal{L}_c^p(I)$.

11. On suppose que I est un intervalle borné.

11.a

$$\forall p > 1, \quad \mathcal{L}_c^\infty(I) \subset \mathcal{L}_c^p(I)$$

11.b Soient $f \in \mathcal{L}_c^\infty(I)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un intervalle ouvert non vide $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad \|f\|_\infty - \varepsilon \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty.$$

11.c

$$\forall f \in \mathcal{L}_c^\infty(I), \quad \|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p$$

60. Suite de [45.5] – Étudier le cas où la fonction φ est continue par morceaux et de signe quelconque sur $[0, 1]$.

Notion de norme subordonnée

61. Suite de [46.1] – Soit $f \in L_c(E)$.

$$\| \|f\| \| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E < 1} \|f(x)\|_F.$$

62. Suite de [46.3] – Soient u et v dans $L_c(E)$. Si

$$\| \|u \circ v\| \| = \| \|u\| \|^2 \quad \text{et} \quad \| \|v \circ u\| \| = \| \|v\| \|^2,$$

alors $\| \|v\| \| = \| \|u\| \|$.

63. L'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\| \|\cdot\| \|$ subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.

1.

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \| \|A\| \| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

2.

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \quad |\lambda| \leq \| \|A\| \|.$$

64. Soit $f \in L_c(E, F)$, telle que $\| \|f\| \| = \max_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$. Alors

$$\| \|f\| \| = \max_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \max_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

mais l'expression $\|f(x)\|_F$ n'atteint pas nécessairement un maximum sur la boule unité ouverte $\{ \|x\|_E < 1 \}$.

65. Soient E et F , deux espaces vectoriels normés. L'espace $L_c(E, F)$ est muni de la norme $\| \|\cdot\| \|$ subordonnée aux normes sur E et F . Si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications linéaires continues converge vers $f \in L_c(E, F)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \| \|f - f_n\| \| = 0$$

et si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs converge vers $x \in E$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \| \|x - x_n\| \|_E = 0$$

alors la suite $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x) \in F$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \| \|f(x) - f(x_n)\| \|_F = 0$$