

1. Étant donnée une fonction f des variables $x \in \Omega$ et $t \in I$ telle que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ soit intégrable sur I , on étudie les propriétés de la fonction

$$F = \left[x \mapsto \int_I f(x, t) dt \right]$$

et en particulier sa régularité (continuité, dérivabilité).

2. La parité, la monotonie, la convexité et la continuité de F peuvent parfois se déduire très simplement de f .

2.1 Si, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x, t)]$ est croissante (resp. décroissante), alors la fonction F est croissante (resp. décroissante).

2.2 Si, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x, t)]$ est convexe (resp. concave), alors la fonction F est convexe (resp. concave).

2.3 S'il existe une fonction g , intégrable sur I , et une constante K telles que

$$\forall (x, y, t) \in \Omega \times \Omega \times I, \quad |f(x, t) - f(y, t)| \leq K g(t) |x - y|,$$

alors F est lipschitzienne sur Ω .

3. Exemples

3.1 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1 + xt^2}$$

est décroissante, convexe et positive sur $] -1, +\infty[$.

3.2 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^x}$$

est décroissante, convexe et positive sur $]1, +\infty[$.

3.3 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x + t} dt$$

est décroissante, convexe et positive sur $]0, +\infty[$.

3.4 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1 + t^2} dt$$

est décroissante, convexe et bornée sur $[0, +\infty[$. Pour tout $a > 0$, la fonction F est lipschitzienne sur $[a, +\infty[$.

3.5 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1 + t^2)} dt$$

est impaire et lipschitzienne sur \mathbb{R} .

I

Rappels sur la continuité

4. \Rightarrow Une fonction est *continue sur un intervalle* (resp. *sur un ouvert*) lorsqu'elle est continue en chaque point de cet intervalle (resp. de cet ouvert).

I.1 Caractérisations séquentielles

5. On considère une fonction φ définie sur Ω , à valeurs dans un espace E .

5.1 \rightarrow La fonction φ est continue en $x_0 \in \Omega$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui converge vers x_0 , la suite $(\varphi(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

5.2 Par définition, une fonction ne peut être continue qu'en un point x_0 de son ensemble de définition.

En revanche, on peut étudier l'existence d'une limite pour φ au voisinage d'un point x_0 qui n'appartient pas à son ensemble de définition Ω .

5.3 \rightarrow La fonction φ tend vers une limite ℓ (appartenant à E ou infinie) au voisinage de x_0 si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui tend vers x_0 , la suite $(\varphi(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .

I.2 Du local au global

6. Topologie locale de \mathbb{R}^d

6.1 \rightarrow Soit Ω , un intervalle de \mathbb{R} . Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un segment $[A, B]$ tel que

$$x_0 \in [A, B] \subset \Omega.$$

6.2 \rightarrow Soit Ω , un ouvert de \mathbb{R}^d . Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe une boule fermée B_r de rayon $r > 0$ telle que

$$x_0 \in B_r \subset \Omega.$$

7. Méthodes

La définition [4] permet de parvenir à une *conclusion globale* par une *démonstration locale*.

7.1 Une fonction est continue sur un intervalle $\Omega \subset \mathbb{R}$ si, et seulement si, elle est continue sur tout segment $[A, B] \subset \Omega$.

7.2 Une fonction est continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ si, et seulement si, elle est continue sur toute boule fermée contenue dans Ω .

8. Exemples de mise en œuvre

8.1 Une fonction est continue sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, pour tout $B > 0$, elle est continue sur le segment $[0, B]$.

8.2 Une fonction est continue sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, quels que soient $0 < A < B$, elle est continue sur $[A, B]$.

8.3 Une fonction est continue sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, quel que soit $A > 0$, elle est continue sur $[A, +\infty[$.

8.4 Une fonction est continue sur \mathbb{R} si, et seulement si, quel que soit $A > 0$, elle est continue sur $[-A, A]$.

8.5 Une fonction est continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si, et seulement si, elle est continue sur tout pavé $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ contenu dans Ω .

9. Comme les fonctions dérivables sur un intervalle de \mathbb{R} et les fonctions de classe \mathcal{C}^k sur un ouvert de \mathbb{R}^d sont définies de manière analogue aux fonctions continues, on peut utiliser des méthodes analogues pour prouver qu'une fonction est dérivable sur un intervalle donné ou de classe \mathcal{C}^k sur un ouvert donné.

Entraînement**10. Questions pour réfléchir**

1. Suite de [1] –
 - 1.a Condition suffisante pour que F soit bornée sur Ω ?
 - 1.b Si la fonction f est bornée sur $\Omega \times I$, la fonction F est-elle bornée sur Ω ?
2. Suite de [3.4] – La fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $\pi/2$ au voisinage de 0.
3. Suite de [3.1] – La fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de $-\infty$. → [2.25.4]
4. Suite de [3.2] – La fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 1. → [2.25.4]
5. Suite de [3.3] – La fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 0. → [2.25.4]
6. Suite de [5.1] – Que dire de la limite de $(\varphi(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$?
7. Suite de [5.3] – Que conclure si φ admet une limite en un point $x_0 \in \Omega$? Cette limite peut-elle être infinie?
8. Suite de [5.3] – On suppose que, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui tend vers x_0 , la suite $(\varphi(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, la limite de $(\varphi(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne dépend pas de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la fonction φ admet une limite au voisinage de x_0 .

II**Intégrale fonction des bornes**

11. Soit f , une fonction intégrable sur l'intervalle ouvert I . Pour tout $x_0 \in I$, on considère la fonction F_{x_0} définie par

$$\forall x \in I, \quad F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

- 11.1 Si f est bornée sur I , alors F_{x_0} est lipschitzienne sur I .
- 11.2 La fonction F_{x_0} est continue sur I .
- 11.3 La fonction F_{x_0} est dérivable à gauche et à droite en tout point $x \in I$ et

$$(F_{x_0})'_g(x) = f(x^-), \quad (F_{x_0})'_d(x) = f(x^+).$$

11.4 → Théorème fondamental

Soient f , une fonction continue sur I et $x_0 \in I$. La fonction

$$F_{x_0} = \left[x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt \right]$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur I et est une primitive de f .

11.5 Soient $f \in \mathcal{C}^0(I)$; φ et ψ , de classe \mathcal{C}^1 de J dans I . La fonction

$$G = \left[x \mapsto \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right]$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur J et

$$\forall x \in J, \quad G'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

12. → Soit f , une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Si l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt$$

est convergente, alors la fonction G définie par

$$\forall x \geq a, \quad G(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ et $G' = -f$.

Entraînement**13. Questions pour réfléchir**

1. Étudier le signe et les variations de

$$G(x) = \int_x^{x^2} \ln t dt.$$

Calculer un équivalent de $G(x)$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

2. Suite de [11] – Si F_{x_0} est dérivable sur I , sa dérivée est-elle égale à f ?
3. Si une fonction F est dérivable mais pas de classe \mathcal{C}^1 , sa dérivée peut-elle être continue par morceaux?

III**Continuité**

14. Comme le théorème de convergence dominée [9.94.1], le théorème [15] donne une condition suffisante pour passer à la limite sous le signe \int : sa conclusion peut être écrite sous la forme suivante.

$$\forall x_0 \in \mathcal{V}, \quad \int_I \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) \right] dt = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\int_I f(x, t) dt \right]$$

15. → Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et I , un intervalle de \mathbb{R} . On considère une fonction f définie pour $(x, t) \in \Omega \times I$ et une partie \mathcal{V} de Ω telles que

15.1 Hypothèse de continuité

Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x, t)]$ est continue sur \mathcal{V} ;

15.2 Hypothèse d'intégrabilité

Pour tout $x \in \mathcal{V}$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur I ;

15.3 Hypothèse de domination

Il existe une fonction g , intégrable sur I , telle que

$$\forall t \in I, \forall x \in \mathcal{V}, \quad |f(x, t)| \leq g(t).$$

15.4 Conclusion

Alors la fonction

$$F = \left[x \mapsto \int_I f(x, t) dt \right]$$

est continue sur \mathcal{V} .

16. En pratique

Pour démontrer que la fonction F est continue sur Ω , il faut savoir bien choisir \mathcal{V} .

16.1 Il arrive qu'on puisse choisir $\mathcal{V} = \Omega$, mais souvent la continuité de F sur Ω est établie en appliquant le théorème [15] à des parties $\mathcal{V} \subset \Omega$ sur lesquelles l'hypothèse de domination [15.3] est vérifiée. → [7]

16.2 Pour vérifier cette hypothèse de domination, on cherche un majorant de $|f(x, t)|$ qui soit à la fois intégrable sur I (en tant que fonction de t) et indépendant de $x \in \mathcal{V}$.

16.3 Si l'intervalle d'intégration I est borné, il suffit que f soit bornée sur $\mathcal{V} \times I$:

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall t \in I, \forall x \in \mathcal{V}, \quad |f(x, t)| \leq M$$

pour vérifier l'hypothèse de domination [15.3].

16.4 Si l'intervalle d'intégration I est un segment, il suffit que f soit continue sur $\Omega \times I$ pour que les trois hypothèses du théorème [15] soient vérifiées pour tout compact $\mathcal{V} \subset \Omega$, ce qui montre que F est continue sur Ω .

17. Limite finie aux bornes de l'intervalle

Une variante du théorème [15] permet d'étudier une intégrale aux extrémités de son intervalle de définition.

17.1 → Soient $\Omega =]\alpha, \beta[$ et I , deux intervalles de \mathbb{R} . On considère une fonction f définie pour tout $(x, t) \in \Omega \times I$. On suppose que :

1. Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur I ;
2. Pour tout $t \in I$, l'expression $f(x, t)$ tend vers $\varphi(t)$ lorsque x tend vers α ;
3. La fonction $[t \mapsto \varphi(t)]$ est intégrable sur I ;
4. Il existe $\alpha_0 \in \Omega$ et une fonction g intégrable sur I telle que

$$\forall t \in I, \forall x \in]\alpha, \alpha_0], |f(x, t)| \leq g(t).$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \int_I f(x, t) dt = \int_I \varphi(t) dt.$$

17.2 Pour étudier la limite au voisinage de β , il suffit de vérifier l'hypothèse de domination au voisinage de β , c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $[\beta_0, \beta[$.

17.3 Ce théorème donne une condition suffisante pour qu'une intégrale fonction d'un paramètre ait une limite finie.

18. Exemples

18.1 Suite de [3.4] – La fonction F est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

18.2 Suite de [3.1] – La fonction F est continue sur $] -1, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

18.3 Suite de [3.2] – La fonction F est continue sur $]1, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

18.4 Suite de [3.3] – La fonction F est continue sur $]0, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Entraînement

19.1 Soient $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et h , continue et bornée sur \mathbb{R} . La fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)h(t) dt$$

est bornée et continue sur \mathbb{R} .

19.2 La fonction F définie par

$$\forall x \in [0, 1], F(x) = \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 - x \cos t} dt$$

est continue sur $[0, 1]$.

19.3 La fonction F définie par

$$\forall x \in [0, 1], F(x) = \int_0^\pi \frac{xt \sin t}{x^2 - 2x \cos t + 1} dt$$

est continue sur $[0, 1]$.

19.4 Soit g , intégrable sur $I =]0, 1[$. La fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^1 |g(t) - x| dt$$

est continue et convexe sur \mathbb{R} . Elle tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ et atteint un minimum sur \mathbb{R} .

19.5 Soit $0 < \alpha \leq 1/2$. La fonction F_α définie par

$$F_\alpha(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x dt}{t^\alpha(1+tx^2)}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$F_\alpha(x) \sim \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha}}.$$

Étudier la limite en 0 en distinguant le cas $\alpha = 1/2$.

19.6 Soit $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$. La fonction F définie par

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{z+t} dt$$

est continue sur \mathbb{C} privé de \mathbb{R}_- et tend vers 0 au voisinage de l'infini. Étudier la limite de F lorsque $z \in \mathbb{R}_+^*$ tend vers 0.

20. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt$$

est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 0. Plus précisément,

$$F(x) = \frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

lorsque x tend vers $+\infty$ et

$$F(x) = -\ln x + \mathcal{O}(1)$$

lorsque x tend vers 0 (d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange).

21. Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} dt.$$

Comme

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4 + u^4}} du,$$

alors $f(x) = \mathcal{O}(x^{-4})$ au voisinage de $+\infty$ et

$$f(x) \sim \frac{1}{x^2}$$

au voisinage de 0. Elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$, mais pas sur $]0, 1]$.

IV

Dérivation sous le signe \int

IV.1 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

22. Le théorème [23] donne une condition suffisante pour dériver sous le signe \int , puisqu'on peut comprendre sa conclusion sous la forme suivante.

$$\frac{d}{dx} \int_I f(x, t) dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Il s'agit ici encore de passer à la limite sous le signe \int , puisque l'égalité précédente peut être comprise sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \int_I \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} dt \\ &= \int_I \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} dt \end{aligned}$$

C'est pourquoi le théorème [23] est lui aussi une conséquence du théorème de convergence dominée [9.94.1].

23. → Soient Ω et I , deux intervalles de \mathbb{R} et f , une fonction définie pour tout $(x, t) \in \Omega \times I$. On suppose que :

23.1 Hypothèse de régularité

Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x, t)]$ est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω ;

23.2 Hypothèse d'intégrabilité

Pour tout $x \in \Omega$, les fonctions

$$[t \mapsto f(x, t)] \quad \text{et} \quad [t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)]$$

sont intégrables sur I ;

23.3 Hypothèse de domination

Il existe une fonction g , intégrable sur I , et un sous-intervalle \mathcal{V} de Ω tels que

$$\forall t \in I, \forall x \in \mathcal{V}, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t).$$

23.4 Conclusion

Alors la fonction F définie sur Ω par

$$F(x) = \int_I f(x, t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{V} et

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

24. En pratique

Comme pour le théorème de continuité [15], il s'agit de choisir \mathcal{V} de telle sorte que l'hypothèse de domination [23.3] soit vérifiée.

24.1 Si l'intervalle d'intégration I est borné, il suffit de démontrer que

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (x, t) \in \mathcal{V} \times I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq M.$$

24.2 Lorsque I est un segment, il suffit que f soit de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$ contenant $\Omega \times I$ pour que toutes les hypothèses du théorème [23] soient vérifiées pour tout segment $\mathcal{V} \subset \Omega$, ce qui montre que F est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .

25. Exemples

25.1 Suite de [19.2] – La fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$.

25.2 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+ix)^2} dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Que dire de F ?

→[47]

25.3 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} t} \operatorname{ch} t dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

25.4 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \sqrt{x}} \cos t dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

25.5 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{sh}^2 t + \sin^2 x)}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi[$.

IV.2 Extension aux fonctions de classe \mathcal{C}^n

26. → Soient Ω et I , deux intervalles de \mathbb{R} . On considère une fonction f définie pour tout $(x, t) \in \Omega \times I$. On suppose que :

26.1 Hypothèse de régularité

Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x, t)]$ est de classe \mathcal{C}^n sur Ω ;

26.2 Hypothèse d'intégrabilité

Pour tout $0 \leq k \leq n$, pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$[t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)]$$

est intégrable sur I ;

26.3 Hypothèse de domination

Il existe un sous-intervalle \mathcal{V} de Ω et, pour tout $1 \leq k \leq n$, il existe une fonction g_k , intégrable sur I , tels que

$$\forall t \in I, \forall x \in \mathcal{V}, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq g_k(t).$$

26.4 Conclusion

Alors la fonction F définie sur Ω par

$$F(x) = \int_I f(x, t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^n sur \mathcal{V} et

$$\forall 1 \leq k \leq n, \forall x \in \mathcal{V}, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt.$$

27. En pratique

Une fois de plus, il faut choisir l'intervalle \mathcal{V} de telle sorte que l'hypothèse de domination [26.3] soit vérifiée.

27.1 Si l'intervalle d'intégration I est borné, il suffit que les fonctions g_k soient constantes pour que [26.3] soit vérifiée.

27.2 Si I est un segment et si f est de classe \mathcal{C}^n sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$ qui contient $\Omega \times I$, les hypothèses du théorème [26] sont vérifiées pour tout segment $\mathcal{V} = [A, B]$ contenu dans Ω .

27.3 Compte tenu de l'hypothèse de domination [26.3], il suffit que les fonctions

$$[t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)]$$

soient continues sur I pour être intégrables sur I : l'hypothèse d'intégrabilité [26.2] est pour ainsi dire toujours vérifiée.

28. Exemples

28.1 Suite de [3.4] – La fonction F est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$, mais n'est pas dérivable en 0.

28.2 Suite de [3.1] – La fonction F est indéfiniment dérivable sur $] -1, +\infty[$.

28.3 Suite de [3.3] – La fonction F est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$.

28.4 Soient $g \in \mathcal{C}^k$ et $h \in \mathcal{C}^\ell$, deux fonctions périodiques de période T . Alors la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{T} \int_0^T g(x-t)h(t) dt$$

est périodique de période T et de classe $\mathcal{C}^{k+\ell}$.

28.5 Les fonctions F et G définies par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos xt)}{t^2} e^{-t} dt$$

sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . On déduit de [9.65] que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

28.6 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^\pi e^{x \sin^2 \theta} d\theta$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

28.7 Les fonctions de Bessel J_n définies par

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt$$

sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

28.8 Suite de [19.6] – La fonction F est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.

Entraînement

29. Questions pour réfléchir

1. Suite de [24.1] – Comparer les assertions suivantes.

1.a

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (x, t) \in \mathcal{V} \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq M$$

1.b

$$\forall (x, t) \in \mathcal{V} \times I, \exists M \in \mathbb{R}_+, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq M$$

2. Sous les hypothèses du théorème [23], pour tout segment $[A, B] \subset \mathcal{V}$, il existe une fonction h , intégrable sur I , telle que

$$\forall t \in I, \forall x \in [A, B], |f(x, t)| \leq h(t).$$

3. Condition pour que F soit de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{V} .

4. Si les deux premières hypothèses du théorème [26] sont satisfaites et s'il existe une fonction $\Phi \in \mathcal{L}^1(I)$ telle que

$$\forall (x, t) \in \mathcal{V} \times I, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \Phi(t),$$

alors l'hypothèse de domination [26.3] est vérifiée sur tout segment $[A, B] \subset \mathcal{V}$ et la fonction F est de classe \mathcal{C}^n sur \mathcal{V} .

5. Expliquer les remarques [24.2] et [27.2].

30. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3} dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Tracer l'allure de son graphe à l'aide de [9.48.3] et de [9.78].

31. On étudie les fonctions F_1 et F_2 définies par

$$F_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin xt}{t} dt.$$

1.

$$\forall x > 0, F_2(x) = F_1(1/x).$$

2. La fonction F_1 est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, la fonction F_2 est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et par [9.65]

$$\forall x > 0, F_1(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_2(x) = \text{Arctan } x.$$

→[48]

32. Suite de [9.96.6] – La fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ et

$$\forall x > -1, F(x) = \ln \frac{x+2}{x+1},$$

donc $F(x) \sim -\ln(x+1)$ lorsque x tend vers -1 .

V

Applications

V.1 Intégrale de Gauss

33.1 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} \frac{dt}{1+t^2}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Elle est égale à $\pi/4$ en $x = 0$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

33.2 La fonction G définie par

$$G(x) = F(x) + \left[\int_0^x e^{-t^2} dt \right]^2$$

est constante sur \mathbb{R} .

33.3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

33.4 Densité de la loi normale

Quels que soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt = 1.$$

V.2 La fonction Γ d'Euler

34. La fonction Γ est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

34.1 La fonction Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t} dt.$$

35. Équation fonctionnelle et valeurs particulières

35.1

$$\forall x > 0, x\Gamma(x) = \Gamma(x+1).$$

35.2

→[9.62.2]

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$$

35.3

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

36. Comportement asymptotique de la fonction Γ

36.1

Au voisinage de 0, on a $\Gamma(x) \sim 1/x$.

36.2

Comme

$$\forall x > 0, \Gamma(x) \geq \int_1^2 t^{x-1} \frac{dt}{e^2},$$

la fonction Γ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et son graphe présente une branche parabolique d'axe vertical.

36.3 La fonction Γ n'est intégrable ni au voisinage de 0, ni au voisinage de $+\infty$.

36.4 La fonction $1/\Gamma$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

37. Étude globale

37.1 La fonction Γ est strictement convexe.

37.2 La fonction Γ admet un minimum global et ce minimum est atteint sur $[1, 2]$.

V.3 Transformation de Laplace

38. La transformée de Laplace d'une fonction continue par morceaux f est définie par

$$L(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

La détermination de l'ensemble de définition de $L(f)$ fait partie de l'étude de $L(f)$.

- 39. On suppose que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- 39.1 La fonction $L(f)$ est continue et bornée sur \mathbb{R}_+ .
- 39.2 Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.
- 39.3 La fonction $L(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .
- 39.4 Si la fonction $[t \mapsto tf(t)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors $L(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
- 39.5 Si la fonction $[t \mapsto t^n f(t)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors $L(f)$ est de classe \mathcal{C}^n sur $]0, +\infty[$ et

$$L(f)(p) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k p^k}{k!} \int_0^{+\infty} t^k f(t) dt + o(p^n)$$

pour p voisin de 0.

40. Théorème de la valeur initiale

On suppose que f est continue par morceaux et bornée sur \mathbb{R}_+ .

- 40.1 La fonction $L(f)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- 40.2 Si f admet une limite (finie) non nulle $f(0^+)$ au voisinage de 0, alors

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} p e^{-pt} [f(t) - f(0^+)] dt = 0$$

et, lorsque p tend vers $+\infty$,

$$L(f)(p) \sim \frac{f(0^+)}{p}.$$

40.3 Si f est positive mais pas intégrable sur $]0, +\infty[$, alors $L(f)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

41. Théorème de la valeur finale

Si f est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ et tend vers une limite finie ℓ au voisinage de $+\infty$, alors $L(f)(p)$ est défini pour tout $p > 0$ et $pL(f)(p)$ tend vers ℓ au voisinage de $p = 0$.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

42. Exemples et contre-exemples

1. Exemple de fonction f intégrable sur $I =]0, +\infty[$, non bornée sur I , pour laquelle la fonction

$$F_{x_0} = \left[x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt \right]$$

est lipschitzienne sur I .

2. Exemple de fonction dérivable F telle que

$$F(x) = \int_I f(x, t) dt \quad \text{sans que} \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

3. Suite de [58] – Exemple où la fonction g n'est pas de classe \mathcal{C}^2 .

43. Méthodes

- 1. Comment démontrer qu'une fonction est de classe \mathcal{C}^k sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$? sur un ouvert de \mathbb{R}^n ?
- 2. Comment démontrer qu'une fonction n'est pas continue en un point x_0 de son ensemble de définition?
- 3. Comment démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite au voisinage d'un point x_0 ?

4. Comment démontrer qu'une fonction définie par une intégrale

$$F(x) = \int_I f(x, t) dt$$

tend vers l'infini? Peut-on utiliser le théorème de convergence dominée à cet effet?

5. Soit f , une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. Si sa dérivée f' tend vers l'infini au voisinage de 0, alors f n'est pas dérivable en 0.

44. Questions pour réfléchir

1. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle telle que la suite $(\varphi(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admette une limite (finie ou infinie).

2. Dédurre le théorème de continuité [15] du théorème de convergence dominée [9.94.1].

3. Dédurre le théorème [23] de dérivation sous le signe \int du théorème de convergence dominée [9.94.1] et du théorème de continuité [15].

4. Généraliser le théorème [23] de dérivation sous le signe \int aux fonctions f définies sur $\Omega \times I$, où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d .

5.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}.$$

Approfondissement

45. Soit f , une fonction de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . La fonction g définie par

$$g(x) = \int_0^x f(x, t) dt = x \int_0^1 f(x, ux) du$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

46. Fonction d'Euler et constante d'Euler

46.1

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad - \int_0^1 (n+1)y^n \ln(1-y) dy = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

46.2 Suite de [4.48] –

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx = -\gamma$$

46.3 Suite de [9.105] –

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx = -\gamma$$

47. Une transformée de Fourier remarquable

1. Suite de [9.66] – La transformée de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt-t^2/2} dt$$

est une solution de l'équation différentielle $y' + xy = 0$.

2. La relation suivante se déduit du théorème [33.4] qu'elle permet de généraliser. →[25.2]

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}.$$

3.a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos xt dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2/2}.$$

3.b La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \sin xt \, dt$$

est la solution de l'équation différentielle $y' + xy = 1$ qui s'annule en $x = 0$.

48. Intégrale de Dirichlet

1. La fonction F_1 définie par

$$F_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \, dt$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.

2. L'intégrale impropre

$$F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} \, dt$$

est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

3.

$$\forall x \geq 0, \quad F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{(t+x)^2} \, dt.$$

La fonction F_2 ainsi définie est continue sur \mathbb{R}_+ et de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.

4. Comme F_1 et F_2 sont deux solutions de l'équation différentielle

$$\forall x > 0, \quad y'' + y = \frac{1}{x}$$

qui tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$, elles sont égales et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

49. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2} \, dt$$

est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = \frac{\pi}{1+x}.$$

En déduire l'expression de $F(x)$.

50. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t^2} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)u}}{\sqrt{u}} \, du$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2(x+i)F'(x) + F(x) = 0.$$

On déduit donc de [35.3] que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+x^2}} e^{i(\text{Arctan } x)/2}.$$

51. Suite de [3.5] –

1. La fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

2.

$$\forall x \geq 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x).$$

3.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}^2 t}{t^2} \, dt = \pi \ln 2.$$

52. La fonction F définie par

$$F(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} \, dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $O =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. On déduit de ses dérivées partielles que

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \quad F(x, y) = \ln \frac{y}{x}.$$

53. Intégrales de Wallis généralisées

1. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t \, dt$$

est positive, décroissante et de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +\infty[$.

2.

$$\forall x > -1, \quad F(x+2) = \frac{x+1}{x+2} F(x).$$

3. Pour tout $x > 0$, on pose

$$\varphi(x) = xF(x)F(x-1).$$

3.a

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x+1) = \varphi(x).$$

3.b

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad nF(n)F(n-1) = \frac{\pi}{2}.$$

3.c Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$F(x) \sim \sqrt{\frac{\varphi(x)}{x}}.$$

54. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \, dt$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$. Par [33.4],

$$\forall x > 0, \quad F(x) - F'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

et par [9.96.5]

$$\forall x > 0, \quad F(x) = e^x \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, dt.$$

55.

1. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+2t \cos x + t^2)}{t} \, dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi/2]$.

2.

$$\forall 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{\sin x \, dt}{(t + \cos x)^2 + \sin^2 x} = \frac{x}{2}.$$

3.a Pour tout $u \in]-1, 1[$,

$$\ln(1+u) = \int_0^u \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^{n+1}}{n+1}.$$

3.b Suite de [4.97] – La valeur de $F(0)$ est égale à $\pi^2/6$ et

$$\forall 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad F(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{x^2}{2}.$$

56.

1. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

2.

$$\forall x > 0, \quad F(x+1) + F(x) = \frac{1}{x}.$$

3. Suite de [9.99.2] – Pour x voisin de 0,

$$F(x) = \frac{1}{x} - \ln 2 + \frac{\pi^2}{12}x + o(x).$$

57. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2 + t^2)^{n+1}}.$$

1.

$$\forall x > 0, \quad I_0(x) = \frac{\pi}{2x}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction I_n est décroissante, de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \quad I_{n+1}(x) = \frac{-1}{2(n+1)x} I_n'(x).$$

3. La relation précédente suggère de chercher une expression simple de la forme

$$I_n(x) = \frac{a_n}{2^{n+1}n!x^{2n+1}}.$$

Quelle relation de récurrence vérifie la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

4.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad I_n(x) = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \frac{1}{x^{n+1}}.$$

→ [9.62.3]

Pour aller plus loin

58. Factorisation d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que $f(0) = 0$.

On cherche une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xg(x).$$

1.a Pourquoi faut-il supposer que $f(0) = 0$?

1.b Discuter l'unicité de la fonction g .

2. La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_0^1 f'(xt) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

3. Si f est de classe \mathcal{C}^∞ , alors g est de classe \mathcal{C}^∞ et

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = \int_0^1 t^n f^{(n+1)}(tx) dt.$$

59. Fonctions de plusieurs variables

Soient Ω et I , deux intervalles ouverts (non vides) de \mathbb{R} et f , une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $\Omega \times I \subset \mathbb{R}^2$.

1. La fonction définie par

$$\forall (x, y, z) \in \Omega \times I \times I, \quad F(x, y, z) = \int_y^z f(x, t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_y^z \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -f(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f(x, z).$$

2. Si φ et ψ sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 de Ω dans I , alors la fonction définie par

$$\forall x \in \Omega, \quad G(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 et

$$G'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + f(x, \psi(x))\psi'(x).$$

60. Intégrations successives

On suppose que f est continue sur $[a, b] \times [c, d]$.

60.1 La fonction h définie par

$$h(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

est continue sur $[a, b]$ et la fonction F_1 définie par

$$\forall u \in [a, b], \quad F_1(u) = \int_a^u h(x) dx$$

est une primitive de h sur $[a, b]$.

60.2 Pour $(u, y) \in [a, b] \times [c, d]$, on pose

$$k(u, y) = \int_a^u f(x, y) dx.$$

1. La fonction $[y \mapsto k(u, y)]$ est continue sur $[c, d]$.

2. La fonction $[u \mapsto k(u, y)]$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et

$$\forall (u, y) \in [a, b] \times [c, d], \quad \frac{\partial k}{\partial u}(u, y) = f(u, y).$$

3. La fonction F_2 définie par

$$\forall u \in [a, b], \quad F_2(u) = \int_c^d k(u, y) dy$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et

$$F_2'(u) = \int_c^d \frac{\partial k}{\partial u}(u, y) dy = h(u).$$

60.3 Les deux fonctions F_1 et F_2 sont égales sur $[a, b]$.

60.4 → Soit f , une fonction continue sur le pavé $[a, b] \times [c, d]$. Alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$