Intégrales

1. On suppose connue l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment $[a,b]$ et on se propose d'étendre son domaine de définition.

I

Notion d'intégrale généralisée

2. Hypothèses et notations
On considèrera des fonctions à valeurs réelles ou complexes ($\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et continues par morceaux sur un intervalle I qui n'est pas nécessairement un segment.
La borne inférieure de l'intervalle I, notée a, est un réel ou $-\infty$; sa borne supérieure, notée b, est un réel ou $+\infty$. On supposera toujours que I n'est ni vide, ni réduit à un point : $a < b$.

3. Si la fonction f est continue sur morceaux sur l'intervalle I, alors elle est continue par morceaux sur chaque segment contenu dans I.

3.1 Quels que soient x et y dans I, on note

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[x,y]} f(t)\,\mathrm{d}t$$

si $x \leqslant y$ et

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{[y,x]} f(t)\,\mathrm{d}t$$

si $x \geqslant y$.

3.2 En particulier,

$$\forall\, x \in I, \quad \int_x^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

3.3 ✍ *On dit que l'intégrale de f sur I est **convergente** lorsque la limite*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

*existe (dans $\mathbb{K}$). Cette limite est appelée **intégrale généralisée de f sur** I, est notée*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. ➔ *Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I.*

4.1 *Pour tout $x \in I$, l'application*

$$\left[y \mapsto \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est continue sur I.

4.2 *Pour tout $y \in I$, l'application*

$$\left[x \mapsto \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est continue sur I.

5. Discussion sur l'intervalle d'intégration
L'intervalle d'intégration I peut être de quatre types.

5.1 Lorsque l'intervalle d'intégration est un segment :

$$I = [a,b],$$

le théorème **[4]** montre que la définition de l'intégrale généralisée coïncide avec la définition de l'intégrale sur un segment : l'intégrale généralisée converge et sa valeur est égale à l'intégrale sur le segment $[a,b]$.

5.2 Lorsque l'intervalle d'intégration est semi-ouvert :

$$I = [a,b[\qquad \text{ou} \qquad I =]a,b]\,,$$

le théorème **[4]** assure l'existence d'une des deux limites.

1. Si $I = [a,b[$, alors l'intégrale de f sur I est convergente si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

(calculée sur le segment $[a,y] \subset I$) admet une limite (finie) lorsque y tend vers b et, dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to b} \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Si $I =]a,b]$, alors l'intégrale de f sur I est convergente si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

(calculée sur le segment $[x,b] \subset I$) admet une limite (finie) lorsque x tend vers a et, dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5.3 C'est seulement dans le cas où l'intervalle d'intégration est ouvert : $I =]a,b[$ qu'il faut étudier la convergence de

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

(calculée sur le segment $[x,y] \subset I$) *à la fois* lorsque x tend vers a *et* lorsque y tend vers b.

5.4 Dans le cas où l'intervalle d'intégration I n'est pas ouvert (**[5.1]**, **[5.2]**), si l'intégrale de f sur I est convergente, alors l'intégrale de f sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ est aussi convergente et

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cela légitime l'usage de la notation

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

indépendamment de la nature de l'intervalle I et permet au besoin de supposer que l'intervalle d'intégration I est ouvert.

Entraînement

6. Questions pour réfléchir

1. La suite de terme général $u_n = \int_0^{n\pi} \sin t\,\mathrm{d}t$ est convergente. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
2. Si f est continue par morceaux sur I, on pose

$$\forall\, x_0, x \in I, \quad F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2.a La fonction F_{x_0} est continue sur I.
2.b Pour tout segment $[A,B] \subset I$, la fonction F_{x_0} est lipschitzienne sur $[A,B]$.
2.c Condition pour que F_{x_0} soit lipschitzienne sur I.

II

Propriétés fondamentales

7. Les propriétés de linéarité, d'additivité et de positivité sont établies par passage à la limite à partir d'intégrales sur un segment.

II.1 Linéarité

8. ➔ *Si les intégrales de f et de g sur I sont convergentes, alors l'intégrale de $\lambda f + g$ sur I est aussi convergente et*

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\quad \int_I (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Additivité

9. ➔ *Soit f, une fonction continue par morceaux sur $I =]a,b[$. Quel que soit $x_0 \in I$, l'intégrale de f sur I est convergente si, et seulement si, les intégrales de f sur $]a,x_0]$ et sur $[x_0,b[$ sont convergentes.*

10. On suppose que l'intégrale de f sur $I =]a,b[$ est convergente.

10.1 Pour tout sous-intervalle $J \subset I$, l'intégrale de f sur J est convergente et

$$\int_J f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \mathbb{1}_J(t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

10.2 ➔ **Relation de Chasles**
Quels que soient $a \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant b$,

$$\int_\alpha^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\beta^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t.$$

10.3

$$\lim_{x \to a} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

10.4

$$\lim_{x \to b} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

II.2 Généralisation du théorème fondamental

11. Si f est continue sur l'intervalle $I =]a,b[$, alors l'intégrale de f sur I est convergente si, et seulement si, les primitives de f ont une limite finie au voisinage de a et au voisinage de b.

12. On suppose que l'intégrale de f sur $I =]a,b[$ est convergente.

12.1 ➔ *Si la fonction f est continue sur I, alors l'application*

$$\left[x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est la primitive de f qui tend vers 0 au voisinage de a.

12.2 ▷ *Si f est continue sur I, alors l'application*

$$\left[x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est la primitive de $-f$ qui tend vers 0 au voisinage de b.

II.3 Positivité

13. L'intégrale est un opérateur **positif** au sens où les inégalités sont conservées par intégration.

14. ➔ *Si les intégrales de f et de g sur I sont convergentes et si*

$$\forall\, t \in I,\quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$$

alors

$$0 \leqslant \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$$

15. On suppose que f est positive sur I et que l'intégrale de f sur I est convergente.

15.1 Pour tout intervalle $J \subset I$,

$$\int_J f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

15.2 Quels que soient x et y dans I, l'intégrale

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

est du signe de $(y - x)$.

16. Cas d'égalité

16.1 Soit f, une fonction continue par morceaux sur un intervalle ouvert non vide $I =]a,b[$, dont l'intégrale sur I est convergente.
Si f est positive sur I et si l'intégrale de f sur I est nulle, alors les limites à gauche et à droite de f sont nulles en tout point :

$$\forall\, x \in]a,b[,\quad f(x+) = f(x-) = 0.$$

16.2 ➔ *Soit f, une fonction continue et positive sur un intervalle ouvert non vide $I =]a,b[$. On suppose que l'intégrale de f sur I est convergente. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

si, et seulement si, $f(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

II.4 Changement de variable avec un intégrande continu

17. La formule de changement de variable dans une intégrale repose sur la formule de dérivation des fonctions composées via le Théorème fondamental qui relie les primitives aux intégrales.
Pour cette raison, le théorème **[18]** se restreint aux intégrandes continus. →**[43.2]**

18. ➔ *Soient $f : I \to E$, une fonction continue sur I et $\varphi : [a,b] \to I$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Alors*

$$\int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\ \varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

19. En pratique
Le choix de la nouvelle variable

$$t = \varphi(u)$$

vise à simplifier l'expression de l'intégrale et conduit au nouvel élément différentiel

$$\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Le changement de variable modifie en général les bornes de l'intégrale : lorsque l'ancienne variable u tend vers a (resp. vers b), la nouvelle variable t tend vers $\varphi(a+)$ (resp. vers $\varphi(b-)$).

II.5 Intégration par parties

20. ➔ *Soient f et g, deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I =]a,b[$. On suppose que l'intégrale de $f'g$ sur I est convergente.
Alors l'intégrale de fg' sur I est convergente si, et seulement si, le produit fg admet des limites finies aux voisinages de a et de b.
Dans ce cas,*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

où on note

$$\big[f(t)g(t)\big]_a^b = \lim_{t \to b} f(t)g(t) - \lim_{t \to a} f(t)g(t).$$

21. En pratique
L'intégration par parties permet, par dérivation, de faire disparaître un facteur transcendant dont la dérivée est rationnelle (comme ℓn, Arctan...) et d'abaisser le degré d'un facteur polynomial. Elle peut ainsi servir à établir une relation de récurrence ou à calculer un équivalent. →**[68]**

Exemples d'intégrales généralisées

22.1
$$\forall\,\lambda > 0,\quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$
22.2
$$\forall\,\alpha > 1,\quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$
22.3
$$\forall\,\alpha < 1,\quad \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$
22.4
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi$$
22.5
$$\int_0^1 \ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t = -1$$
22.6
$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$$

23. Soit $n \geqslant 2$. L'application L définie par
$$\forall\,P\in\mathbb{R}_n[X],\ \forall\,x\in\mathbb{R},\quad L(P)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t\,\mathrm{d}t$$
est un endomorphisme non diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

III

Fonctions intégrables

24. La notion de **fonction intégrable** a pour but de justifier aussi simplement que possible l'existence d'une intégrale généralisée, notamment à l'aide de critères de comparaison **[35]**.

25. Soit f, une fonction continue par morceaux sur I.
25.1 La fonction $|f|$ est continue par morceaux sur I.
25.2 L'expression
$$\int_x^y \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$$
est une fonction croissante de y et décroissante de x.
25.3 ✍ *Une fonction f est **intégrable sur** I lorsqu'elle est continue par morceaux sur I et que l'intégrale de $|f|$ sur I est convergente.*
25.4 On dit parfois que l'intégrale de f sur I est **absolument convergente** pour signifier que f est intégrable sur I.
26. ✍ *Une fonction continue par morceaux f est **de carré intégrable sur** I lorsque la fonction $|f|^2$ est intégrable sur I.*
27. Cas des fonctions positives
Une fonction continue par morceaux et positive sur I est intégrable sur I si, et seulement si, son intégrale sur I est convergente.

Intégrale d'une fonction intégrable

28. ➔ *Soient f et g, deux fonctions continues par morceaux sur I, telles que*
$$\forall\,t\in I,\quad 0\leqslant \big|f(t)\big| \leqslant \big|g(t)\big|.$$
Si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.
29. Soit f, une fonction intégrable sur I.
29.1 Si f est une fonction à valeurs réelles, alors f^+ et f^- sont intégrables sur I.
29.2 Si f est une fonction à valeurs complexes, alors $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont intégrables sur I.
29.3 ➔ *Si f est intégrable sur I, alors l'intégrale de f sur I est convergente.*
30.1 Si l'intégrale de f sur I est convergente bien que f ne soit pas intégrable sur I, on dit que
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$$
est une **intégrale impropre**.
30.2 Dans la formule d'intégration par parties **[20]**, l'une des intégrales peut être impropre sans que l'autre le soit aussi. Cette formule est donc un moyen de prouver qu'une intégrale impropre est convergente. →**[48.5]**, **[37]**

Fonctions localement intégrables

31. Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I.
31.1 ✍ *La fonction f est **intégrable au voisinage de** a lorsqu'il existe un intervalle $]a,\alpha] \subset I$ sur lequel f est intégrable.*
31.2 ✍ *La fonction f est **intégrable au voisinage de** b lorsqu'il existe un intervalle $[\beta,b[\ \subset I$ sur lequel f est intégrable.*
32. En pratique
32.1 Une fonction continue par morceaux sur $I =]a,b[$ est intégrable sur I si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de a et au voisinage de b.
32.2 Une fonction continue par morceaux sur $I = [a,b[$ est intégrable sur I si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de b.
32.3 Une fonction continue par morceaux sur $I =]a,b]$ est intégrable sur I si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de a.

Fonctions intégrables de référence

33.1 Une fonction constante est intégrable sur tout intervalle borné.
33.2 La fonction
$$\left[t\mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right]$$
est intégrable au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.
33.3 La fonction
$$\left[t\mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right]$$
est intégrable au voisinage droit de 0 si, et seulement si, $\alpha < 1$.
33.4 *Suite de* **[44.2]** – Les fonctions
$$\left[t\mapsto \frac{1}{(t-t_0)^\alpha}\right]\quad\text{et}\quad\left[t\mapsto \frac{1}{(t_0-t)^\alpha}\right]$$
sont intégrables au voisinage de t_0 si, et seulement si, $\alpha < 1$.
33.5 La fonction $\ell\mathrm{n}$ est intégrable au voisinage de 0.
33.6 La fonction
$$\left[t\mapsto e^{-zt}\right]$$
est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $\mathfrak{Re}(z) > 0$.
33.7 Quel que soit le réel $\alpha > 0$, la fonction
$$\left[t\mapsto e^{-\alpha|t|}\right]$$
est intégrable sur $\mathbb{R}$. →**[45.1]**
33.8 La fonction continue
$$\left[t\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right]$$
est intégrable sur $]-1,1[$.

Critères pratiques d'intégrabilité

34. Cas d'un intervalle borné
34.1 Si I est un segment, toute fonction continue par morceaux sur I est intégrable sur I.
34.2 Si I est un intervalle borné, toute fonction continue par morceaux et bornée sur I est intégrable sur I.
En particulier, si f admet une limite *finie* aux bornes de I, alors f est intégrable sur I.

35. Théorèmes de comparaison
On applique les théorèmes suivants en comparant la fonction f à l'une des fonctions de référence [**33**].

35.1 ➔ *Soit f, une fonction continue par morceaux. S'il existe une fonction g intégrable au voisinage de t_0 telle que*

$$f(t) \underset{t\to t_0}{=} \mathcal{O}\big(g(t)\big),$$

alors f est intégrable au voisinage de t_0.

35.2 ➔ *Soient f et g, deux fonctions continues par morceaux telles que*

$$f(t) \underset{t\to t_0}{\sim} g(t).$$

Alors f est intégrable au voisinage de t_0 si, et seulement si, g est intégrable au voisinage de t_0.

35.3 En pratique
Selon la régularité de f, on applique ces théorèmes à une seule extrémité ([**32.2**], [**32.3**]) ou aux deux extrémités de l'intervalle d'intégration [**32.1**].

36. Exemples usuels de fonctions intégrables
Les fonctions suivantes peuvent aussi être considérées comme des fonctions de référence.

36.1 La fonction continue

$$\left[t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\right]$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

36.2 Soit $a \neq 0$. La fonction

$$[t \mapsto t^{x-1}e^{-at}]$$

est intégrable au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, $a > 0$ (quel que soit $x \in \mathbb{R}$) et sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$ et $a > 0$.

36.3 *Suite de* [**44.1**] – Quels que soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, la fonction

$$[t \mapsto e^{-(t-m)^2/\sigma^2}]$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

36.4 La fonction

$$[t \mapsto t^n e^{-xt^2}]$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$.

36.5 La fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\cos t - 1}{t^2}\right]$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$.

37. Exemples d'intégrales impropres

37.1 L'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

est convergente.

37.2 Les intégrales impropres

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

sont convergentes.

III.1 Opérations sur les fonctions intégrables

Produits

38. ➔ *Si la fonction f est intégrable sur I et si g est continue par morceaux et bornée sur I, alors le produit fg est intégrable sur I.*

39. ➔ **Inégalité de Schwarz**
Si f et g sont deux fonctions de carré intégrable sur I, alors le produit fg est intégrable sur I et

$$\int_I \big|f(t)g(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_I \big|f(t)\big|^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_I \big|g(t)\big|^2\,\mathrm{d}t}.$$

Combinaisons linéaires

40.1 ➔ *L'ensemble $\mathscr{L}^1(I)$ des fonctions intégrables sur I est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{C}^{0,m}(I)$ des fonctions continues par morceaux sur I.*

40.2 Si f est à valeurs réelles, alors f est intégrable sur I si, et seulement si, f^+ et f^- sont intégrables sur I.

40.3 Si f est à valeurs complexes, alors f est intégrable sur I si, et seulement si, $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont intégrables sur I.

40.4 ➔ *L'ensemble $\mathscr{L}^1_c(I)$ des fonctions continues et intégrables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^1(I)$.*

40.5 ➔ *L'ensemble $\mathscr{L}^2(I)$ des fonctions de carré intégrable sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^{0,m}(I)$.*

Inégalité de la moyenne

41.1 ➔ *Si f est intégrable sur I, alors*

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_I \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$$

41.2 Avec l'écriture usuelle des intégrales, l'inégalité de la moyenne s'écrit :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{]a\leftrightarrow b[} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

41.3 ➔ **Cas d'un intervalle borné**
Si f est continue par morceaux et bornée par M sur un intervalle I :

$$\forall\, t \in I, \quad \big|f(t)\big| \leqslant M$$

alors

$$\forall \alpha, \beta \in I, \quad \left|\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M|\beta - \alpha|.$$

42. Cas d'égalité

42.1 Soit $f : I \to \mathbb{C}$, une fonction intégrable sur I. Il existe $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \rho e^{i\theta} \quad \text{et que} \quad \left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_I \mathfrak{Re}\big[e^{-i\theta}f(t)\big]\,\mathrm{d}t.$$

42.2 ➔ *Si f est intégrable et continue sur un intervalle ouvert non vide I, alors*

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_I \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$$

si, et seulement si, l'argument de $f(x)$ est constant sur I :

$$\exists\, \theta \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in I, \quad f(t) = e^{i\theta}\big|f(t)\big|.$$

III.2 Changements de variable

43. Cas d'un intégrande continu par morceaux

43.1 Si φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone, alors $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ est continue par morceaux.

43.2 ➔ *Soient $f : I \to E$, une fonction continue par morceaux et $\varphi : J \to I$, une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de J sur I. Alors f est intégrable sur I si, et seulement si, $(f\circ\varphi)\varphi'$ est intégrable sur J et dans ce cas,*

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_J f\big(\varphi(u)\big)\ \big|\varphi'(u)\big|\,\mathrm{d}u.$$

43.3 En notant a et b, les bornes inférieure et supérieure de J (qu'elles soient finies ou infinies), la formule de changement de variable devient :

$$\int_{\varphi(a+)}^{\varphi(b-)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\ \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

que la fonction φ soit croissante ou décroissante.

43.4 Le théorème [**43.2**] est un moyen de démontrer qu'une fonction est (resp. n'est pas) intégrable sur un intervalle donné en se ramenant à une fonction dont l'intégrabilité (resp. la non-intégrabilité) est bien connue. →[**48.5**]

Changements de variable affines

44. Les changements de variable les plus simples sont les changements de variables affines :

$$u = \alpha t + \beta$$

avec $\alpha \neq 0$.
44.1 ➔ *Soit φ, un changement de variable affine réalisant une bijection de J sur I. Une fonction f est intégrable sur I si, et seulement si, $f \circ \varphi$ est intégrable sur J. Dans ce cas,*

$$\forall\, x, y \in J, \quad \int_x^y f(\alpha t + \beta)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha x+\beta}^{\alpha y+\beta} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

44.2 ➔ *La fonction $[t \mapsto f(t)]$ est intégrable au voisinage de $t = t_0$ si, et seulement si, la fonction $[h \mapsto f(t_0 + h)]$ est intégrable au voisinage de $h = 0$.*
44.3 La fonction $\ell\mathrm{n}(1+t)$ est intégrable sur $]-1, 1[$.
44.4 Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

45. Fonctions paires ou impaires
45.1 Si la fonction f est paire ou impaire, alors elle est intégrable au voisinage de $-\infty$ si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de $+\infty$.
45.2 Si f est paire et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

45.3 Si f est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

45.4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4} = 0$$

46. Moyenne d'une fonction périodique
Soit f, une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période T.
46.1

$$\forall\, a > 0, \quad \frac{a}{T}\int_0^{T/a} f(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

46.2 ✍ *La **moyenne** d'une fonction continue par morceaux et périodique f, de période T, est égale à*

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

46.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n = [t \mapsto f(nt)]$ est périodique et la moyenne de f_n est égale à la moyenne de f.

47. Autres exemples de changements de variable affines
47.1

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

47.2

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1-t+t^2} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$$

47.3

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{2}t+t^2} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$$

47.4 *Suite de* [**48.6**] –

$$\forall\, a > 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,\frac{\ell\mathrm{n}\, a}{a}.$$

47.5 La seule valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ pour laquelle l'intégrale

$$\int_0^a \frac{t^\alpha\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+a^3}}$$

est indépendante de $a \in \mathbb{R}_+^*$ est $\alpha = 1/2$. →[**48.8**]
47.6 Pour $a < b$,

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \pi$$

47.7 Pour tout $0 < a < 1$,

$$\int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-a)u+a}\,\sqrt{u(1-u)}}.$$

47.8 Une astuce
Si f est intégrable sur $]0, 1[$, alors $[x \mapsto xf(x)]$ est intégrable sur $]0, 1[$ et si $f(x) = f(1-x)$ pour tout $x \in]0, 1[$, alors

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

47.9 Intégrales d'Euler

$$\int_0^{\pi/2} \ell\mathrm{n}(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ell\mathrm{n}(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\,\ell\mathrm{n}\, 2$$

Autres changements de variable usuels

48. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction $[t \mapsto t^\alpha]$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $I =]0, +\infty[$ sur I, dont la réciproque est aussi une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de I sur I.
48.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

48.2 Pour tout $a > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} xe^{-ax}\,\mathrm{d}x.$$

48.3 *Suite de* [**47.2**] –

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

48.4 *Suite de* [**47.3**] –

1.
$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{\pi}{4}$$

2.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

48.5 Intégrales de Fresnel
Les intégrales impropres

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

sont convergentes [**37.2**], alors que les fonctions $\big[t \mapsto \cos(t^2)\big]$ et $\big[t \mapsto \sin(t^2)\big]$ ne sont pas intégrables sur $\mathbb{R}_+$. →[**83**]
48.6 Avec $\alpha = -1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

48.7 Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{-a})} = \frac{\pi}{4}.$$

48.8 *Suite de* **[47.5]** – Avec $\alpha = 3/2$,

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{t^3+1}} = \frac{2}{3}\,\ell n(1+\sqrt{2}).$$

49. La fonction cos réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $I_1 =]0,\pi[$ sur $I_0 =]-1,1[$ et la fonction sin réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $I_2 =]-\pi/2, \pi/2[$ sur I_0. Les deux bijections réciproques sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I_0.

49.1 Pour toute fonction f continue sur $[-1,1]$,

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\pi f(\cos t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin t)\,dt.$$

49.2 Pour tous $a < b$,

$$\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\,dx = \frac{\pi(b-a)^2}{8}.$$

50. *Suite de* **[67.1]** –

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ell n\, t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \ell n\, 2$$

Entraînement

51. Questions pour réfléchir

1. Si f est intégrable sur I, alors $\overline{f}$ est intégrable sur I.
2. *Suite de* **[33]** – Quelles sont, parmi les fonctions de référence, celles qui sont de carré intégrable ?
3. Une fonction constante est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?
4. La fonction $[x \mapsto 1/x]$ n'est intégrable ni sur l'intervalle $]0,1]$, ni sur l'intervalle $[1,+\infty[$.
5. Existe-t-il un réel a tel que la fonction $[x \mapsto 1/x^a]$ soit intégrable sur $]0,+\infty[$?

6.a Si f est continue par morceaux sur $[a,b[$, alors f est intégrable au voisinage de a.

6.b Si f est continue par morceaux sur $]a,b]$, alors f est intégrable au voisinage de b.

7. Si f est continue par morceaux sur un intervalle borné I et admet des limites finies en chacune des bornes de I, alors f est intégrable sur I.
8. Une fonction continue qui tend vers une limite $\ell \neq 0$ au voisinage de $+\infty$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.
9. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$.

9.a Si f est continue, alors toutes les primitives de f sont bornées sur $\mathbb{R}$.

9.b La réciproque est-elle vraie ?

9.c On suppose que, pour toute primitive F de f, il existe $x_F \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{x_F}^x f(t)\,dt.$$

La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

10. Si φ est lipschitzienne et nulle en 0 et si f est intégrable sur I, alors $\varphi \circ f$ est intégrable sur I.

11.a Si les hypothèses du théorème **[28]** sont vérifiées, alors on peut appliquer le théorème **[35.1]** au voisinage de a et au voisinage de b.

11.b Pourquoi le théorème **[35.1]** est-il plus utile en pratique ?

12. Si f est intégrable sur I et si J est un intervalle contenu dans I, alors le produit $\mathbb{1}_J f$ est intégrable sur I.
13. Si f et g sont intégrables sur I, alors les deux fonctions $\min\{f,g\}$ et $\max\{f,g\}$ sont intégrables sur I.
14. Condition sur I pour qu'une fonction intégrable soit aussi une fonction de carré intégrable ?
15. Condition sur I pour qu'une fonction de carré intégrable soit aussi une fonction intégrable ?
16. Condition pour que

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

17. *Suite de* **[41.3]** – Cas d'égalité ?
18. Soit $\varphi : I \to J$, une bijection strictement monotone.

18.a L'intervalle J est ouvert (resp. fermé) si, et seulement si, l'intervalle I est ouvert (resp. fermé).

18.b Exprimer les bornes de J en fonction des bornes de I.

19. *Suite de* **[49.2]** – Retrouver la valeur de l'intégrale sans aucun calcul.

52. Comparaison d'une somme et d'une intégrale

52.1 Si f est une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur un voisinage I de $+\infty$, alors elle est intégrable sur I si, et seulement si, la série $\sum f(n)$ est convergente.

52.2 En particulier, la série

$$\sum \frac{1}{n\,\ell n^\alpha\, n}$$

est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

53. Soient f, une fonction continue par morceaux et positive sur $I =]a,b[$ et $x_0 \in I$.

1. Si f n'est pas intégrable au voisinage de b, alors

$$\lim_{x\to b} \int_{x_0}^x f(t)\,dt = +\infty.$$

2. Si f n'est pas intégrable au voisinage de a, alors

$$\lim_{x\to a} \int_{x_0}^x f(t)\,dt = -\infty.$$

54. Condition sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{t-\sin t}{t^a}\right]$$

soit intégrable sur $]0,+\infty[$.

55. Intégrabilité de $\cos t/\sqrt{t}$ sur $]0,1]$, $[1,+\infty[$ et $]0,+\infty[$.

56. Intégrabilité de $\ell n^n t/t^m$ au voisinage de 0 ; de 1 et de $+\infty$ selon m et n.

57. Intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de

$$\frac{t^a}{1+t^b} \quad \text{et de} \quad \frac{t^a e^{-t}}{1+t^b}$$

en fonction des réels a et b.

58. La fonction $[t \mapsto e^{-(t+ix)^2}]$ est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

59. La fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}\right]$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $1 < \alpha < 2$. →**[37.1]**

60. Si la fonction f est intégrable sur l'intervalle I, on dit que l'intégrale $\int_I f(t)\,dt$ existe **au sens propre**. →**[30.1]**

Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ les intégrales suivantes existent-elles au sens propre ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t-1}\,dt \qquad \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1-x\cos t}\,dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$$

61. Soit f, une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$. Si φ et ψ sont deux fonctions positives, qui tendent vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$, alors l'intégrale

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$$

tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

62. Exemples d'intégrations par parties

62.1

$$\int_0^{+\infty} \ell n\Big(\frac{1+t^2}{t^2}\Big)\,dt = \pi$$

62.2

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k > 0, \qquad \int_0^{+\infty} t^n e^{-kt}\,dt = \frac{n!}{k^{n+1}}$$

62.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{\pi}{2}.$$

62.4 Quels que soient n et p dans $\mathbb{N}$,

$$\int_0^1 t^n\,\ell n^p\,t\,dt = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

63. *Suite de* **[48.4]** –

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^{3/2}}\,dt = \sqrt{2}\pi$$

64. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue qui tend vers ℓ_- au voisinage de $-\infty$ et vers ℓ_+ au voisinage de $+\infty$. Alors

$$\forall\, a > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+a) - f(t)\,dt = (\ell_+ - \ell_-)a.$$

S'agit-il d'une intégrale propre ou impropre ?

65. Pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos t\,dt = \frac{x}{1+x^2}, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

66.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} te^{ixt-(t^2/2)}\,dt = ix\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt-(t^2/2)}\,dt$$

IV

Intégrales et ordres de grandeur

67. Exploitation de la positivité

67.1 Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$e^{-2\varepsilon}\,\ell n\,2 \leqslant \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \leqslant e^{-\varepsilon}\,\ell n\,2$$

et lorsque a tend vers $+\infty$, →**[68.1]**

$$\int_a^{2a} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \Theta\Big(\frac{e^{-a}}{a}\Big).$$

67.2 Lorsque a tend vers $+\infty$,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{\pi}{a}.$$

67.3 Pour tout $n \geqslant 2$, lorsque x tend vers $+\infty$, →**[68.2]**

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{n-1}}\Big).$$

67.4 L'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}$$

est définie pour tout $x > 0$.

1. Au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

2. Au voisinage de 0,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} + \mathcal{O}(1)$$

donc $f(x) \sim -\,\ell n\,x$.

68. Par intégration par parties

68.1 Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \sim \frac{e^{-x}}{x}.$$

68.2 *Suite de* **[67.3]** – Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} - \frac{n+1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{n+2}}\,dt.$$

En particulier, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

68.3 Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\int_0^1 t^n \sin \pi t\,dt \sim \frac{\pi}{n^2}.$$

68.4 Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\sin xt\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Intégration des relations de comparaison

69. On approfondit l'analogie entre les intégrales et les séries avec les résultats suivants, qu'on comparera avec **[4.67]** dans le cas où la fonction de référence g est intégrable et avec **[4.70]** dans le cas contraire.

70. Cas intégrable

On considère une fonction de référence g, qu'on suppose positive et intégrable sur l'intervalle $I = [a,b[$.

70.1 Lorsque x tend vers b, l'intégrale

$$\int_x^b g(t)\,dt$$

est un infiniment petit.

70.2 Si f est continue par morceaux sur I et si $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ au voisinage de b, alors f est intégrable sur $[x,b[$ pour tout $x \in I$ et

$$F(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

tend vers 0 lorsque x tend vers b.

70.3 ➜ *Si $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ au voisinage de b, alors*

$$\int_x^b f(t)\,dt = \mathcal{O}\Big(\int_x^b g(t)\,dt\Big)$$

au voisinage de b.

70.4 → *Si $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de b, alors*

$$\int_x^b f(t)\,dt = o\Big(\int_x^b g(t)\,dt\Big)$$

au voisinage de b.

70.5 → *Si $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de b, alors*

$$\int_x^b f(t)\,dt \sim \int_x^b g(t)\,dt$$

au voisinage de b.

71. Cas non intégrable

Cette fois, la fonction de référence g est continue par morceaux et positive sur l'intervalle $I = [a, b[$, mais n'est plus intégrable sur I.

71.1 La fonction G définie par

$$\forall\, x \in I, \quad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

est croissante sur I et tend vers $+\infty$ au voisinage de b.

71.2 Soit f, une fonction continue par morceaux sur I. L'expression

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est définie pour tout $x \in I$.

71.3 → *Si $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ au voisinage de b, alors*

$$\int_a^x f(t)\,dt = \mathcal{O}\Big(\int_a^x g(t)\,dt\Big)$$

au voisinage de b.

71.4 → *Si $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de b, alors*

$$\int_a^x f(t)\,dt = o\Big(\int_a^x g(t)\,dt\Big)$$

au voisinage de b.

71.5 → *Si $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de b, alors f n'est pas intégrable sur I et*

$$\int_a^x f(t)\,dt \sim \int_a^x g(t)\,dt$$

au voisinage de b.

72. Exemples

72.1 Lorsque x tend vers 1,

$$\operatorname{Arccos} x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

72.2 Lorsque x tend vers 0,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt \sim \frac{1}{x}.$$

72.3 Pour tout $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

Alors $F(x) = o(e^{-x})$ au voisinage de $+\infty$ et $F(x) \sim -\ell n\, x$ au voisinage de 0. →[77]

72.4 Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,dt \sim \frac{\pi}{2}\,\ell n\, x.$$

Entraînement

73. Questions pour réfléchir

1. Sur quel intervalle l'intégration par parties

$$\int \frac{x^m}{\ell n^n x}\,dx = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)\,\ell n^{n-1} x} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m}{\ell n^{n-1} x}\,dx$$

est-elle légitime ?

74. *Suite de* **[72.3]** – La fonction F est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = 1$$

en intégrant par parties.

75. *Suite de* **[72.3]** – Au voisinage de $+\infty$,

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x}}{x^2}\Big).$$

76. *Suite de* **[72.3]** – Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t+x}\,dt.$$

Alors $f(x) = e^{x^2}F(x^2)$, donc $f(x) \sim -2e^{x^2}\,\ell n\, x$ au voisinage de 0 et

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big)$$

au voisinage de $+\infty$.

77. On considère la fonction h définie par

$$\forall\, x > 1, \quad h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x\,\ell n\, n}.$$

77.1 Pour tout $x > 1$ et tout $a \geqslant 2$,

$$\int_a^{+\infty} e^{-x\,\ell n\, t}\frac{dt}{\ell n\, t} = F\big((x-1)\,\ell n\, a\big).$$

77.2 *Suite de* **[75]** – On a $h(x) \sim -\ell n(x-1)$ au voisinage de 1 et

$$h(x) = \frac{1}{2^x\,\ell n\, 2} + \mathcal{O}(3^{-x})$$

au voisinage de $+\infty$.

78. Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

79. Comme

$$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leqslant \frac{1-t}{2}$$

alors

$$\operatorname{Arccos}(1-x) = \int_{1-x}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sqrt{2x} + \mathcal{O}(x\sqrt{x})$$

lorsque $x \to 0^+$.

80. Répartition asymptotique de la loi normale [68.2]

Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^5}\Big).$$

81. Approximation de la mesure de Dirac
Soit h, une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$.

1. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|h(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in [0,1]$.
2. Si h tend vers 0 au voisinage de 1, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^1 (n+1)t^n h(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon + M(1-\alpha)^{n+1}.$$

3. Si h est continue en 1, alors

$$n \int_0^1 t^n h(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(1).$$

82. Répartition asymptotique de la loi Γ
Pour tout $a > 0$, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \sim x^{a-1}e^{-x}$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x \int_x^{+\infty} \Big(\frac{t}{x}\Big)^{a-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{a-1}{x} + \frac{(a-1)(a-2)}{x^2} + \cdots + \frac{(a-1)\cdots(a-n)}{x^n} + o\Big(\frac{1}{x^n}\Big).$$

83. Vitesse de convergence des intégrales de Fresnel [48.5]
Pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2i}\int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{e^{ix^2}}{2ix}$$

et lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-e^{ix^2}}{2ix} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

84. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose : Par comparaison avec une integrale, on trouve un equivalent de

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,\ell\mathrm{n}\,k}.$$

84.1 Par comparaison avec une intégrale, la suite de terme général

$$u_n = S_n - \ell\mathrm{n}(\ell\mathrm{n}\,n)$$

est bornée.
84.2 La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge absolument et il existe une constante c telle que

$$S_n - \ell\mathrm{n}(\ell\mathrm{n}\,n) - c \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\,\ell\mathrm{n}^2\,k}$$

donc

$$S_n = \ell\mathrm{n}(\ell\mathrm{n}\,n) + c + \frac{1}{n\,\ell\mathrm{n}^2\,n} + o\Big(\frac{1}{n\,\ell\mathrm{n}^2\,n}\Big).$$

V

Les théorèmes lebesguiens

85. On considère ici des suites et des séries de fonctions, c'est-à-dire des suites et des séries dont les termes généraux dépendent d'un paramètre.

V.1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

86. Il y a plusieurs notions de convergence pour les suites de fonctions : convergence simple, convergence uniforme, convergence dominée, convergence normale... Il faut donc toujours prendre soin de répondre à deux questions :

Comment ? en précisant le *mode* de convergence : la série converge simplement, uniformément, normalement...

Où ? en précisant le *domaine* de convergence : sur tout l'intervalle I, sur tout segment contenu dans l'intervalle I, sur l'intervalle $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$...

Convergence simple

87. Convergence simple d'une suite de fonctions
87.1 ✍ *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies sur I, **converge simplement sur** I vers la fonction f lorsque*

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t).$$

*La fonction f est appelée la **limite simple** de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
87.2 La suite des fonctions $f_n = \big[t \mapsto e^{-nt}\sin(nt)\big]$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle.
87.3 La suite des fonctions $f_n = [t \mapsto t^n]$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction nulle. Cette suite converge simplement sur $[0,1]$, mais sa limite n'est pas continue sur $[0,1]$.
87.4 La suite des fonctions $f_n = \big[t \mapsto nte^{-nt}\big]$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle.

88. Convergence simple d'une série de fonctions
88.1 ✍ *Une série de fonctions $\sum u_n$, définies sur I, **converge simplement sur** I lorsque, pour tout $t \in I$, la série numérique $\sum u_n(t)$ converge.*
La fonction S définie sur I par

$$\forall\, t \in I, \quad S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

*est appelée la **somme** de la série de fonctions $\sum u_n$.*
88.2 Les séries de fonctions

$$\sum \frac{1}{n^t} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^t}$$

convergent simplement sur $]1,+\infty[$ et sur $]0,+\infty[$ respectivement.
88.3 La série de fonctions $\sum t^n$ converge simplement sur $[0,1[$ et sa somme est continue.
88.4 La série de fonctions $\sum e^{-nt}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme est continue.
88.5 La série de fonctions $\sum t^n\,\ell\mathrm{n}\,t$ converge simplement sur $]0,1]$ et sa somme est continue sur $]0,1[$.

Convergence dominée

89.1 ✍ *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers une fonction f. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **dominée sur** I lorsqu'il existe une fonction g intégrable sur I telle que*

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|f_n(t)\big| \leqslant g(t).$$

89.2 Méthode
Pour montrer que la convergence d'une suite de fonctions est dominée sur I, on vérifie d'abord que la suite de fonctions converge simplement sur I, puis on cherche un *majorant* de $\big|f_n(t)\big|$ sur I qui soit *indépendant* de $n \in \mathbb{N}$ et qui soit *intégrable sur* I en tant fonction de t.

90. ✍ *Soit $\sum u_n$, une série de fonctions qui converge simplement sur I. La convergence de la série $\sum u_n$ est* ***dominée sur*** *I lorsque la convergence de la suite des sommes partielles est dominée sur I.*

$$\exists\, g \in \mathscr{L}^1(I),\ \forall\, t \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\qquad \Big|\sum_{k=0}^{n} u_k(t)\Big| \leqslant g(t).$$

91. ➔ *Si la suite de fonctions continues par morceaux $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f et si la convergence est dominée sur I, alors les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I.*

92. Convergence en moyenne

92.1 ✍ *Soient $f \in \mathscr{L}^1(I)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions intégrables sur I. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge en moyenne sur*** *I* ***vers*** *f lorsque*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I \big|f(t) - f_n(t)\big| \,\mathrm{d}t = 0.$$

92.2 ✍ *Pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^1(I)$, on pose*

$$\|f\|_1 = \int_I \big|f(t)\big| \,\mathrm{d}t.$$

92.3 ➔ *Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne sur I vers f, alors*

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t).$$

93. Convergence en moyenne quadratique

93.1 ✍ *Soient $f \in \mathscr{L}^2(I)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions de carré intégrable sur I. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge en moyenne quadratique sur*** *I* ***vers*** *f lorsque*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I \big|f(t) - f_n(t)\big|^2 \,\mathrm{d}t = 0.$$

93.2 ✍ *Pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^2(I)$, on pose*

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_I \big|f(t)\big|^2 \,\mathrm{d}t}.$$

V.2 Théorème de convergence dominée

94. La conclusion du théorème de convergence dominée peut s'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ce théorème, que nous admettons, énonce donc une condition suffisante pour justifier un **passage à la limite sous le signe** $\int$.

94.1 ➔ *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions intégrables sur I qui converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Si la convergence est dominée sur I, alors f est intégrable sur I et*

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

94.2 ▷ *Sous les hypothèses du théorème* **[94.1]**, *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne sur I vers f.*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$$

95. Exemples d'application

95.1 Si g est une fonction intégrable sur $]0,1[$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

95.2

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 e^{-t^n + it^n}\,\mathrm{d}t = 1$$

95.3 La suite de terme général

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^{n+1}}$$

tend vers 0. →**[112]**

95.4 Si f est intégrable sur $[0,+\infty[$, alors

$$n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

95.5 Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\int_0^n \sqrt{1 + (1 - {}^t\!/_n)^n}\,\mathrm{d}t \sim n.$$

95.6 Si f est intégrable sur $]0,+\infty[$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} \int_0^{x_n} t f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$.

95.7 Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} {}^t\!/_n}{t + t^3}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\pi}{2n}.$$

95.8 Les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{t^{2n}+1}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n t\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

95.9 *Suite de* [**1.24.1**] –

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \Big(1 + \frac{t}{n}\Big)^n e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

95.10

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(1 + \frac{t^2}{n}\Big)^{-n}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

95.11 Limite continue par morceaux

Lorsque n tend vers $+\infty$, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n + e^t},\quad \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{t^{n+2}+1}\,\mathrm{d}t,\quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$$

tendent respectivement vers $1 - {}^1\!/_e$, ${}^\pi\!/_4$ et ${}^\pi\!/_4$.

95.12 Majorant défini par morceaux

La suite de terme général

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin nt}{nt + t^2}\,\mathrm{d}t$$

tend vers 0.

95.13 *Suite de* [**47.7**] –

$$\lim_{a\to 1} \int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$$

96. Théorème de convergence bornée

96.1 ➔ *On suppose que I est un intervalle borné. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions intégrables sur I qui converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f et s'il existe un réel M tel que*

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad \big|f_n(t)\big| \leqslant M$$

alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

96.2 Soient K, une fonction intégrable sur I et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues par morceaux sur I qui converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f. S'il existe un réel M tel que

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad \big|f_n(t)\big| \leqslant M$$

alors le produit fK est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)K(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)K(t)\,\mathrm{d}t.$$

96.3

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} \tan^n t\,\mathrm{d}t = 0$$

96.4

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{1-(-t)^N}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ell\mathrm{n}\, 2$$

96.5 La fonction

$$F = \left[x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right]$$

tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

96.6 La fonction

$$F = \left[x \mapsto \int_0^1 \frac{(t-1)t^x}{\ell\mathrm{n}\, t}\,\mathrm{d}t\right]$$

tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. →[**10.32**]

V.3 Théorème d'intégration terme à terme (version lebesguienne)

97. Si les fonctions $u_1, \dots, u_n$ sont intégrables sur I, alors

$$\int_I \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_I u_k(t)\,\mathrm{d}t$$

par [**8**]. Comme la conclusion du théorème [**98**] peut s'écrire

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

il faut retenir qu'il énonce une condition suffisante pour **intégrer terme à terme** la somme d'une famille *infinie* de fonctions intégrables. Nous admettrons ce théorème.

98. ➔ *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions intégrables sur I.*
On suppose que :
– la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I ;
– sa somme S est continue par morceaux sur I
– et la série de terme général $\int_I \big|u_n(t)\big|\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Dans ces conditions,
– la fonction S est intégrable sur I ;
– la série de terme général $\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument
– et sa somme est l'intégrale de S sur I.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I S(t)\,\mathrm{d}t$$

99. Exemples

99.1 *Suite de* [**62.2**] –

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{e^t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} te^{-kt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

99.2 *Suite de* [**62.4**] *et de* [**4.97**] –

1.

$$\int_0^1 \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 t^k\,\ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{-\pi^2}{6}$$

2.

$$\int_0^1 \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$$

3.

$$\int_0^1 \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-t^2)^n\,\ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

99.3

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{ke^k} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+e^t} = \ell\mathrm{n}\Big(1+\frac{1}{e}\Big)$$

99.4 D'après [**65**], pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}.$$

Comparaison des théorèmes lebesguiens

100. On considère une série $\sum u_n$ de fonctions intégrables sur l'intervalle I, qui converge simplement sur I et dont la somme S est continue par morceaux sur I.

100.1 Lorsque la série numérique

$$\sum \int_I \big|u_n(t)\big|\,\mathrm{d}t$$

est divergente, on ne peut appliquer le théorème [**98**] d'intégration terme à terme.

100.2 On peut cependant essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée [**94.1**] en cherchant un majorant de

$$\Big|\sum_{n=0}^{N} u_n(t)\Big|$$

qui soit à la fois indépendant de $N \in \mathbb{N}$ et intégrable comme fonction de $t \in I$.

100.3

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+e^t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^k t^k\,\mathrm{d}t = \ell\mathrm{n}\, 2$$

100.4

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+pk} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^p}.$$

100.5

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}\,\mathrm{d}t = \ell\mathrm{n}\,\frac{1}{2}$$

100.6

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n \sin \pi t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Entraînement

101. Questions pour réfléchir

1. La suite des fonctions $g_n = \left[t \mapsto ne^{-nt}\right]$ converge-t-elle simplement sur $[0, +\infty[$?

2. Soit $\sum u_n$, une série de fonctions qui converge simplement sur I.

2.a La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes est une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers la fonction nulle.

2.b Si la convergence de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée, la convergence de la série $\sum u_n$ est-elle dominée ?

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions intégrables sur I qui converge en moyenne sur I vers f et vers g. Comparer les fonctions f et g.

4. *Suite de* **[95]** – À quels exemples peut-on appliquer le théorème de convergence bornée ?

5. Soit $\sum u_n$, une série de fonctions positives et intégrables sur I, qui converge simplement sur I et dont la somme S est continue par morceaux sur I. La convergence de la série $\sum u_n$ est dominée sur I si, et seulement si, la série numérique

$$\sum \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente.

6. On peut déduire **[100.6]** de **[68.3]**. Commenter.

102. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^3+t^3}$$

est décroissante et positive sur $[0, +\infty[$. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

103. *Suite de* **[77]** – Par **[98]** et **[52.2]**, la fonction h est intégrable sur $]1, +\infty[$ et

$$\int_1^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,\ell\mathrm{n}^2\, n}.$$

104. Sommes de deux séries trigonométriques

Soit $t \in]0, 2\pi[$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \in [\pi \leftrightarrow t]$,

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} e^{iku}\Big| \leqslant \frac{1}{\sin(t/2)}.$$

2. Par **[96.4]**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{int}}{n} = -\,\ell\mathrm{n}\, 2 - i\int_\pi^t \frac{e^{iu}}{e^{iu}-1}\,\mathrm{d}u$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{n} = -\,\ell\mathrm{n}\Big(2\sin\frac{t}{2}\Big).$$

105. Approximation de la transformée de Laplace

Pour tout $n \geqslant 1$, on considère la fonction $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\quad u_n(t) = \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(t).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, n]$,

$$\big|u_n(t)\big| \leqslant [e^{-t/n}]^n = e^{-t}.$$

2. Si $\left[t \mapsto e^{-t}g(t)\right]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}g(t)\,\mathrm{d}t.$$

106. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue et bornée. On pose

$$\forall\, x > 0,\quad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, x > 0,\quad \big|F(x)\big| \leqslant Kx.$$

2. Si f tend vers 1 au voisinage de $+\infty$, alors $F(x) \sim x$ au voisinage de $+\infty$ et comme

$$\forall\, x > 0,\quad xg(x) = \int_0^{+\infty} xF\Big(\frac{u}{x}\Big)e^{-u}\,\mathrm{d}u,$$

alors $g(x) \sim 1/x$ au voisinage de 0.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

107. Exemples et contre-exemples

1. Pour tout intervalle I, l'indicatrice $\mathbb{1}_I$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $[x \mapsto \lfloor x \rfloor]$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

3. Exemple de fonction continue par morceaux sur un segment qui n'a ni maximum, ni minimum.

4. Exemple de fonction f, non continue par morceaux sur I, mais telle que $|f|$ soit continue par morceaux sur I.

5. Exemple de fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

6. Exemple de fonction continue et intégrable sur I qui n'est pas bornée sur I.

7. Exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$, qui tend vers 0 aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ mais qui n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

8. Exemple de fonction intégrable au voisinage de $+\infty$ mais qui ne tend pas vers 0 au voisinage de $+\infty$.

9. Exemple de deux fonctions intégrables sur I dont le produit n'est pas intégrable sur I.

10. Exemple de fonctions continues par morceaux f et g telles que $f + g$ soit intégrable, tandis que ni $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$, ni $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ n'existent (que ce soit au sens propre ou en tant qu'intégrales impropres convergentes).

11. Exemple de fonction non continue qui vérifie la condition de Dirichlet **[120]**.

12. Exemple de changement de variable $\varphi : J \to I$ et de fonction $f \in \mathscr{L}^1(I)$ tels que $f \circ \varphi$ ne soit pas intégrable sur J.

13. Exemple d'une suite de fonctions intégrables sur I qui converge simplement sur I vers la fonction nulle ω alors qu'elle ne converge pas en moyenne sur I vers ω.

14. Exemple d'une suite de fonctions intégrables sur I qui converge en moyenne sur I vers la fonction nulle ω alors qu'elle ne converge pas simplement sur I vers ω.

108. Méthodes

1. Comment démontrer qu'une fonction n'est pas intégrable sur un intervalle donné ?

2. Comment démontrer qu'une intégrale est strictement positive ?

3. Comment démontrer qu'une intégrale impropre est convergente ?

4. Soit $\sum u_n$, une série de fonctions qui converge simplement sur I. Comment s'assurer que la somme de cette série de fonctions est continue par morceaux sur I ?

109. Questions pour réfléchir

1. Comparer la notion de fonction intégrable avec la notion de série absolument convergente.

2. Une fonction continue, périodique et intégrable sur $\mathbb{R}$ est nulle.

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions intégrables sur I qui converge en moyenne vers une fonction intégrable f.

3.a La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement vers f ?

3.b Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, la convergence est-elle dominée ?

4. Soient f et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, des fonctions de $\mathscr{L}^1(I)\cap\mathscr{L}^2(I)$.

4.a Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne sur I vers f, converge-t-elle aussi en moyenne quadratique sur I vers f ?

4.b Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique sur I vers f, converge-t-elle aussi en moyenne sur I vers f ?

Approfondissement

110. *Suite de* [96.6] – Comme

$$\forall\ \varepsilon>0,\quad \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-u}-e^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u=\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u,$$

alors $F(1)=\ell n\,2$.

111. Un calcul d'équivalent
Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}.$$

1. La suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall\ n\geqslant 1,\quad I_{n+1}=\Big(1-\frac{1}{2n}\Big)I_n.$$

2. On en déduit que la série $\sum(\ell n\, I_{n+1}-\ell n\, I_n)$ est divergente et que $\ell n\, I_n\sim\ell n\, {}^1/_{\sqrt{n}}$.

3. On considère donc la suite de terme général $u_n=\sqrt{n}I_n$. Cette fois, la série $\sum(\ell n\, u_{n+1}-\ell n\, u_n)$ est absolument convergente, donc il existe une constante $K>0$ telle que

$$I_n\sim\frac{K}{\sqrt{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

112. *Suite de* [95.3] – Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$J_{n+1}=\frac{3n+2}{3n+3}J_n.$$

En posant $v_n=n^\alpha J_n$, la série $\sum(\ell n\, v_{n+1}-\ell n\, v_n)$ est absolument convergente si, et seulement si, $\alpha={}^1/_3$ et il existe $A>0$ tel que

$$J_n\sim\frac{A}{\sqrt[3]{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

113. On considère la fonction F définie sur $]-1,1[$ par

$$F(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}}.$$

1. La fonction F est paire et croissante sur $[0,1[$.

2. Pour tout $0<\alpha<1$,

$$\lim_{x\to 1}F(x)\geqslant\int_0^{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$$

donc F tend vers $+\infty$ au voisinage de 1. →[**2**.25.4]

3. Lorsque x tend vers 1,

$$F(x)\sim\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t)(1-x^2t)}}=\frac{1}{x}\,\ell n\,\frac{1+x}{1-x}\sim-\ell n(1-x).$$

114. Pour tout entier n, on pose

$$a_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant.

2. *Suite de* [**4.93**] –

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=\frac{n+1}{n+4}a_n.$$

3. La suite de terme général $(n+1)(n+2)(n+3)a_na_{n+1}$ est constante et

$$a_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

4.a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=\int_0^1\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}+1$$

4.b

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^na_n=\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-1$$

115. Sommes de Riemann
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall\ 0\leqslant k\leqslant n,\quad \alpha_k^n=a+\frac{k(b-a)}{n}.$$

Si f est continue sur $[a,b]$, alors la suite de fonctions en escalier f_n définies sur le segment $[a,b]$ par

$$f_n=\sum_{k=0}^{n-1}f(\alpha_k^n)\mathbb{1}_{[\alpha_k^n,\alpha_{k+1}^n[}$$

converge simplement sur $[a,b]$ vers f et la convergence est dominée, donc

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\Big(a+\frac{k(b-a)}{n}\Big).$$

Pour aller plus loin

116. Questions pour réfléchir

1. Une fonction croissante de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ n'a que des **discontinuités de première espèce** : elle admet une limite à gauche finie en tout point de $[a,b[$ et une limite à droite finie en tout point de $]a,b]$. Est-elle nécessairement continue par morceaux sur $[a,b]$?

2. Si f est continue par morceaux sur un intervalle ouvert I, alors l'ensemble des points de discontinuité est fini ou dénombrable.

3. *Suite de* [88] – Pour quelles séries de fonctions la convergence est-elle uniforme ?

4. *Suite de* [115] – Peut-on étendre le résultat aux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$?

5. *Suite de* [115] – Comment généraliser le résultat aux fonctions continues et intégrables sur $[0,+\infty[$?

117. Soit $I=]a,b[$, un intervalle ouvert borné. Si f est intégrable sur I, alors la fonction

$$\Big[(x,y)\mapsto\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\Big]$$

est continue sur $[a,b]\times[a,b]$.

118. Composition des fonctions continues par morceaux

1. La fonction f définie par $f(0) = 1$ et par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = |x|$$

est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. La fonction $g = [x \mapsto {}^1/_x]$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* = f_*(\mathbb{R})$. La composée $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$, mais pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2. Si f est continue par morceaux sur I et si g est continue sur l'adhérence de $f_*(I)$, alors $g \circ f$ est continue par morceaux sur I.

119. Intégrabilité et limite en $+\infty$

1. Soit f, de classe $\mathscr{C}^1$. Si f et f' sont intégrables au voisinage de $+\infty$, alors f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. Si une fonction est monotone et intégrable au voisinage de $+\infty$, alors elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

3. Une fonction uniformément continue et intégrable sur un voisinage de $+\infty$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

120. Condition de Dirichlet [16.1]

Une fonction f continue par morceaux sur l'intervalle ouvert I vérifie la **condition de Dirichlet** lorsque, en chaque point, elle est égale à la moyenne des ses limites à droite et à gauche :

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

120.1 Toute fonction continue sur I vérifie la condition de Dirichlet.

120.2 On suppose que f vérifie la condition de Dirichlet sur l'intervalle $]a, b[$.

1. Si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, alors l'ensemble $[f(x) > 0]$ est fini (éventuellement vide).

2. Si f est continue par morceaux sur $]a, b[$, l'ensemble $[f(x) > 0]$ est-il fini ? dénombrable ?

120.3 Si f est positive, intégrable et vérifie la condition de Dirichlet sur l'intervalle ouvert non vide $I =]a, b[$ et si

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in]a, b[$.

120.4 Le théorème [42.2] est vrai pour les fonctions intégrables qui vérifient la condition de Dirichlet.