5
Familles sommables

I
Ensembles dénombrables

I.1 Quelques axiomes de $\mathbb{N}$

1. Les propositions énoncés dans ce paragraphe sont des axiomes de $\mathbb{N}$ ou des théorèmes que nous admettrons — ce qui revient à les prendre pour axiomes.

2. Cardinal d'un ensemble fini
2.1 ➜ *Soient n et p, deux entiers naturels non nuls. S'il existe une bijection de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$, alors $n=p$.*
2.2 ✍ *Un ensemble E est **fini** lorsqu'il est vide ou qu'il existe un entier $n\geqslant 1$ et une bijection de $\{1,\dots,n\}$ sur E.*
2.3 ✍ *Le **cardinal** de l'ensemble vide $\varnothing$ est égal à 0.*
2.4 ✍ *S'il existe une bijection $\varphi : \{1,\dots,n\}\to E$, alors le **cardinal** de E est égal à n, ce qu'on note :*

$$\#(E)=n.$$

*La famille $(\varphi(1),\dots,\varphi(n))$ est une **énumération** de E.*

3. Une méthode classique pour établir l'égalité de deux ensembles E et F consiste à démontrer les deux inclusions

$$E\subset F \quad\text{et}\quad F\subset E.$$

Si les ensembles E et F sont *finis*, on peut substituer un argument de dénombrement à l'une des inclusions. →**[21]**
3.1 ➜ *Soient E et F, deux ensembles finis de même cardinal et φ, une application de E dans F.*
Les propositions suivantes sont équivalentes.
1. *L'application φ est une bijection.*
2. *L'application φ est injective.*
3. *L'application φ est surjective.*

3.2 ➜ *Soient E et F, deux ensembles finis de même cardinal.*
Les propositions suivantes sont équivalentes.
1. $E=F$
2. $E\subset F$
3. $F\subset E$

4. Énumération d'une partie de $\mathbb{N}$
Soit E, une partie non vide de $\mathbb{N}$.
4.1 ➜ **Axiome de bon ordre**
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
4.2 On pose $F_0=\varnothing$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que F_n soit une partie stricte de E :

$$F_n\subsetneq E$$

on pose :

$$x_{n+1}=\min(E\setminus F_n)\quad\text{et}\quad F_{n+1}=F_n\cup\{x_{n+1}\}.$$

4.3 Pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que F_n soit défini, l'ensemble F_n est une partie de E de cardinal n et $x_{n+1}\geqslant n$.
4.4 Si E est une partie finie de $\mathbb{N}$ dont le cardinal est égal à n, alors la famille

$$(x_1,\dots,x_n)$$

est une **énumération** strictement croissante de E.
4.5 Si E n'est pas finie, alors

$$E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$$

et l'application $[n\mapsto x_n]$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ sur E.
On dit que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une **énumération** de E.

I.2 L'infini dénombrable

5. ➜ *Si un ensemble E n'est pas fini, il existe une application injective de $\mathbb{N}$ dans E.*

6. Les ensembles dénombrables sont en quelque sorte les plus petits des ensembles infinis.
6.1 ✍ *Un ensemble E est **dénombrable** s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.*
6.2 Si E est dénombrable, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts tels que

$$E=\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **énumération** de E.
6.3 L'ensemble $\mathbb{N}$ et les parties infinies de $\mathbb{N}$ (famille des entiers pairs ; famille des entiers impairs ; famille des entiers premiers...) sont des ensembles dénombrables.
6.4 L'application

$$\left[n\mapsto(-1)^n\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\right]$$

est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$: l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est dénombrable.
6.5 ✍ *Un ensemble **non dénombrable** est un ensemble infini qui n'est pas dénombrable.*

7.1 ✍ *Une **famille dénombrable** est une famille indexée par un ensemble dénombrable.*
7.2 Toute famille dénombrable $(x_a)_{a\in I}$ peut être indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$ et considérée alors comme une suite :

$$(x_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

7.3 ✍ *Une **intersection dénombrable** de parties de E est l'intersection d'une famille dénombrable de parties de E.*

$$\bigcap_{a\in I}F_a=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_{a_n}\subset E$$

7.4 ✍ *Une **union dénombrable** de parties de E est l'union d'une famille dénombrable de parties de E.*

$$\bigcup_{a\in I}F_a=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_{a_n}\subset E$$

8.1 ✍ *Un ensemble E est **au plus dénombrable** lorsqu'il existe une bijection d'une partie de $\mathbb{N}$ sur E.*
8.2 Un ensemble est au plus dénombrable si, et seulement si, il est fini ou dénombrable.
8.3 ➜ *S'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$, alors l'ensemble E est au plus dénombrable.*
8.4 ➜ **Axiome du choix**
S'il existe une surjection de E_1 sur E_2, alors il existe une bijection d'une partie E_0 de E_1 sur E_2.
8.5 ➜ *S'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur E, alors l'ensemble E est au plus dénombrable.*
8.6 ➜ *Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.*

I.3 Opérations sur les ensembles dénombrables

9. Produit d'ensembles dénombrables
On sait que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles finis est encore un ensemble fini.
9.1 Le produit cartésien d'un ensemble fini non vide et d'un ensemble dénombrable est un ensemble dénombrable.

9.2 Quels que soient les entiers $0 \leqslant p \leqslant n$, on pose

$$\varphi\Big(\frac{n(n+1)}{2} + p\Big) = (p, n-p).$$

L'application φ ainsi définie est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$.

9.3 ➜ *Pour tout entier $d \geqslant 2$, l'ensemble $\mathbb{N}^d$ est dénombrable.*

9.4 On suppose que les ensembles E_1, ..., E_d sont dénombrables et, pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, on note φ_k, une bijection de $\mathbb{N}$ sur E_k. Alors l'application φ définie par

$$\forall\ (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d, \quad \varphi(n_1, \dots, n_d) = \big(\varphi_1(n_1), \dots, \varphi_d(n_d)\big)$$

est une bijection de $\mathbb{N}^d$ sur le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_d$.

9.5 ➜ *Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

9.6 ➜ *Un produit fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.*

10. Unions d'ensembles dénombrables

Soit $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une famille d'ensembles dénombrables. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note φ_k, une bijection de $\mathbb{N}$ sur E_k.

10.1 Pour tout $q \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leqslant r < d$, on pose

$$\varphi(qd + r) = \varphi_r(q).$$

Alors l'application φ est une surjection de $\mathbb{N}$ sur l'union finie $E_1 \cup \cdots \cup E_d$.

10.2 Quel que soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$\varphi(n,k) = \varphi_k(n).$$

Alors l'application φ est une surjection de $\mathbb{N}^2$ sur l'union dénombrable

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k.$$

10.3 ➜ *L'union d'une famille finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est un ensemble au plus dénombrable.*

11. Soit $f : E \to F$, une application.
L'**image** de f, notée $f_*(E)$, est définie par

$$f_*(E) = \big\{f(x),\ x \in E\big\} = \big\{y \in F\ :\ \exists\ x \in E,\ y = f(x)\big\}.$$

11.1 ➜ *Soit E, un ensemble au plus dénombrable. Pour toute application $f : E \to F$, l'ensemble $f_*(E)$ est au plus dénombrable.*

11.2 Si les ensembles E_1 et E_2 sont des parties au plus dénombrables de $\mathbb{C}$, alors les ensembles

$$E_1 + E_2 = \big\{x + y,\ (x,y) \in E_1 \times E_2\big\}$$

et

$$E_1 \cdot E_2 = \big\{xy,\ (x,y) \in E_1 \times E_2\big\}$$

sont des parties au plus dénombrables de $\mathbb{C}$.

I.4 Exemples et contre-exemples

Ensembles dénombrables

12. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ sont dénombrables.

13. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable.

$$\mathbb{Q} = \Big\{\frac{p}{q},\ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\Big\}.$$

14. L'ensemble $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à coefficients entiers et l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels sont dénombrables.

$$\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n[X] \qquad \mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$$

15. Un nombre complexe z est un **entier algébrique** lorsqu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ *non nul* tel que $P(z) = 0$.
L'ensemble des entiers algébriques est une partie dénombrable de $\mathbb{C}$.

16. Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une application surjective de $\mathbb{N}^n$ sur l'ensemble des parties à n éléments de $\mathbb{N}$.
L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Ensembles non dénombrables

17. Tout réel positif x admet un, et un seul, **développement décimal propre** : il existe une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'entiers compris entre 0 et 9 telle que

$$\exists\ N_0 \in \mathbb{Z}_-,\ \forall\ n \leqslant N_0, \quad d_n = 0$$

et que

$$\forall\ N \in \mathbb{Z},\ \exists\ n \geqslant N, \quad d_n \neq 9.$$

On peut déduire la **partie entière** et la **partie fractionnaire** de x par la relation :

$$x = \underbrace{\sum_{n=N_0}^{0} d_n 10^{-n}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n}}_{\in[0,1[}.$$

17.1 Procédé d'extraction diagonale

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite réelle.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $(d_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$, le développement décimal propre de x_k.
On pose $d_n = 0$ pour tout entier $n \leqslant 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,
– si $d_{n,n} \neq 0$, on pose $d_n = d_{n,n} - 1 \in \{0, 1, \dots, 8\}$;
– si $d_{n,n} = 0$, on pose $d_n = 1$.
La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un développement décimal propre et le réel

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n}$$

est différent de tous les termes de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

17.2 ➜ *L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrable.*

17.3 ➜ *L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes n'est pas dénombrable.*

17.4 Comme

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[,$$

l'intervalle $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

18. Produit infini d'ensembles

18.1 L'application

$$\Big[(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n 2^{-(n+1)}\Big]$$

(dite **représentation binaire**) est une surjection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur l'ensemble non dénombrable $[0,1]$.

18.2 * *Le produit cartésien d'une famille infinie d'ensembles de cardinal supérieur à 2 n'est pas dénombrable.*

19. Parties d'un ensemble

19.1 Indicatrice d'ensemble

L'application $[A \mapsto \mathbb{1}_A]$ est une surjection de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ sur l'ensemble non dénombrable $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

19.2 * *Si l'ensemble E est infini, alors l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E n'est pas dénombrable.*

Entraînement

20. Questions pour réfléchir

1. Pour quelles parties de $\mathbb{N}$ existe-t-il une énumération strictement décroissante ?
2. Représenter graphiquement l'énumération de $\mathbb{Z}$ donnée au **[6.4]**.
3. *Suite de* **[6.5]** – Un ensemble fini n'est ni dénombrable, ni non dénombrable.

4. *Suite de* **[6.2]** – Un ensemble ordonné dénombrable admet-il nécessairement une énumération croissante ?

5. S'il existe une surjection de E sur un ensemble non dénombrable F, alors E n'est pas dénombrable.

6. Le produit d'un nombre fini d'ensembles finis est fini. Quel est son cardinal ?

7. Représenter graphiquement l'énumération de $\mathbb{N}^2$ donnée au **[9.2]**.

8. L'union d'une famille finie $(E_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ d'ensembles finis est un ensemble fini et

$$\max_{1\leqslant k\leqslant d} \#(E_k) \leqslant \#(E_1 \cup \cdots \cup E_d) \leqslant \sum_{k=1}^{d} \#(E_k).$$

Étudier les cas d'égalité dans cet encadrement.

9. L'union d'une famille dénombrable d'ensembles finis peut-elle être un ensemble fini ?

10. On suppose que $E = F \cup G$, où F est dénombrable et E n'est pas dénombrable. Alors G n'est pas dénombrable.

11. L'ensemble $X^\star$ des mots (finis) écrits sur un alphabet fini X est dénombrable.

21. Ensembles équipotents
Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** lorsqu'il existe une bijection de E sur F.

21.1 La relation d'équipotence est une relation d'équivalence sur les ensembles.

21.2 Deux ensembles finis sont équipotents si, et seulement si, ils ont même cardinal.

21.3 L'ensemble F des entiers pairs est contenu dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Ces deux ensembles sont équipotents sans être égaux.

22. Bon ordre
Une relation de **bon ordre** sur un ensemble E est une relation d'ordre pour laquelle toute partie non vide de E admet un plus petit élément.

22.1 Une relation de bon ordre est une relation d'ordre total.

22.2 La relation $\leqslant$ n'est une relation de bon ordre ni pour $\mathbb{Z}$, ni pour $\mathbb{Q}_+$.

22.3 *Suite de* **[6.2]** – Tout ensemble dénombrable (comme $\mathbb{Z}$ ou comme $\mathbb{Q}_+$) peut être muni d'une relation de bon ordre.

II

Familles sommables

23. On cherche une condition suffisante pour définir la somme d'une famille complexe comptant une infinité de termes. La notion de **série convergente** a résolu ce problème dans le cas (très) particulier d'une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$.

24. Soit $(u_k)_{k\in I}$, une famille de nombres complexes indexée par un ensemble quelconque I. (On ne suppose pas que l'ensemble I est ordonné.)
On note $\mathfrak{P}_0(I)$, l'ensemble des parties *finies* de I et, pour toute partie *finie* $J \in \mathfrak{P}_0(I)$, on note

$$s(J) = \sum_{k\in J} |u_k| \in \mathbb{R}_+.$$

24.1 ✍ *Une famille $(u_k)_{k\in I}$ de nombres complexes est dite* ***sommable*** *lorsque l'ensemble*

$$\big\{s(J),\ J \in \mathfrak{P}_0(I)\big\}$$

est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

24.2 ➜ *La famille $(u_k)_{k\in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(|u_k|)_{k\in I}$ est sommable.*

24.3 ➜ *Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$ de l'ensemble des indices, la famille $(u_k)_{k\in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(u_{\sigma(k)})_{k\in I}$ est sommable.* →**[29.5]**

25. Support d'une famille sommable
Soit $(u_k)_{k\in I}$, une famille sommable.

25.1 Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $I_\varepsilon = \{k \in I \,:\, |u_k| \geqslant \varepsilon\}$ est fini.

25.2 L'ensemble $\{k \in I \,:\, u_k \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

26. Théorèmes de comparaison
Les résultats suivants sont fréquemment utilisés pour démontrer qu'une famille est sommable.

26.1 ➜ *Si $(u_k)_{k\in I}$ est une famille sommable, alors $(u_k)_{k\in I_0}$ est une famille sommable pour toute partie $I_0 \subset I$.*

26.2 ➜ *Si $(u_k)_{k\in I}$ est une famille sommable et si*

$$\forall\, k \in I, \quad |v_k| \leqslant |u_k|,$$

alors la famille $(v_k)_{k\in I}$ est une famille sommable.

26.3 ➜ *Si $(u_k)_{k\in I}$ et $(v_k)_{k\in I}$ sont deux familles sommables, alors la famille $(\lambda u_k + v_k)_{k\in I}$ est sommable quel que soit le scalaire λ.*

II.1 Somme d'une famille sommable

27. Somme d'une famille de réels positifs
La notion de famille sommable est au cœur de la théorie des probabilités discrètes. Le cas des familles de réels positifs est donc un cas particulier essentiel.

27.1 ✍ *Soit $(u_k)_{k\in I}$, une famille sommable de* réels positifs.
Si cette famille est sommable, sa ***somme*** *est définie par*

$$\sum_{k\in I} u_k = \sup\Big\{\sum_{k\in F} u_k,\ F \in \mathfrak{P}_0(I)\Big\} \in \mathbb{R}_+.$$

Si cette famille n'est pas sommable, on convient de poser

$$\sum_{k\in I} u_k = +\infty.$$

27.2 On note parfois

$$\sum_{k\in I} u_k < +\infty$$

le fait que la famille de *réels positifs* $(u_k)_{k\in I}$ soit sommable.

27.3 Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$,

$$\sum_{k\in I} u_{\sigma(k)} = \sum_{k\in I} u_k.$$

28. Somme d'une famille réelle
La **partie positive** et la **partie négative** d'un réel x sont définies par

$$x^+ - x^- = x \qquad \text{et} \qquad x^+ + x^- = |x|.$$

28.1 Une famille réelle $(u_k)_{k\in I}$ est sommable si, et seulement si, les deux familles de réels positifs $(u_k^+)_{k\in I}$ et $(u_k^-)_{k\in I}$ sont sommables.

28.2 ✍ *La* ***somme*** *d'une famille réelle sommable $(u_k)_{k\in I}$ est définie par*

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} u_k^+ - \sum_{k\in I} u_k^-.$$

28.3 Si la famille $(u_k)_{k\in I}$ est sommable, alors

$$\sum_{k\in I} u_{\sigma(k)} = \sum_{k\in I} u_k$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$.

29. Somme d'une famille complexe
Soit $(u_k)_{k\in I}$, une famille complexe sommable.

29.1 On note parfois

$$\sum_{k\in I} |u_k| < +\infty$$

le fait que la famille complexe $(u_k)_{k\in I}$ soit sommable. →**[27.2]**

29.2 Les deux familles réelles $(\mathfrak{Re}(u_k))_{k\in I}$ et $(\mathfrak{Im}(u_k))_{k\in I}$ sont sommables.

29.3 ✍ *La* **somme** *d'une famille complexe $(u_k)_{k\in I}$ sommable est définie par*

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \mathfrak{Re}(u_k) + i \sum_{k\in I} \mathfrak{Im}(u_k).$$

29.4

$$\mathfrak{Re}\Big(\sum_{k\in I} u_k\Big) = \sum_{k\in I} \mathfrak{Re}(u_k) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}\Big(\sum_{k\in I} u_k\Big) = \sum_{k\in I} \mathfrak{Im}(u_k)$$

29.5 ➔ *Suite de* **[24.3]** – *Si $(u_k)_{k\in I}$ est une famille sommable, alors*

$$\sum_{k\in I} u_{\sigma(k)} = \sum_{k\in I} u_k$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$.

II.2 Propriétés de la somme

30. La somme d'une famille sommable est ainsi définie en trois étapes. Les propriétés de la somme sont établies de même : d'abord en se restreignant aux familles de réels positifs, puis en passant aux familles réelles et enfin en considérant les familles de nombres complexes. →**[31.1]**, **[32]**, **[36]**, **[37]**, **[38]**

31. Comparaison avec les séries absolument convergentes
La **somme** d'une série convergente $\sum u_n$ est définie par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k.$$

31.1 ➔ *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ est absolument convergente et dans ce cas,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

31.2 ➔ *Si la série complexe $\sum u_n$ est absolument convergente, alors, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}.$$

32. ➔ **Inégalité triangulaire**
Si $(u_k)_{k\in I}$ est une famille sommable, alors

$$\Big|\sum_{k\in I} u_k\Big| \leqslant \sum_{k\in I} |u_k|.$$

Positivité de la somme

33. ➔ *Soit $(u_k)_{k\in I}$, une famille de réels positifs, sommable ou non. Pour toute partie $I_0 \subset I$,*

$$0 \leqslant \sum_{k\in I_0} u_k \leqslant \sum_{k\in I} u_k.$$

34. ➔ *Soient $(u_k)_{k\in I}$ et $(v_k)_{k\in I}$, deux familles sommables de réels. Si $u_k \leqslant v_k$ pour tout $k \in I$, alors*

$$\sum_{k\in I} u_k \leqslant \sum_{k\in I} v_k.$$

Additivité de la somme

35. Si la partie $F \subset I$ est l'union de deux parties finies disjointes :

$$F = F_1 \sqcup F_2,$$

alors

$$\sum_{k\in F} u_k = \sum_{k\in F_1} u_k + \sum_{k\in F_2} u_k.$$

36. ➔ *Soit $(u_k)_{k\in I}$, une famille sommable. On suppose que l'ensemble des indices est l'union de deux parties disjointes : $I = I_1 \sqcup I_2$. Alors* →**[71]**

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I_1} u_k + \sum_{k\in I_2} u_k.$$

Linéarité de la somme

37. ➔ *Soient $(u_k)_{k\in I}$, une famille sommable et λ, un scalaire. Alors la famille $(\lambda u_k)_{k\in I}$ est sommable et*

$$\sum_{k\in I} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k\in I} u_k.$$

38. ➔ *Soient $(u_k)_{k\in I}$ et $(v_k)_{k\in I}$, deux familles sommables. Alors la famille $(u_k + v_k)_{k\in I}$ est sommable et* →**[72]**

$$\sum_{k\in I} (u_k + v_k) = \sum_{k\in I} u_k + \sum_{k\in I} v_k.$$

Entraînement

39. Questions pour réfléchir

1. Ici, l'ensemble d'indices I est égal à $\mathbb{N}^2$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1.a La famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

1.b Il existe un réel M tel que

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{N} |u_{n,p}| \leqslant M.$$

1.c Il existe un réel M tel que

$$\forall\, (N, P) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{P} |u_{n,p}| \leqslant M.$$

2. Si les deux familles réelles $(\mathfrak{Re}(u_k))_{k\in I}$ et $(\mathfrak{Im}(u_k))_{k\in I}$ sont sommables, alors la famille complexe $(u_k)_{k\in I}$ est sommable.

3. La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{-n}$ sont absolument convergentes.

4. *Suite de* **[36]** – Les parties I_1 et I_2 sont au plus dénombrables.

5. L'additivité **[36]** est une conséquence de la linéarité **[38]**.

III

Sommation par paquets

40. La **sommation par paquets** est un principe connu de tous les commerçants : on peut calculer la somme d'un nombre fini de termes en fractionnant l'ensemble des termes, le total étant la somme des sous-totaux.

40.1 Pour calculer la somme des coefficients d'une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut calculer d'abord la somme des coefficients de chaque ligne et additionner les résultats obtenus :

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{p} m_{i,j}\Big)$$

ou calculer d'abord la somme des coefficients de chaque colonne et additionner les résultats obtenus :

$$\sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}\Big).$$

Le résultat final est le même dans les deux cas.

40.2 De même, si $\sum_i u_{i,j}$ est une série convergente pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, alors

$$\sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\Big) = \sum_{i=0}^{+\infty} \Big(\sum_{j=1}^{p} u_{i,j}\Big)$$

par linéarité de la somme.

40.3 Pour appliquer ce principe au calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète au moyen d'un **système complet d'événements** (c'est-à-dire en **conditionnant** par une autre variable aléatoire discrète), il faut étendre ces formules aux familles dénombrables.

41. ✍ *Une **partition** de I est une famille $(I_j)_{j\in J}$ de parties deux à deux disjointes de I dont l'union est égale à I :*

$$I = \bigsqcup_{j\in J} I_j.$$

42. ➜ **Premier théorème de Fubini**
Soit $(a_k)_{k\in I}$, une famille de réels positifs.
Étant donnée une partition $(I_j)_{j\in J}$ de I, on pose

$$\forall\, j \in J, \qquad \sigma_j = \sum_{k\in I_j} a_k \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

La famille $(a_k)_{k\in I}$ est sommable si, et seulement si,
1. *pour tout $j \in J$, la famille $(a_k)_{k\in I_j}$ est sommable*
2. *et la famille $(\sigma_j)_{j\in J}$ est sommable.*

Dans ce cas, →**[73]**

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{k\in I_j} a_k\Big).$$

43. ➜ **Second théorème de Fubini**
Soient $(u_k)_{k\in I}$, une famille complexe sommable et $(I_j)_{j\in J}$, une partition de I.
Pour tout $j \in J$, la famille $(u_k)_{k\in I_j}$ est sommable et →**[74]**

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{k\in I_j} u_k\Big).$$

44. **Méthode usuelle**
Pour appliquer le théorème **[43]**, on vérifie que la famille $(u_k)_{k\in I}$ est sommable en appliquant le théorème **[42]** à la famille de terme général $a_k = |u_k|$.

III.1 Application aux séries doubles

45. Une **série double** est une famille réelle ou complexe indexée par $I = \mathbb{N}^2$.
Dans ce cas, $J = \mathbb{N}$ et on considère en général la partition de I définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \big\{(m,n),\ m \in \mathbb{N}\big\}$$

ou par

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \quad I_m = \big\{(m,n),\ n \in \mathbb{N}\big\}.$$

46. Le premier théorème de Fubini donne une condition suffisante pour qu'une série double de réels *positifs* soit une famille sommable.

47. Si on peut appliquer le premier théorème de Fubini à la série double de terme général *positif*

$$a_{m,n} = |x_{m,n}|,$$

alors le second théorème de Fubini permet d'**intervertir l'ordre des sommations** :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{m=0}^{+\infty} x_{m,n}\Big) = \sum_{m=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n}\Big)$$

ce qui permet fréquemment de calculer explicitement la somme de la série double.

48. **Premier théorème de Fubini**
Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$, une famille de réels *positifs*. On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sigma_n = \sum_{m\in\mathbb{N}} a_{m,n} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

ainsi que

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \tau_m = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

48.1 ➜ *La famille positive $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si,*
1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_m a_{m,n}$ est convergente*
2. *et si la série $\sum \sigma_n$ est convergente.*

48.2 ➜ *La famille positive $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si,*
3. *pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n a_{m,n}$ est convergente*
4. *et si la série $\sum \tau_m$ est convergente.*

49. ➜ **Second théorème de Fubini**
Si la famille complexe $(x_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, alors :
1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_m x_{m,n}$ converge absolument ;*
2. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n x_{m,n}$ converge absolument ;*
3. *Les séries de termes généraux*

$$s_n = \sum_{m=0}^{+\infty} x_{m,n} \qquad \text{et} \qquad t_m = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n}$$

convergent absolument et
4. $$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n = \sum_{m=0}^{+\infty} t_m.$$

Exemples

50. La famille $\big(\frac{1}{k^\alpha}\mathbb{1}_{(k>n)}\big)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

51. Soient a et b, deux réels strictement positifs. La famille des réels

$$u_{p,q} = e^{-ap-bq}$$

où (p,q) parcourt $\mathbb{N}^2$ est sommable. Quelle est sa somme ?

52. Pour quelles valeurs de $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ la famille complexe

$$\Big(\frac{a^p b^q}{(p+q)!}\Big)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$$

est-elle sommable ?

53. Condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la famille

$$\Big(\frac{1}{(n+p+1)^\alpha}\Big)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$$

soit sommable.

54. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ les familles suivantes sont-elles sommables ?

$$\Big(\frac{z^p}{q!}\Big)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \qquad \Big(\frac{z^{pq}}{p!q!}\Big)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$$

III.2 Produit de Cauchy

55. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$, deux séries complexes. On pose

$$\forall\ (k,\ell)\in\mathbb{N}^2,\quad x_{k,\ell}=u_k v_\ell$$

et, outre les partitions de $I=\mathbb{N}^2$ vues au [**45**], on considère la partition définie par

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\quad I_n=\big\{(k,n-k),\ 0\leqslant k\leqslant n\big\}=[k+\ell=n].$$

55.1 Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la famille $(x_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

55.2 ✍ *Le **produit de Cauchy** des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général*

$$w_n=\sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}=\sum_{(k,\ell)\in I_n}x_{k,\ell}.$$

55.3 ➔ *Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ est une série absolument convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}w_n=\bigg(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\bigg)\bigg(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\bigg).$$

56. Séries de Poisson
Quel que soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, le produit de Cauchy de la série $\sum \lambda^n/n!$ par la série $\sum \mu^n/n!$ est la série $\sum (\lambda+\mu)^n/n!$. →[**4.94**]

57. Séries géométriques

57.1 Le produit de Cauchy de deux séries géométriques de raisons $q_1\neq q_2$ admet

$$\frac{q_1^{n+1}-q_2^{n+1}}{q_1-q_2}$$

pour terme général.

57.2 Le produit de Cauchy de deux séries géométriques de raison q admet

$$(n+1)q^n$$

pour terme général.

58. Pour tout $n\geqslant 1$, on pose

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

La série $\sum u_n$ est convergente, mais le produit de Cauchy de $\sum u_n$ par $\sum u_n$ est une série divergente. Commenter.

Entraînement

59. Soient $a>1$ et $b>1$. Pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on pose

$$u_{p,q}=\frac{1}{a^p+b^q}\quad\text{et}\quad v_{p,q}=\frac{1}{\sqrt{a^p b^q}}.$$

La famille $(v_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable [**55.1**], donc la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable [**1.30**].

60. *Suite de* [**57**] –

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}=\frac{9}{4}\qquad\sum_{n=0}^{+\infty}nq^n=\frac{q}{(1-q)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)q^n=\frac{2}{(1-q)^3}\qquad\sum_{n=0}^{+\infty}n^2q^n=\frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$$

61. *Suite de* [**4.57.3**] – Comparer les sommes

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}\quad\text{et}\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\substack{p=1\\ p\neq n}}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}$$

et commenter.

62. Pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on pose

$$a_{p,q}=\frac{2p+1}{p+q+2}-\frac{p}{p+q+1}-\frac{p+1}{p+q+3}.$$

Comparer les sommes

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty}a_{p,q}\Big)\quad\text{et}\quad\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{q=0}^{+\infty}a_{p,q}\Big)$$

et commenter le résultat.

63. Fonction ζ et constante d'Euler [4.48]

1. Nature des séries

$$\sum(\zeta(n)-1),\qquad\sum\frac{\zeta(n)-1}{n}\qquad\text{et}\qquad\sum\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n}.$$

2.

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\zeta(n)-1}{n}=1-\gamma\qquad\text{et}\qquad\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n}=\gamma$$

en admettant que

$$\forall\ -1<x<1,\quad\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}=-x-\ell\mathrm{n}(1-x).$$

64. Si $|a|<1$, la famille $(a^{n(2q+1)})_{(n,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{a^p}{1-a^{2p}}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}.$$

65. Soit $\sum p_k$, une série convergente de terme général positif. En posant

$$\forall\ (n,k)\in\mathbb{N}^2,\qquad u_{n,k}=p_k\mathbb{1}_{(1\leqslant n\leqslant k)},$$

les sommes

$$R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}p_k\qquad\text{et}\qquad S_k=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,k}$$

sont bien définies pour tout $n\geqslant 1$ et tout $k\in\mathbb{N}$. De plus, la série $\sum R_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum kp_k$ converge et, dans ce cas,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}R_n=\sum_{k=0}^{+\infty}kp_k.$$

66. On considère la famille réelle $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ de terme général

$$u_{p,q}=2^{-3q-p-(p+q)^2}$$

et la partition $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I définie par

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\quad I_n=\big\{(p,q)\in I\ :\ p+q=n\big\}.$$

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la sous-famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in I_n}$ est sommable et

$$\sum_{(p,q)\in I_n}u_{p,q}=\frac{4}{3}\big[2^{-n(n+1)}-2^{-(n+1)(n+2)}\big].$$

2. La famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et sa somme est égale à $4/3$.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

67. Questions pour réfléchir

1. Définir la notion de famille sommable dans un espace vectoriel normé. Quelles difficultés rencontre-t-on pour définir la somme d'une telle famille ?

2. Comparaison la propriété de la somme (pour les familles sommables) et de l'intégrale (pour les fonctions intégrables).

3. Reformuler le premier théorème de Fubini [**48**] dans le cas où la famille n'est pas sommable. Comparer avec [**2.22**].

4. Quelle formule le produit de Cauchy de deux séries évoque-t-il ? Commenter le théorème [**55.3**] de ce point de vue.

Approfondissement

68. On note ici $u * v$, le produit de Cauchy des familles sommables $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

68.1 L'opération $*$ est commutative et associative.

68.2 On se propose ici de démontrer le théorème [**55.3**] sans faire appel à la théorie des familles sommables.

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} \big|(u*v)_n\big| \leqslant \Big(\sum_{n=0}^{N}|u_n|\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^{N}|v_n|\Big).$$

2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{2N}(u*v)_n - \Big(\sum_{k=0}^{N}u_k\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{N}v_\ell\Big) = \sum_{k=0}^{N-1}\Big[u_k\sum_{\ell=N+1}^{2N-k}v_\ell\Big] + \sum_{\ell=0}^{N-1}\Big[v_\ell\sum_{k=N+1}^{2N-\ell}u_k\Big].$$

3. En déduire le théorème [**55.3**].

69. *Suite de* [**57**] – Comment calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}P(n)q^n$$

lorsque $|q| < 1$ et $P \in \mathbb{C}[X]$?

Pour aller plus loin

70. Théorème de Cantor-Bernstein

On démontre ici le théorème de Cantor-Bernstein : S'il existe une application injective d'un ensemble E dans un ensemble F et une application injective de F dans E, alors il existe une bijection de E sur F.

70.1 On considère une application injective u d'un ensemble E dans une partie B de E. On définit une suite de parties de E par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} = u_*(A_n)$$

avec $A_0 = E \cap B^c$ et on pose :

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

On définit une application v sur E en posant

$$\left|\begin{array}{ll} v(x) = u(x) & \text{si } x \in A,\\ v(x) = x & \text{si } x \in A^c.\end{array}\right.$$

1. Les parties A et A^c sont stables par v.
2. Les restrictions de v à A et à A^c sont injectives.
3. L'application v est une injection de E dans B.
4. Si $y \in A \cap B$, alors $y \notin A_0$.
5. L'application v est une bijection de E sur B.

70.2 On suppose qu'il existe deux applications injectives

$$f : E \to F \qquad \text{et} \qquad g : F \to E$$

et on pose $B = g_*(F) \subset E$.

6. L'application $u = g \circ f : E \to B$ est injective.
7. Il existe une bijection $h : F \to B$.
8. Il existe une bijection de E sur F.

71. Démonstration du théorème [36]

71.1 Les familles $(u_k)_{k\in I_1}$ et $(u_k)_{k\in I_2}$ sont sommables.

71.2 Cas d'une famille positive

On suppose que $u_k \in \mathbb{R}_+$ pour tout $k \in I$.

1. Si $J \subset I$ est une partie finie, alors $J = (J \cap I_1) \sqcup (J \cap I_2)$ et

$$\sum_{k\in J}u_k \leqslant \sum_{k\in I}u_k \leqslant \sum_{k\in I_1}u_k + \sum_{k\in I_2}u_k.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$.

2.a Il existe deux parties $J_1 \in \mathfrak{P}_0(I_1)$ et $J_2 \in \mathfrak{P}_0(I_2)$ telles que

$$\sum_{k\in J_1}u_k \geqslant \sum_{k\in I_1}u_k - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k\in J_2}u_k \geqslant \sum_{k\in I_2}u_k - \frac{\varepsilon}{2}.$$

2.b La partie $J = J_1 \sqcup J_2$ est finie et

$$\sum_{k\in I}u_k \geqslant \sum_{k\in J}u_k \geqslant \sum_{k\in I_1}u_k + \sum_{k\in I_2}u_k - \varepsilon.$$

71.3 Cas d'une famille réelle

On suppose que $u_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in I$. Alors

$$\sum_{k\in I}u_k^+ = \sum_{k\in I_1}u_k^+ + \sum_{k\in I_2}u_k^+ \quad \text{et} \quad \sum_{k\in I}u_k^- = \sum_{k\in I_1}u_k^- + \sum_{k\in I_2}u_k^-.$$

71.4 Cas d'une famille complexe

On suppose que $u_k \in \mathbb{C}$ pour tout $k \in I$. Alors

$$\begin{cases} \sum_{k\in I}\mathfrak{Re}(u_k) = \sum_{k\in I_1}\mathfrak{Re}(u_k) + \sum_{k\in I_2}\mathfrak{Re}(u_k),\\ \sum_{k\in I}\mathfrak{Im}(u_k) = \sum_{k\in I_1}\mathfrak{Im}(u_k) + \sum_{k\in I_2}\mathfrak{Im}(u_k).\end{cases}$$

72. Démonstration du théorème [38]

Soient $(u_k)_{k\in I}$ et $(v_k)_{k\in I}$, deux familles sommables de sommes respectives S_u et S_v. On sait [**26.3**] que la famille $(u_k + v_k)_{k\in I}$ est sommable.

1. Pour toute partie finie $J \in \mathfrak{P}_0(I)$,

$$\sum_{k\in J}(u_k + v_k) = \sum_{k\in J}u_k + \sum_{k\in J}v_k.$$

72.1 Cas d'une famille positive

On suppose que $u_k \in \mathbb{R}_+$ et $v_k \in \mathbb{R}_+$ pour tout $k \in I$.

2. Pour toute partie finie $J \subset I$,

$$\sum_{k\in J}(u_k + v_k) \leqslant \sum_{k\in J}(u_k + v_k) \leqslant S_u + S_v.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$.

3.a Il existe deux parties $J_1 \in \mathfrak{P}_0(I)$ et $J_2 \in \mathfrak{P}_0(I)$ telles que

$$\sum_{k\in J_1}u_k \geqslant \sum_{k\in I_1}u_k - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k\in J_2}u_k \geqslant \sum_{k\in I_2}u_k - \frac{\varepsilon}{2}.$$

3.b La partie $J = J_1 \cup J_2$ est finie et

$$\sum_{k\in J}(u_k + v_k) \geqslant \sum_{k\in J_1}u_k + \sum_{k\in J_2}v_k \geqslant S_u + S_v - \varepsilon.$$

72.2 Cas d'une famille réelle

On suppose que $u_k \in \mathbb{R}$ et $v_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in I$.

4. Les familles $(|u_k| + |v_k|)_{k\in I}$ et $(|u_k + v_k|)_{k\in I}$ sont sommables.

5. Pour tout $k \in I$,

$$\begin{cases} (u_k + v_k)^+ + \dfrac{|u_k| + |v_k|}{2} = \dfrac{|u_k + v_k|}{2} + u_k^+ + v_k^+\\[2mm] (u_k + v_k)^- + \dfrac{|u_k| + |v_k|}{2} = \dfrac{|u_k + v_k|}{2} + u_k^- + v_k^-\end{cases}$$

donc

$$\sum_{k\in I}(u_k+v_k)^+ - \sum_{k\in I}(u_k+v_k)^- = \sum_{k\in I}u_k^+ + \sum_{k\in I}v_k^+ - \sum_{k\in I}u_k^- - \sum_{k\in I}v_k^-.$$

72.3 Cas d'une famille complexe
On suppose que $u_k \in \mathbb{C}$ et $v_k \in \mathbb{C}$ pour tout $k \in I$. Alors

$$\begin{cases} \sum_{k\in I}\mathfrak{Re}(u_k+v_k) = \sum_{k\in I}\mathfrak{Re}(u_k) + \sum_{k\in I}\mathfrak{Re}(v_k), \\ \sum_{k\in I}\mathfrak{Im}(u_k+v_k) = \sum_{k\in I}\mathfrak{Im}(u_k) + \sum_{k\in I}\mathfrak{Im}(v_k). \end{cases}$$

73. Démonstration du théorème [42]
73.1 On suppose que la famille $(a_k)_{k\in I}$ n'est pas sommable, mais que les σ_j sont tous finis.
Pour tout M, il existe une partie finie $F_0 \in \mathfrak{P}_0(I)$ telle que

$$M \leqslant \sum_{k\in F_0} a_k,$$

et une partie finie $J_0 \in \mathfrak{P}_0(J)$ telle que $F_0 = \bigsqcup_{j\in J_0}(F_0\cap I_j)$, donc

$$M \leqslant \sum_{j\in J_0}\sigma_j.$$

73.2 On suppose que la famille $(a_k)_{k\in I}$ est sommable.
1. Pour tout $j \in J$, la somme σ_j est finie.
2. Pour toute partie finie $F \in \mathfrak{P}_0(J)$, l'ensemble $G = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ est une partie de I et

$$\sum_{j\in F}\sigma_j = \sum_{k\in G}u_k \leqslant \sum_{k\in I}u_k.$$

3. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $G \in \mathfrak{P}_0(I)$ telle que

$$\sum_{k\in G}u_k \geqslant \sum_{k\in I}u_k - \varepsilon$$

et une partie finie $F \in \mathfrak{P}_0(J)$ telle que $G \subset \bigsqcup_{j\in F} I_j$ de telle sorte que

$$\sum_{j\in F}\sigma_j \geqslant \sum_{k\in G}u_k.$$

74. Démonstration du théorème [43]
Pour tout $j \in J$, on pose

$$\sigma_j = \sum_{k\in I_j}|u_k| \qquad \text{et} \qquad s_j = \sum_{k\in I_j}u_k.$$

1. Pour tout $j \in J$, la somme σ_j est un réel positif et le complexe s_j est bien défini.
2. Si les u_k sont réels, alors les familles $(u_k^+)_{k\in I}$ et $(u_k^-)_{k\in I}$ vérifient les hypothèses du théorème [**42**], donc

$$\sum_{k\in I}u_k^+ = \sum_{j\in J}\sum_{k\in I_j}u_k^+ \quad \text{et} \quad \sum_{k\in I}u_k^- = \sum_{j\in J}\sum_{k\in I_j}u_k^-.$$

3. Si les u_k sont complexes, alors les familles $(\mathfrak{Re}(u_k))_{k\in I}$ et $(\mathfrak{Im}(u_k))_{k\in I}$ vérifient les hypothèses du théorème [**43**], donc

$$\sum_{k\in I}\mathfrak{Re}(u_k) = \sum_{j\in J}\sum_{k\in I_j}\mathfrak{Re}(u_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k\in I}\mathfrak{Im}(u_k) = \sum_{j\in J}\sum_{k\in I_j}\mathfrak{Im}(u_k).$$

75. Permutation des termes
On étudie l'effet d'une permutation des termes sur la nature d'une série. →[**31**]
75.1 Soient $\sum u_n$, une série absolument convergente, de somme S et σ, une permutation de $\mathbb{N}$.

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=0}^{N}|u_{\sigma(n)}| \leqslant \sum_{n=0}^{N'}|u_n|$$

et la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.
2. Soit $\varepsilon > 0$.
2.a Il existe un entier N_0 tel que

$$\sum_{n=N_0+1}^{+\infty}|u_n| \leqslant \varepsilon.$$

2.b Il existe un entier N_1 tel que $\sigma(n) > N_0$ pour tout $n > N_1$ et

$$\sum_{n=N_1+1}^{+\infty}|u_{\sigma(n)}| \leqslant \sum_{n=N_0+1}^{+\infty}|u_n|.$$

2.c

$$\Big|S - \sum_{n=0}^{N_1}u_{\sigma(n)}\Big| \leqslant \varepsilon$$

2.d La somme de $\sum u_{\sigma(n)}$ est égale à la somme de $\sum u_n$.
75.2 La série de terme général

$$v_n = \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{2n+1}$$

est divergente, donc la somme suivante, obtenue en permutant les termes de la série harmonique alternée,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{7} + \cdots$$

n'est pas définie.