Suites et séries de fonctions

1. Par linéarité du passage à la limite, de l'intégration et de la dérivation, on sait calculer la limite, l'intégrale et la dérivée d'une somme *finie* de fonctions : il suffit d'effectuer ces opérations *terme à terme*.
On cherche ici à quelles conditions on peut également passer à la limite terme à terme dans une somme infinie de fonctions, intégrer terme à terme ou dériver terme à terme une somme infinie de fonctions.

2. Les fonctions considérées ici sont définies sur un intervalle Ω de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Les résultats de ce chapitre s'appliquent aussi (lorsque cela a un sens) aux fonctions définies sur une partie Ω d'un espace vectoriel V de dimension finie et qui prennent leurs valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie.

I

Convergence ponctuelle

3.1 ✍ *Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions* ***converge simplement sur*** *Ω lorsque, pour tout $x \in \Omega$, la suite de terme général $f_n(x)$ est convergente.*
3.2 *Dans ce cas, la* ***limite (simple)*** *de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la fonction f définie sur Ω par*

$$\forall\, x \in \Omega, \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

On dit alors que ***la suite de fonctions converge simplement sur*** *Ω* ***vers*** *f.*
4. **Exemples**
4.1 La suite des fonctions $f_n = [x \mapsto x^n]$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction nulle.
4.2 La suite des fonctions $f_n = [x \mapsto nx^n\ \ell n\, x]$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction nulle.
4.3 La suite des fonctions $f_n = [x \mapsto \operatorname{Arctan} nx]$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction constante, égale à $\pi/2$.
4.4 La suite des fonctions $f_n = [x \mapsto \operatorname{th} x/n]$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.
4.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n en posant

$$f_n(x) = \left|\begin{array}{ll} n^2 & \text{pour } 0 < x \leqslant 1/n,\\ 1/x^2 & \text{pour } x \geqslant 1/n.\end{array}\right.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f = [x \mapsto 1/x^2]$.
4.6 La suite de terme général $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $[x \mapsto |x|]$.
4.7 La suite de terme général

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

converge simplement sur $]-1,1[$ vers $f(x) = 1/(1-x)$.

I.1 Propriétés conservées par convergence ponctuelle

5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge simplement sur Ω vers une fonction f.
D'une manière générale, les propriétés des fonctions f_n qui ne touchent qu'un nombre *fini* de valeurs, dites **propriétés ponctuelles**, sont conservées par la convergence simple.
5.1 **Signe**
Si f_n est une fonction positive (resp. négative) sur Ω pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est positive (resp. négative) sur Ω.
5.2 **Monotonie**
Si f_n est croissante (resp. décroissante) sur Ω pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur Ω.
5.3 **Parité**
Si f_n est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction paire (resp. impaire) sur $\Omega = \mathbb{R}$, alors f est paire (resp. impaire).
5.4 **Périodicité**
Si f_n est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction T-périodique sur $\mathbb{R}$, alors f est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
5.5 **Convexité**
Si f_n est une fonction convexe (resp. concave) sur Ω pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est convexe (resp. concave) sur Ω.
6. **Fonctions uniformément bornées**
6.1 *Suite de* **[4.5]** – Une fonction non bornée peut être la limite simple d'une suite de fonctions bornées.
6.2 ✍ *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***uniformément bornée sur*** *Ω lorsque*

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \Omega, \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant M.$$

6.3 Si une suite de fonctions uniformément bornée converge simplement, alors sa limite simple est bornée.

I.2 Propriétés non conservées

7. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge simplement sur Ω vers une fonction f.
Les propriétés qui reposent sur des inégalités *strictes* ou sur un nombre *infini* de valeurs ne sont en général pas conservées par convergence simple.
7.1 *Suite de* **[4.1]** – Si les fonctions f_n sont strictement positives, alors la fonction f est positive, mais n'est pas nécessairement strictement positive.
7.2 *Suite de* **[4.1]** – Si les fonctions f_n sont strictement croissantes, alors la fonction f est croissante, mais n'est pas nécessairement strictement croissante.
7.3 *Suite de* **[4.1]** – Si les fonctions f_n sont strictement convexes, alors la fonction f est convexe, mais n'est pas nécessairement strictement convexe.
7.4 *Suite de* **[4.5]** – Si les fonctions f_n sont intégrables sur Ω, la fonction f n'est pas nécessairement intégrable sur Ω.
7.5 *Suite de* **[4.3]** – Si les fonctions f_n sont continues sur Ω, la fonction f n'est pas nécessairement continue sur Ω.
7.6 *Suite de* **[4.6]** – Si les fonctions f_n sont dérivables sur Ω, la fonction f n'est pas nécessairement dérivable sur Ω.
7.7 *Suite de* **[4.2]** – Bien que les fonctions f_n convergent vers la fonction nulle, la suite de terme général

$$m_n = \min_{0<x\leqslant 1} f_n(x)$$

ne tend pas vers 0.
7.8 *Suite de* **[4.5]** – Toutes les fonctions f_n sont bornées, mais leur limite f n'est pas bornée.

I.3 Propriétés locales et propriétés globales

8. Nous dirons qu'une propriété est **locale** lorsqu'elle est vraie sur l'intervalle Ω si, et seulement si, elle est vraie sur tout segment $[A,B]$ contenu dans Ω.
Une propriété qui n'est pas locale sera dite **globale**.
8.1 **Exemples de propriétés locales**
1. Les propriétés ponctuelles **[5]** sont des propriétés locales.
2. Une fonction est continue (resp. dérivable, resp. de classe $\mathscr{C}^n$, resp. continue par morceaux) sur un intervalle Ω si, et seulement si, elle est continue (resp. dérivable, resp. de classe $\mathscr{C}^n$, resp. continue par morceaux) sur tout segment $[A,B] \subset \Omega$.

8.2 Exemples de propriétés globales

1. Toute fonction continue sur $]0,1[$ est bornée sur tout segment $[A,B] \subset]0,1[$, sans être nécessairement bornée sur $]0,1[$.

2. Toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ est lipschitzienne sur tout segment $[A,B] \subset]0,+\infty[$, sans être nécessairement lipschitzienne sur $]0,+\infty[$.

3. Toute fonction continue sur $]0,1[$ est intégrable sur tout segment $[A,B] \subset]0,1[$, mais n'est pas nécessairement intégrable sur $]0,1[$.

Entraînement

9. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* **[4.1]** – Étudier la convergence simple sur $[0,1]$.
2. *Suite de* **[4.3]** – Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$.

10. Fonction génératrice d'une loi sur $\mathbb{N}$

Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **loi de probabilité** sur $\mathbb{N}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$$

alors sa **fonction génératrice** G, définie par

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$$

est positive, croissante et convexe sur $[0,1]$. →**[115]**

11. Suites de fonctions affines

1. Soit φ, une fonction affine sur Ω :

$$\forall\, x \in \Omega, \quad \varphi(x) = ax + b.$$

Exprimer a et b en fonction de $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$, où x_1 et x_2 sont deux points distincts de Ω.

2. Une fonction φ est affine sur l'intervalle Ω si, et seulement si, elle est convexe et concave sur Ω.

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions affines qui converge simplement sur Ω vers f. Alors la fonction f est une fonction affine.

12. Suites de fonctions polynomiales

12.1 *Suite de* **[4.7]** – Si une suite de fonctions polynomiales converge simplement vers f, la fonction f n'est pas nécessairement polynomiale.

12.2 Si on se restreint à des fonctions polynomiales de degré borné, alors le caractère polynomial est conservé par la convergence simple.

1. Si $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant d}$ est une famille de $(d+1)$ points deux à deux distincts de Ω, toute fonction f polynomiale de degré inférieur à d sur Ω vérifie

$$\forall\, x \in \Omega, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{d} f(\alpha_k) L_k(x)$$

où $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant d}$ est la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant d}$.

2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge simplement sur Ω vers une fonction f et si

$$\exists\, d \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \deg f_n \leqslant d,$$

alors f est une fonction polynomiale de degré inférieur à d.

13. Fonctions uniformément lipschitziennes

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions **uniformément lipschitziennes** lorsqu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, (x,y) \in \Omega^2, \quad \big|f_n(x) - f_n(y)\big| \leqslant K|x-y|.$$

1. *Suite de* **[4.3]** – Il existe une suite de fonctions lipschitziennes qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas lipschitzienne.

2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions uniformément lipschitziennes qui converge simplement vers une fonction f, alors f est lipschitzienne sur Ω.

3. La suite des fonctions f_n définies par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = 2^{-n}\cos(3^n x)$$

est une suite de fonctions lipschitziennes, qui ne sont pas uniformément lipschitziennes. Cette suite converge simplement vers une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

II

Convergences uniformes

14. La continuité n'est en général pas conservée par convergence simple **[7.5]**. La notion de convergence uniforme, plus restrictive que la convergence simple, sert à assurer la continuité de la limite d'une suite de fonctions continues.

15. La **convergence uniforme globale** est une condition très restrictive pour que la limite d'une suite de fonctions continues soit continue, ce n'est en aucun cas une condition nécessaire.

15.1 Soit u, une fonction bornée sur Ω. Alors

$$\big(\forall\, x \in \Omega, \quad |u(x)| \leqslant \varepsilon\big) \iff \big(\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant \varepsilon\big).$$

15.2 ✍ *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** Ω lorsqu'il existe une fonction f, définie sur Ω, telle que*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N_\varepsilon, \quad \sup_{x\in\Omega} \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

*On dit alors que f est la **limite uniforme sur Ω de la suite de fonctions** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

15.3 La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers la fonction f si, et seulement si, la suite de fonctions $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers la fonction nulle.

15.4 ➔ Condition nécessaire de convergence uniforme

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers f, alors elle converge simplement sur Ω vers f.

15.5 Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ et uniformément sur $[b,c]$, alors elle converge uniformément sur $[a,c]$.

16. Convergence uniforme et borne uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge uniformément sur Ω vers une fonction f.

16.1 Les fonctions $f_n - f$ et $f_n - f_p$ sont toutes bornées à partir d'un certain rang, sans que f ou les f_n le soient nécessairement.

16.2 Si la fonction f est bornée sur Ω, alors, à partir d'un certain rang, les fonctions f_n sont uniformément bornées sur Ω.

17. Norme d'algèbre associée à la convergence uniforme

Lorsqu'on se restreint aux suites de fonctions bornées, la convergence uniforme peut être étudiée à l'aide d'une norme.

17.1 ✍ *Soit f, une fonction bornée sur Ω. La **norme uniforme** (ou **norme infinie**) sur Ω de f est définie par*

$$N_\Omega^\infty(f) = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Cette quantité est aussi notée $\|f\|_\infty$.

17.2 La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers f si, et seulement si, à partir d'un certain rang, la différence $f_n - f$ est bornée sur Ω et

$$\lim_{n\to+\infty} N_\Omega^\infty(f_n - f) = 0.$$

17.3 Inégalité triangulaire

$$\big|N_\Omega^\infty(f) - N_\Omega^\infty(g)\big| \leqslant N_\Omega^\infty(f \pm g) \leqslant N_\Omega^\infty(f) + N_\Omega^\infty(g)$$

17.4 La norme uniforme sur Ω est **positivement homogène**.

$$N^\infty_\Omega(\lambda f) = |\lambda|\, N^\infty_\Omega(f)$$

17.5 Quelles que soient les fonctions f et g bornées sur Ω,

$$N^\infty_\Omega(fg) \leqslant N^\infty_\Omega(f) N^\infty_\Omega(g).$$

17.6 ➔ *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions bornées sur Ω qui converge uniformément sur Ω vers f. Alors les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément bornées, la fonction f est bornée et*

$$N^\infty_\Omega(f) = \lim_{n\to+\infty} N^\infty_\Omega(f_n).$$

18. Caractérisation séquentielle
On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur Ω vers une fonction f. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers f si, et seulement si, quelle que soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω (convergente ou non), la suite de terme général

$$f_n(x_n) - f(x_n)$$

tend vers 0.

En pratique

19. Pour justifier la convergence uniforme sur Ω de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
– On identifie f, limite **[15.4]** de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la convergence simple sur Ω ;
– On établit ensuite une **majoration uniforme par une suite de limite nulle** : pour tout $n\in\mathbb{N}$, on justifie l'existence d'une constante réelle M_n *indépendante* de $x\in\Omega$ telle que

$$\forall\, x\in\Omega, \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant M_n$$

et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = 0.$$

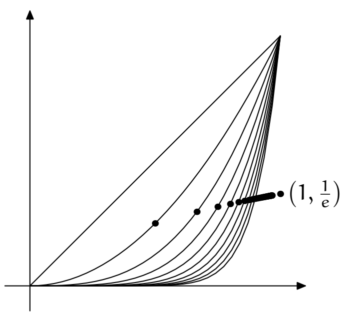
20. Convergence non uniforme
Pour justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur Ω,
– on étudie si cette suite converge simplement sur Ω en application du théorème **[15.4]** ;
– si c'est bien le cas, on identifie la limite simple f et on cherche une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω telle que la suite de terme général

$$u_n = f_n(x_n) - f(x_n)$$

ne tende pas vers 0.

21. Exemples et contre-exemples
21.1 *Suite de* **[4.6]** – La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $[x\mapsto |x|]$.
21.2 La suite des fonctions $f_n = [x\mapsto x^n \ell\mathrm{n}\, x]$ converge uniformément sur $\Omega =]0,1]$ vers la fonction nulle.
21.3 *Suite de* **[4.1]** – La suite des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,\alpha]$ pour tout $0<\alpha<1$, mais ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ car

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n = e^{-1}.$$



21.4 La suite des fonctions

$$f_n = \Big[x\mapsto \frac{x}{n(1+x^n)}\Big]$$

converge uniformément sur $\Omega = \mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.
21.5 La suite des fonctions $f_n = [x\mapsto e^{-nx}\sin nx]$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. Pour tout $a>0$, elle converge uniformément sur $[a,+\infty[$ mais elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ car $f_n(1/n)$ ne tend pas vers 0.
21.6 La suite des fonctions $f_n = [x\mapsto nxe^{-\sqrt{n}x}]$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle. Pour tout $a>0$, elle converge uniformément sur $[a,+\infty[$, mais elle ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.
21.7 La suite des fonctions $f_n = [x\mapsto e^{-n^2x}]$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction nulle. Pour tout $a>0$, elle converge uniformément sur $[a,+\infty[$, mais elle ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

II.1 Opérations algébriques

22. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites de fonctions qui convergent uniformément sur Ω vers f et g respectivement.
22.1 La suite de fonctions $(\lambda f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers $\lambda f + g$.
22.2 Si les fonctions f_n et g_n sont des fonctions bornées sur Ω, alors la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers fg.

23. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites de fonctions continues sur Ω qui convergent uniformément sur Ω vers f et g respectivement. Alors la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de Ω vers fg. →**[25]**

24. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions de I dans Ω qui converge uniformément sur I vers une fonction $f : I\to\Omega$.
24.1 Quelle que soit la fonction $\psi : J\to I$, la suite de fonctions $(f_n\circ\psi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur J vers $f\circ\psi$.
24.2 Si φ est uniformément continue sur Ω, alors la suite de fonctions $(\varphi\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $\varphi\circ f$.

25. Pour tout $n\geqslant 1$ et tout $x\in I = [0,+\infty[$, on pose

$$f_n(x) = x + 1/n.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction $f = [x\mapsto x]$. La suite de fonctions $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f^2, mais ne converge pas uniformément sur I.

II.2 Convergence uniforme et continuité

26. Le théorème **[26.2]** signifie que la convergence uniforme conserve la continuité, ce qu'on peut traduire comme la possibilité d'intervertir deux passages à la limite.

$$\lim_{x\to x_0}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\Big)$$

26.1 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge uniformément sur $V\subset\Omega$ vers la fonction f. Quels que soient x et y dans V et $n\in\mathbb{N}$,

$$\big|f(x)-f(y)\big| \leqslant 2N^\infty_\Omega(f-f_n) + \big|f_n(x)-f_n(y)\big|.$$

26.2 ➔ *Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur Ω converge uniformément sur V, voisinage de x_0 dans Ω, vers f, alors f est continue au point x_0.*
26.3 ➔ *Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur l'intervalle Ω converge uniformément sur Ω vers f, alors la fonction f est continue sur Ω.*

27. Convergence uniforme locale
Pour démontrer la continuité de la limite f d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues, il suffit de vérifier que la fonction f est continue en chaque point de son ensemble de définition.
Il n'est donc pas nécessaire de prouver [**26.3**] la convergence uniforme sur $V = \Omega$: il suffit de l'établir sur un voisinage V de x_0, pour chaque point x_0 de Ω.
27.1 Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω, alors elle converge uniformément sur toute partie $K \subset \Omega$.
27.2 Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[A, B] \subset]a, b[$, alors elle converge simplement sur $]a, b[$.
27.3 ➜ *Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur l'intervalle Ω converge uniformément sur tout segment $[A, B] \subset \Omega$ vers f, alors la fonction f est continue sur Ω.*

28. Composition de limites et limite uniforme
28.1 Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers f, alors

$$\left|f(x) - f_n(y)\right| \leqslant \left|f(x) - f(y)\right| + N_\Omega^\infty(f - f_n)$$

pour tous x et y dans Ω et tout $n \in \mathbb{N}$.
28.2 ➜ *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge uniformément sur Ω vers f. Si la fonction f est continue en $x \in \Omega$, alors*

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui converge vers x.
28.3 Si la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers la fonction nulle, alors

$$R_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω.

Théorème d'interversion des limites

29. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $]a, b[$ dont les bornes a et b sont réelles ou infinies.
On cherche à généraliser le théorème [**26.2**] pour obtenir une conclusion de la forme

$$\lim_{x\to\omega}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{x\to\omega} f_n(x)\Big)$$

avec $\omega = a$ ou $\omega = b$.
On admettra la convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui suppose connues les notions d'**espace complet** et de **suite de Cauchy**.

30. ➜ *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a, b[$, à valeurs dans E [**2**].*
Hypothèses
1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n au voisinage de $\omega = a$ (resp. $\omega = b$) ;*
2. *Il existe un intervalle $I =]a, \alpha[$ (resp. $I =]\beta, b[$) sur lequel la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.*

Conclusion
1. *La suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;*
2. *La fonction f admet une limite finie au voisinage de ω et*
3. $$\lim_{x\to\omega} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \ell_n.$$

31. On reprend les hypothèses du théorème [**30**].
31.1 Quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $w_n \in I$,

$$\left|f_n(w_n) - \ell\right| \leqslant \left|f(w_n) - \ell\right| + N_I^\infty(f_n - f).$$

31.2 Quelle que soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui tend vers ω,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(w_n) = \lim_{n\to+\infty} \ell_n.$$

II.3 Convergence uniforme et intégration

32. Passage à la limite sous $\int$
On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur un intervalle Ω.
32.1 Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers la fonction f, alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |b-a|\, N_\Omega^\infty(f - f_n)$$

quels que soient a et b dans Ω.
32.2 ➜ *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

33. ➜ Primitives
Soient Ω, un intervalle de $\mathbb{R}$; x_0, un point de Ω et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues sur Ω qui converge uniformément sur (tout segment de) Ω vers une fonction f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de Ω vers F.

II.4 Convergence uniforme et dérivation

34. On cherche à quelles conditions on peut intervertir la limite et la dérivation, c'est-à-dire arriver à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big] = \lim_{n\to+\infty}\Big[\frac{\mathrm{d}f_n(x)}{\mathrm{d}x}\Big].$$

ou plus généralement [**36**], [**37**] à

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\Big[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big] = \lim_{n\to+\infty}\Big[\frac{\mathrm{d}^k f_n(x)}{\mathrm{d}x^k}\Big].$$

35. ➜ Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$
Soient Ω, un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.
Hypothèses
1. *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur Ω vers une fonction f ;*
2. *La suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des dérivées converge uniformément sur tout segment de Ω vers une fonction g.*

Conclusion
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de Ω, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et $f' = g$.

36. ➜ Fonctions de classe $\mathscr{C}^p$
Soient Ω, un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) sur Ω.
Hypothèses
1. *Pour tout $0 \leqslant k < p$, la suite des dérivées k-ièmes converge simplement sur Ω vers une fonction φ_k ;*
2. *La suite des dérivées p-ièmes converge uniformément sur tout segment de Ω vers une fonction φ_p.*

Conclusion
La fonction φ_0 est de classe $\mathscr{C}^p$ sur Ω et

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \varphi_0^{(k)} = \varphi_k.$$

37. ➜ Fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$
Soient Ω, un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω.
Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite des dérivées k-ièmes converge uniformément sur tout segment de Ω vers une fonction φ_k, alors la fonction φ_0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω et

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \varphi_0^{(k)} = \varphi_k.$$

Entraînement

38. Questions pour réfléchir

1. Soit X, un ensemble fini. Une suite de fonctions converge uniformément sur X si, et seulement si, elle converge simplement sur X.

2. Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions décroissantes sur I qui converge simplement sur I vers la fonction nulle. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur I ?

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge uniformément sur Ω vers f. Condition sur g pour que la suite de fonctions $(f_n g)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers fg.

4. Soit φ, une fonction continue et bornée sur $\Omega = \mathbb{R}_+$.

4.a La suite des fonctions $f_n = [x \mapsto \varphi(x/n)]$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

4.b Cette suite de fonctions ne converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ que si φ est constante.

5. Soit φ, une fonction continue sur $\Omega = \mathbb{R}_+^*$ qui admet une limite finie ℓ au voisinage de $+\infty$.

5.a Pour tout $a > 0$, la suite des fonctions $f_n = [x \mapsto \varphi(nx)]$ converge uniformément sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

5.b Cette suite de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si, φ est constante.

6. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions uniformément continues sur I qui converge uniformément sur I vers une fonction f. La fonction f est uniformément continue sur I.

7. Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur $\Omega =]a, b[$ converge uniformément sur $]A, B[\subset \Omega$ vers une fonction f, alors f est continue sur $]A, B[$.

8. Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur $\Omega =]a, b[$ converge uniformément sur $[A, B] \subset \Omega$ vers une fonction f, alors f n'est pas nécessairement continue sur $[A, B]$.

9. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge uniformément sur $\Omega =]a, b[$ vers f. Si la fonction f admet une limite à gauche finie ℓ_b en b, alors

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_b$$

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui converge vers b.

10. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues par morceaux sur Ω qui converge uniformément sur Ω vers une fonction intégrable f. Si Ω est un intervalle borné, alors la convergence est dominée : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne sur Ω vers f et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Omega f(t)\,\mathrm{d}t.$$

11. *Suite de* **[36]** – Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant p$, la suite des dérivées k-ièmes converge uniformément sur tout segment de Ω vers φ_k, fonction de classe $\mathscr{C}^{p-k}$ sur Ω telle que

$$\forall\ 0 \leqslant i \leqslant (p-k), \quad \varphi_k^{(i)} = \varphi_{k+i}.$$

39. Soit f, une fonction continue, intégrable et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie par

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} f\big(x/n\big).$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. mais la convergence n'est pas dominée.

40. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1, 1[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n(1-x^2)} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[A, B] \subset]-1, 1[$ vers la fonction nulle.

2. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[A, B] \subset]-1, 1[$ vers la fonction nulle, mais elle ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$.

41. Pour démontrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément, il faut établir qu'une propriété (fonction bornée, fonction continue...), qui devrait être conservée par convergence uniforme, n'est pas conservée.

41.1 La suite des fonctions

$$f_n = \left[x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{3k+2}\right]$$

converge simplement, mais pas uniformément, sur $[0, 1[$.

41.2 Les fonctions

$$f_n = \left[x \mapsto \frac{1-x^n}{1-x}\right]$$

sont bornées sur $\Omega = [0, 1[$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur Ω, uniformément sur $[0, a]$ pour tout $0 < a < 1$, mais pas uniformément sur Ω.

42. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I =]-\infty, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f qui n'est pas continue sur I : la convergence n'est donc pas uniforme sur I.

2. Pour tout $a > 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $J_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ vers f.

3. La fonction f est continue sur $I_0 =]0, +\infty[$, mais la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I_0 vers f.

43. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0, 1]$, on pose

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle. Elle converge uniformément sur $[0, 1]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.

44. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $f_n(0) = 0$ et

$$\forall\ x \neq 0, \quad f_n(x) = x^2 \sin\frac{1}{nx}.$$

Pour tout $a > 0$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[-a, a]$ vers la fonction nulle, mais elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

45. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$. Si la dérivée seconde f'' est bornée sur $\mathbb{R}$, alors la dérivée f' est lipschitzienne et la suite des fonctions g_n définies par

$$\forall\ n \geqslant 1,\ \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = n\big[f(x + 1/n) - f(x)\big]$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f'.

46. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I = [0, \pi/2]$, on pose

$$f_n(x) = n \sin x \cos^n x.$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I et uniformément sur tout segment $[a, b]$ contenu dans $J =]0, \pi/2]$ vers la fonction nulle.

2. Comme la suite de terme général

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

ne tend pas vers 0, la convergence n'est pas dominée. Est-elle uniforme sur J ?

III

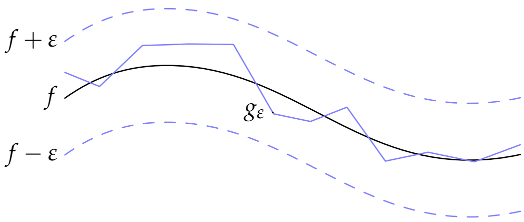
Approximation uniforme

47. On considère des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$.
47.1 ✍ *On note $\mathscr{L}^\infty(I)$, l'ensemble des applications continues par morceaux et bornées de I dans E.*
47.2 ➔ *L'ensemble $\mathscr{L}^\infty(I)$ est un sous-espace de $\mathscr{A}(I, E)$.*
47.3 La **norme uniforme sur** I d'une fonction $f \in \mathscr{L}^\infty(I)$ a été définie au **[17]** et est notée ici $\|f\|_\infty$, puisqu'on se limite à étudier la convergence uniforme sur I.

48.1 ✍ *Soit $A \subset \mathscr{L}^\infty(I)$. Une fonction $f \in \mathscr{L}^\infty(I)$ est* ***approchée uniformément sur*** *I par des éléments de A lorsque*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, g_\varepsilon \in A, \quad \|f - g_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

48.2 La définition **[48.1]** signifie que $g_\varepsilon(x)$ est une valeur approchée de $f(x)$ à ε près pour tout $x \in I$.



48.3 En pratique
La fonction $f \in \mathscr{L}^\infty(I)$ est approchée uniformément sur I par des éléments de A si, et seulement si, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à A qui converge uniformément sur I vers f.

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - g_n\|_\infty = 0$$

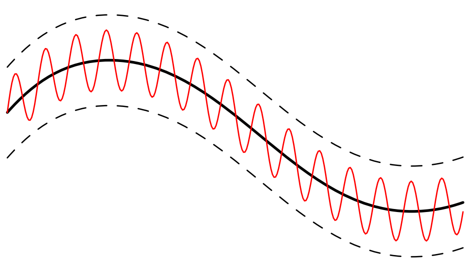
49. ➔ **Approximation des fonctions continues par morceaux**
Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est approchée uniformément sur $[a, b]$ par des fonctions en escalier.

III.1 Approximation polynomiale

50. On s'intéresse ici à l'*approximation* de fonctions au moyen de fonctions polynomiales, ce qui n'a rien à voir avec l'*interpolation* de fonctions au moyen de fonctions polynomiales (au sens de Lagrange). →[134.4]

51. Théorème de Weierstrass
Le théorème **[51.1]**, que nous admettrons, résout *théoriquement* le problème de l'approximation polynomiale.
51.1 ➔ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, une fonction continue. Il existe une suite de fonctions polynomiales sur $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f.*
51.2 On peut même *expliciter* une approximation polynomiale de toute fonction continue sur un segment. →[127]

52. Approximation simultanée
La convergence uniforme est une manière d'approcher les valeurs d'une fonction continûment dérivable f qui ne garantit pas qu'on approche en même temps les valeurs de la dérivée f'.
Autrement dit, même si la différence $(f - g_\varepsilon)$ est une fonction de *faible amplitude*, elle peut néanmoins présenter de *grandes variations*.



52.1 Soient f et g, deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors

$$\|f - g\|_\infty \leqslant |f(x_0) - g(x_0)| + (b - a)\|f' - g'\|_\infty$$

pour tout $x_0 \in [a, b]$.
52.2 ➔ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^1$. Il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f et telle que la suite des dérivées $(g'_n)_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f'.*

III.2 Raisonnement par densité

53. Raisonner par densité consiste à étendre le domaine de validité d'une propriété par une sorte de passage à la limite.
53.1 Si deux fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et si

$$\forall\, x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[, \quad f(x) = g(x),$$

alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
53.2 Si f est continue sur $[a, b]$ et positive sur $]a, b[$, alors f est positive sur $[a, b]$.
53.3 Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad xyf(x, y) = 0,$$

alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2$.
53.4

$$\forall\, t \in [-1, 1], \quad \operatorname{Arctan} t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

53.5 Si f est continue et additive sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$$

alors $f(x) = xf(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
53.6 Soient $]a, b[$, un intervalle ouvert borné et f, une application lipschitzienne sur $]a, b[$. Il existe un, et un seul, prolongement de f continu sur $[a, b]$ et ce prolongement est lipschitzien sur $[a, b]$.

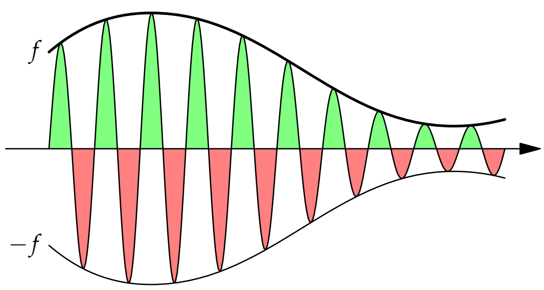
Lemme de Riemann–Lebesgue

54. Le résultat suivant est un exemple typique de raisonnement par densité. On le démontre d'abord sous une forme restreinte aux fonctions continûment dérivables avant de l'étendre aux fonctions continues par morceaux **[58]**.

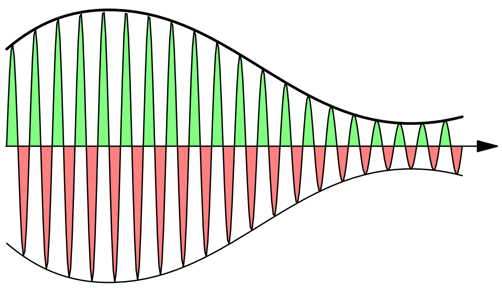
55. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a, b]$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t) \cos nt \, \mathrm{d}t = 0.$$

56. Les figures suivantes montrent pourquoi l'intégrale de **[55]** tend vers 0.



Plus la fréquence du signal modulé en amplitude est élevée, plus chaque arche compense exactement l'arche précédente, de telle sorte que l'aire totale se rapproche de 0.



57. *Suite de* **[55]** – Quels que soient f et g dans $\mathscr{L}^\infty([a,b])$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_a^b f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f-g\|_1 + \left|\int_a^b g(t)e^{int}\,\mathrm{d}t\right|.$$

58. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^{0,m}([a,b])$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = 0.$$

Problème des moments

59. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le **moment d'ordre** k de f est défini par

$$m_k = \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans quelle mesure la fonction f est-elle caractérisée par la suite des moments $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

59.1 Problème des moments partiels

1. Si f change p fois de signe sur $[a,b]$, il existe une fonction polynomiale g de degré p telle que fg soit une fonction continue et de signe constant.
2. Si $m_k = 0$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, alors la fonction f s'annule au moins $(n+1)$ fois sur $[a,b]$.
3. Qu'en déduire lorsque $m_k = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

59.2 Raisonnement par densité

4. Si f et g sont continues sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \|f-g\|_\infty\|f\|_1 + \left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t\right|.$$

5. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \int_a^b t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

alors f est identiquement nulle.

Entraînement

60. Questions pour réfléchir

1. Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, existe-t-il une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et affines par morceaux qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f ?
2. La fonction

$$f = [x \mapsto \sin {}^1\!/_x]$$

est continue sur $I =]0,1]$. Il n'existe aucune suite de fonctions en escalier $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur I vers f. (On rappelle qu'une fonction en escalier n'a qu'un nombre fini de marches.)

3. Quel est l'intérêt d'approcher une fonction par des fonctions polynomiales ?
4. La fonction $f = [x \mapsto {}^1\!/_x]$ est continue sur $I =]0,1]$. Existe-t-il une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur I vers f ?

61. Variante du théorème de Weierstrass [51.1]

61.1 Soit φ, une fonction affine sur $[a,b]$ telle que $|\varphi(a)| \leqslant \varepsilon$ et $|\varphi(b)| \leqslant \varepsilon$. Alors $\|\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

61.2 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, une fonction continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale f_ε telle que

$$f_\varepsilon(a) = f(a),\quad f_\varepsilon(b) = f(b)\quad \text{et}\quad \|f - f_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

62. Convergence faible
Soient E, un espace vectoriel normé et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de formes linéaires sur E. On suppose que ces formes linéaires sont uniformément lipschitziennes :

$$\exists\, K > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, f \in E,\quad |T_n(f)| \leqslant K\|f\|.$$

S'il existe un sous-espace F dense dans E tel que

$$\forall\, f \in F,\quad \lim_{n\to+\infty} T_n(f) = 0,$$

alors

$$\forall\, f \in E,\quad \lim_{n\to+\infty} T_n(f) = 0.$$

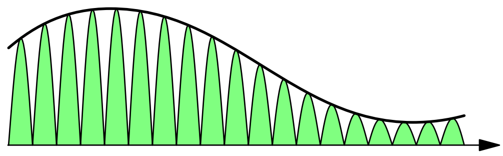
On dit alors que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge faiblement vers** 0.
Faire le lien avec le théorème de Riemann–Lebesgue **[58]**.

63. Une variante du théorème de Riemann-Lebesgue

1.
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \int_0^{\pi/n} \sin nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n}.$$

2. Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)|\sin nt|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$



En considérant les points $x_k = {}^{k\pi}\!/_n$, on pourra intégrer par parties dans le cas où f est continûment dérivable et conclure par densité.

64. *Suite de* **[9.68.4]** – En s'inspirant du théorème **[55]**, on prouve que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\sin xt\,\mathrm{d}t$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

65. Densité des fonctions à support compact
Une fonction f définie sur I est **à support compact** lorsqu'il existe un segment $[A,B] \subset I$ tel que

$$\forall\, t \notin [A,B],\quad f(t) = 0.$$

1. L'ensemble $\mathscr{C}^0_K(I)$ des fonctions à support compact et continues sur I est un espace vectoriel.
2. Une fonction continue à support compact est bornée.
3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues à support compact qui converge uniformément sur I vers f, alors la fonction f est continue sur I. Condition pour que f soit une fonction à support compact.

4.a Toute fonction continue sur I et à support compact est intégrable sur I.

4.b Soit $f \in \mathscr{L}^1(I)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue g à support compact telle que $\|f-g\|_1 \leqslant \varepsilon$.

66. *Suite de* **[9.106]** – On suppose que f est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que $g(x) \sim {}^1\!/_x$ au voisinage de 0.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to 0} x \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(n+1)xt}\,dt = \frac{1}{n+1},$$

donc, d'après le théorème de Weierstrass [51.1],

$$\lim_{x\to 0} x \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\varphi(e^{-xt})\,dt = \int_0^1 \varphi(u)\,du$$

pour toute fonction φ continue sur $[0,1]$.

2. Pour tout $A > 0$,

$$\frac{1}{A}\int_0^A f(t)\,dt = \int_{e^{-A}}^1 f(-A\,\ell n\,u)\frac{du}{u}.$$

3.a Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ_ε, positive et continue sur $[0,1]$, telle que

$$\forall\, u \in [e^{-1},1],\quad \varphi_\varepsilon(u) = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad 1 \leqslant \int_0^1 \varphi_\varepsilon(u)\,du \leqslant 1+\varepsilon.$$

3.b Il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall\, A,\varepsilon > 0,\quad \left|\int_0^{e^{-1}} \varphi_\varepsilon(u)\big[1 - f(-A\,\ell n\,u)\big]\,du\right| \leqslant M\varepsilon.$$

3.c Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall\, A \geqslant A_\varepsilon,\quad \left|\int_0^1 f(-A\,\ell n\,u)\varphi_\varepsilon(u)\,du - \int_0^1 \varphi_\varepsilon(u)\,du\right| \leqslant \varepsilon.$$

3.d Par conséquent,

$$\int_0^A f(t)\,dt \sim A$$

lorsque A tend vers $+\infty$.

IV

Modes de convergence d'une série de fonctions

67. On considère une suite de fonctions $u_n : \Omega \to E$, à valeurs réelles ou complexes, et les fonctions $S_n : \Omega \to E$ définies par

$$\forall\, x \in \Omega,\quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

La **série de fonctions** $\sum u_n$ est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étudiée du point de vue des fonctions u_n. On dit alors que u_n est le **terme général de la série** et S_n est sa n-ième **somme partielle**.

67.1 Comme plus haut [2], les résultats qui suivent s'appliquent aussi, autant qu'il est possible, aux fonctions définies sur une partie Ω d'un espace vectoriel réel ou complexe V de dimension finie et qui prennent leurs valeurs dans un espace vectoriel réel ou complexe E de dimension finie.

67.2 Ces hypothèses servent essentiellement à démontrer les théorèmes [71] et [76].

IV.1 Convergence simple

68. ✍ *La série de fonctions $\sum u_n$ **converge simplement** sur Ω lorsque, pour tout $x \in \Omega$, la série $\sum u_n(x)$ converge dans E.*
*Sa **somme** est alors la fonction $S : \Omega \to E$ définie par*

$$\forall\, x \in \Omega,\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

*et son **reste d'ordre** $n \in \mathbb{N}$ est la fonction $R_n : \Omega \to E$ définie par*

$$\forall\, x \in \Omega,\quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

69. Exemples
69.1 La série $\sum x^n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
69.2 La série $\sum x^n/n!$ converge simplement sur $\mathbb{C}$.

Convergence absolue

70. ✍ *On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge absolument sur** Ω lorsque, pour tout $x \in \Omega$, la série numérique de terme général positif*

$$\sum |u_n(x)|$$

converge (où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue sur $\mathbb{R}$, le module sur $\mathbb{C}$, la norme sur E).

71. ➔ *Si une série de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie E converge absolument sur Ω, alors cette série de fonctions converge simplement sur Ω.*

IV.2 Convergence uniforme

72. ✍ *Une série de fonctions **converge uniformément sur** Ω lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge uniformément sur Ω vers sa somme S.*

73. Si une série de fonctions converge uniformément sur Ω, alors [15.4] elle converge simplement sur Ω.

74. ➔ *On suppose qu'une série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur Ω.*
Alors cette série converge uniformément sur Ω si, et seulement si, la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes converge uniformément sur Ω vers la fonction nulle.

Passage à la limite terme à terme

75. La conclusion du théorème [76] peut être comprise sous la forme suivante :

$$\lim_{x\to\omega}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\lim_{x\to\omega} u_n(x)\Big)$$

propriété qui est fausse en général. →[**4.98**]

76. ➔ *On rappelle que l'espace d'arrivée E est un espace vectoriel, réel ou complexe, de dimension finie* [67] *et que les fonctions u_n sont définies sur un voisinage de ω.*
Hypothèses
1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n tend vers $\ell_n \in E$ au voisinage de ω ;*
2. *La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur un voisinage de ω.*

Conclusion
La série $\sum \ell_n$ converge dans E et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \lim_{x\to\omega} S(x).$$

En pratique

77. Cas particuliers de convergence uniforme
Pour prouver la convergence uniforme d'une série de fonctions, il faut pouvoir majorer le reste de cette série, ce qui est une tâche difficile en général, mais pas toujours.
77.1 Cas d'une série télescopique
La série de fonctions $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge uniformément sur Ω si, et seulement si, la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω.
77.2 Cas d'une série alternée
On considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions à valeurs *réelles* et on suppose que :
– Pour tout $x \in \Omega$, la suite réelle $\big(v_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant ;
– La suite de fonctions $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω.
Alors la série de fonctions $\sum(-1)^n v_n$ converge uniformément sur Ω.
77.3 On verra plus loin [82] une condition suffisante très simple pour établir la convergence uniforme d'une série de fonctions.

78. Convergence non uniforme
Les résultats suivants sont souvent utilisés pour démontrer que la convergence d'une série de fonctions n'est pas uniforme.
78.1 *Suite de* **[18]** – Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur Ω et s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω telle que la suite

$$\big(R_n(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

ne tende pas vers 0, alors la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur Ω.
78.2 *Suite de* **[76]** – Si chaque fonction u_n admet une limite (finie) $\ell_n \in E$ au voisinage de ω :
1. Si la série $\sum \ell_n$ converge et que sa somme est différente de la limite de S au voisinage de ω, alors la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge uniformément sur aucun voisinage de ω.
2. Si la série $\sum \ell_n$ diverge, alors la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge uniformément sur aucun voisinage de ω.

79. Exemples
79.1 La série de fonctions $\sum xe^{-nx}$ converge simplement sur le segment $\Omega = [0,1]$. Elle converge uniformément sur $[a,1]$ pour tout $0 < a < 1$ sans converger uniformément sur Ω.
79.2 Fonction ζ de Riemann
La série de fonctions $\sum 1/n^x$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ et uniformément sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 1$, sans converger uniformément sur $]1,+\infty[$. →**[108]**
79.3 Fonction ζ alternée
Soit $\Omega =]0,+\infty[$. La série de fonctions $\sum (-1)^n/n^x$ converge simplement sur Ω et uniformément sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, sans converger uniformément sur Ω. →**[108]**
79.4 La série de fonctions $\sum x^n/(3n+2)$ converge simplement sur $\Omega = [-1,1[$. Elle converge uniformément sur $[-1,a]$ pour tout $0 < a < 1$ sans converger uniformément sur Ω.

IV.3 Convergence normale

80. ✍ *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions bornées sur Ω. La série de fonctions $\sum u_n$* ***converge normalement sur*** *Ω lorsque la série numérique $\sum N_\Omega^\infty(u_n)$ converge.*
81.1 ➔ *La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur Ω si, et seulement si, il existe une série numérique $\sum M_n$ (absolument) convergente telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \Omega,\quad \big|u_n(x)\big| \leqslant M_n.$$

81.2 Si $\sum u_n$ est une série de fonctions qui converge normalement sur Ω et si v est une fonction bornée sur Ω, alors la série de fonctions $\sum (u_n v)$ converge normalement sur Ω.

82. ➔ Convergence normale et convergence uniforme [67]
Si une série de fonctions à valeurs dans E converge normalement sur Ω, alors elle est converge absolument et uniformément sur Ω.

83. Exemples
83.1 La série $\sum 1/(n^2+x^2)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
83.2 La série $\sum (-1)^n/(n+x^2)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, mais ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.
83.3 La série de fonctions

$$\sum \frac{1}{n+1}\mathbb{1}_{[n,n+1[}$$

converge uniformément et absolument sur $\mathbb{R}$, mais ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

84. Convergence normale des séries entières
Les **séries entières** $\sum a_n x^n$ seront traitées en détail dans un chapitre ultérieur.
84.1 ➔ *La série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement sur le segment $[-R,R]$ si, et seulement si, la série numérique $\sum a_n R^n$ converge absolument.*
84.2 La série de fonctions $\sum x^n/n^2$ converge normalement sur le segment $[-1,1]$.
84.3 La série de fonctions $\sum n^2 x^n$ converge normalement sur le segment $[-a,a]$ pour tout $0 < a < 1$, mais ne converge pas normalement sur le segment $[-1,1]$.
84.4 La série de fonctions $\sum x^n/n!$ converge normalement sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$, mais elle ne converge pas normalement sur $\mathbb{C}$.

85. Convergence normale des séries trigonométriques
85.1 La série de fonctions $\sum a_n \cos nx$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, la série numérique $\sum a_n$ converge absolument.
85.2 Pour tout $(a_n,b_n) \in \mathbb{R}^2$, il existe $\varphi_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\,\cos(nx+\varphi_n).$$

85.3 ➔ *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites réelles. Les propositions suivantes sont équivalentes.*
1. *La série de fonctions $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.*
2. *La série numérique $\sum \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ converge.*
3. *Les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.*

Entraînement

86. Questions pour réfléchir
1. *Suite de* **[68]** – On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur Ω.
1.a Sa somme est aussi la limite simple de la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
1.b Ses sommes partielles S_n, sa somme S et ses restes R_n sont liés par la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \Omega,\quad S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

et la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur Ω vers la fonction nulle.
2. La série de fonctions $\sum u_n$ converge absolument sur Ω si, et seulement si, pour tout $x \in \Omega$,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\, N(x,\varepsilon) \leqslant n \leqslant p,\quad \sum_{k=n}^{p} \big|u_k(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

3. On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur Ω. Condition sur la fonction v pour que la série de fonctions $\sum (u_n v)$ converge uniformément sur Ω ?
4. Condition sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$?

87. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in [0,\pi],\quad f_n(x) = \cos^n x \sin x.$$

Pour $0 < \theta < \pi/2$:
1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[\theta,\pi-\theta]$, mais pas sur $[0,\theta]$, ni sur $[\pi-\theta,\pi]$.
2. Elle converge uniformément sur $[\theta,\pi]$, mais pas sur $[0,\theta]$.

V
Étude de la somme

88. Soit $\sum u_n$, une série de fonctions qui converge simplement sur Ω, de somme S.

V.1 Continuité

89. ➔ *Suite de* **[88]** – *Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues sur Ω qui converge uniformément sur un voisinage de x_0 dans Ω, alors sa somme S est continue au point x_0.*
90. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$$

est continue sur $]0,+\infty[$, tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

91. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et tend vers 1 au voisinage de $+\infty$.

92. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \,\ell\mathrm{n}\Big(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\Big)$$

est paire et continue sur $\mathbb{R}$. Elle tend vers $\ell\mathrm{n}(2/\pi)$ au voisinage de $\pm\infty$ [**4.93**].

93. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall\ x > 0, \quad S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x}.$$

En particulier, $S(x) \sim 1/x$ au voisinage de 0.

94. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\Big)$$

est croissante et continue sur $]-1, +\infty[$.
Pour tout $x > -1$,

$$S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$$

et $S(x) \sim -1/(1+x)$ lorsque x tend vers -1.
Pour tout $n \geqslant 1$, on a $S(n) = H_n$ et $S(x) \sim \ell\mathrm{n}\, x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

95. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$

est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
Le produit $xS(x)$ tend vers $\pi^2/6$ lorsque x tend vers $+\infty$ et

$$S(x) \sim \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t + t^2 x} \sim -\ell\mathrm{n}\, x$$

lorsque x tend vers 0.

96. Soit $\alpha > 0$. La fonction f, définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^\alpha x},$$

est strictement décroissante et continue sur $]0, +\infty[$. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et comme elle tend vers $+\infty$ au voisinage de 0, la série ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.
Lorsque x tend vers 0,

$$f(x) \sim \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha x^{1/\alpha}}.$$

97. La fonction S_0 définie par

$$\forall\ x > 0, \quad S_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}\Big)$$

est continue sur $]0, +\infty[$, tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et $S(1) = e - 1$ par [**129**].

On déduit de la relation fonctionnelle

$$\forall\ x > 0, \quad xS_0(x) - S_0(x+1) = 1$$

que $S_0(x) \sim e/x$ au voisinage de 0 et que $S_0(x) \sim 1/x$ lorsque x tend vers $+\infty$. →[**113**]

98. Variante
Soit $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite u_n par

$$\forall\ 0 \leqslant p \leqslant n, \quad u_n(p) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\ p > n, \quad u_n(p) = (1 - n/p)^{p\alpha},$$

de telle sorte que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(p) = \sum_{n=0}^{p} \Big(1 - \frac{n}{p}\Big)^{p\alpha}.$$

1.
$$\forall\ (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad 0 \leqslant u_n(p) \leqslant e^{-n\alpha}.$$

2. Considérée comme une série de fonctions définies sur $\Omega = \mathbb{N}$, la série $\sum u_n$ converge normalement sur Ω. En particulier,

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} u_n(p) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}.$$

V.2 Intégration terme à terme (version uniforme)

99. La convergence uniforme sur un segment permet d'intégrer terme à terme la somme d'une série de fonctions. On applique souvent les théorèmes [**99.1**] et [**99.2**] en vérifiant que la série converge normalement sur $[a, b]$.

99.1 ➔ *Suite de* [**88**] – *Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues qui converge uniformément sur $[a, b]$, alors la série numérique*

$$\sum \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

99.2 ➔ *Suite de* [**88**] – *Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues et intégrables sur l'intervalle borné $]a, b[$, qui converge uniformément sur $]a, b[$. Alors la série numérique*

$$\sum \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

100. Comparatif des théorèmes d'intégration terme à terme
On dispose ainsi de trois théorèmes pour justifier une intégration terme à terme :

1. la version uniforme du théorème d'intégration terme à terme [**99**] ;
2. la version lebesguienne du théorème d'intégration terme à terme [**9.98**] ;
3. et le théorème de convergence dominée appliqué à la suite des sommes partielles [**9.100.2**].

100.1 On doit commencer par essayer d'utiliser le théorème lebesguien [**9.98**], qui s'applique sur un intervalle quelconque (borné ou non).

100.2 Si les hypothèses du théorème [**9.98**] ne sont pas satisfaites :

1. Sur un intervalle borné, et *seulement* sur un intervalle borné, on peut essayer d'utiliser le théorème [**99**] en cherchant à vérifier
   - 1.a si la convergence est normale
   - 1.b ou, à défaut, si la convergence est uniforme ;

2. Sur un intervalle quelconque, on ne peut qu'essayer d'utiliser le théorème de convergence dominée.

101. Le théorème [**99.1**] démontre que

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)},$$

tandis que, dans ce cas, le théorème lebesguien [**9.98**] ne peut pas s'appliquer.

102. La fonction Ψ définie par

$$\forall\, x \in]0,1[,\quad \Psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\Big)$$

est intégrable sur $]0,1[$ et $\int_0^1 \Psi(x)\,\mathrm{d}x = \ell\mathrm{n}\, 2$.

103. On *admet* que

$$\forall\, 0 < \alpha \leqslant 1,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2} = \frac{\pi \operatorname{ch} \pi\alpha}{\operatorname{sh} \pi\alpha} - \frac{1}{\alpha}.$$

En intégrant cette égalité sur $]0,1]$, on obtient

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big) = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}.$$

104. *Suite de* [**9.104**] – Les séries de fonctions

$$\sum \frac{\sin nt}{n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\cos nt}{n}$$

ne convergent pas uniformément sur $]0,2\pi[$.

V.3 Dérivation terme à terme

105. La convergence uniforme locale permet de dériver terme à terme la somme d'une série de fonctions. On applique souvent les théorèmes [**106**] et [**107**] en vérifiant que la série converge normalement sur tout segment de l'intervalle Ω. Il arrive parfois que la convergence soit normale sur Ω tout entier.

106. ➔ *Suite de* [**88**] – *Si $\sum u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle Ω dont la série dérivée $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de Ω, alors la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et*

$$\forall\, x \in \Omega,\quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

107. ➔ *Si $\sum u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ sur Ω telle que, pour tout entier $k \leqslant p$, la série*

$$\sum u_n^{(k)}$$

converge uniformément sur tout segment de Ω, alors la somme S est de classe $\mathscr{C}^p$ sur Ω et

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \forall\, x \in \Omega,\quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x).$$

108. Les fonctions de Riemann
Les fonctions de Riemann sont définies par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad \zeta_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

108.1

$$\forall\, x > 1,\quad \zeta_a(x) = (2^{1-x}-1)\zeta(x)$$

108.2 La fonction ζ est décroissante, convexe et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. La fonction ζ_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

108.3 Les deux fonctions ζ et ζ_a tendent respectivement vers 1 et vers -1 au voisinage de $+\infty$.
Pour une étude plus précise de ζ, voir [**4.97**].

109. La fonction S définie par

$$S(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\Big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et de période 1. Elle est strictement décroissante sur $]0,1[$ et n'est pas intégrable sur $]0,1[$.

110. *Suite de* [**91**] – La fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

111. *Suite de* [**93**] – La fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et $S(x) \sim 1/2x$ au voisinage de $+\infty$.

Entraînement

112. Questions pour réfléchir

1. Si la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $]-1,1[$, alors les deux séries $\sum a_n$ et $\sum(-1)^n a_n$ convergent.
2. Soit $I =]a,b[$, un intervalle ouvert borné. Si $\sum u$ est une série de fonctions continues sur I qui converge normalement sur I, alors les hypothèses du théorème lebesguien d'intégration terme à terme [**9.98**] sont satisfaites.
3. *Suite de* [**100**] – Si la série numérique

$$\sum \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

est semi-convergente, quels théorèmes d'intégration terme à terme peut-on appliquer ?

113.1 La fonction S_1 définie par

$$\forall\, x > 0,\quad S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

113.2 Lorsque x tend vers 0,

$$S_1(x) \sim \frac{1}{x}.$$

113.3 La fonction S_1 tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et comme

$$\forall\, x > 0,\quad xS_1(x) - S_1(x+1) = \frac{1}{e}$$

alors $S_1(x) \sim 1/ex$ au voisinage de $+\infty$.

113.4 *Suite de* [**97**] – On déduit de [**129**] que $S_1(1) = 1 - e^{-1}$ ainsi que

$$\forall\, x > 0,\quad S_1(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{e}S_0(x).$$

114. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ell\mathrm{n}(1+n^2x^2)}{n^3}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

115. Fonction génératrice d'une loi de probabilité [10]

115.1 La fonction G est croissante, continue et convexe sur le segment $[0,1]$. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$.

115.2 Si la série numérique $\sum np_n$ converge, alors la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et

$$\forall\, x \in [0,1],\quad G'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)p_{n+1}x^n.$$

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

116. Exemples et contre-exemples

1. Exemple de suite de fonctions bornées qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas bornée.
2. Exemple de suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction bornée sans être uniformément bornée.
3. Exemple de suite de fonctions polynomiales qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas polynomiale.
4. Exemple de suite de fonctions strictement positives (resp. strictement négatives) qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas strictement positive (resp. strictement négative).
5. Exemple de suite de fonctions strictement croissantes (resp. strictement décroissantes) qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas strictement croissante (resp. strictement décroissante).
6. Exemple de suite de fonctions strictement convexes (resp. strictement concaves) qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas strictement convexe (resp. strictement concave).
7. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions intégrables sur Ω telle que la limite simple f soit continue par morceaux mais pas intégrable sur Ω.
8. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues (resp. dérivables, resp. continues par morceaux) telle que la limite simple f ne soit pas continue (resp. dérivable, resp. continue par morceaux) sur Ω.
9. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions lipschitziennes qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas lipschitzienne.
10. Exemple de fonction bornée sur tout segment $[A, B]$ contenu dans $]0,1[$ sans être bornée sur $]0,1[$.
11. Exemple de fonction lipschitzienne sur tout segment $[A, B] \subset]0,1[$ sans être lipschitzienne sur $]0,1[$.
12. Exemple de fonction intégrable sur tout segment $[A, B]$ contenu dans $]0,1[$ mais pas intégrable sur $]0,1[$.
13. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tout segment $[A, B] \subset]a, b[$, mais ne converge pas uniformément sur $]a, b[$.
14. Exemple de suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent uniformément sur Ω sans que la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω.
15. Exemple de suite de fonctions polynomiales $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas polynomiale.
16. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur l'intervalle $\Omega =]0, +\infty[$ telles que les limites
$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$
existent sans être égales.
17. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur l'intervalle $\Omega =]0, +\infty[$ telles qu'une seule des deux limites
$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$
existe.
18. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur Ω qui converge uniformément sur Ω sans converger en moyenne sur Ω vers f.
19. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux sur Ω qui converge uniformément sur tout segment $[A, B] \subset \Omega$ vers une fonction continue par morceaux sans que la convergence soit dominée.
20. Exemple de série $\sum(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et intégrables sur $\Omega = [0, +\infty[$ qui converge normalement sur Ω mais telle qu'on ne puisse pas intégrer terme à terme.
21. Exemples de situation où une fonction est approchée par une fonction en escalier.
22. Exemple de situation où une fonction est approchée par une fonction affine par morceaux.

117. Méthodes

1. *Suite de* **[5]** – Liste, aussi complète que possible, des propriétés ponctuelles des fonctions qui sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. *Suite de* **[8]** – Liste, aussi complète que possible, des propriétés locales des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
3. *Suite de* **[8]** – Liste, aussi complète que possible, des propriétés globales des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
4. De quelles manières peut-on démontrer que la suite des fonctions $f_n = [x \mapsto x^n]$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $[0,1[$?
5. Quelles propriétés de la somme d'une série de fonctions peuvent-elles être déduites de la convergence simple ?

118. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* **[16]** – Que dire d'une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$?
2. Une fonction φ est **réglée** sur l'intervalle $\Omega =]a, b[$ lorsque, pour tout $x \in]a, b[$, la fonction φ admet une limite à gauche et une limite à droite (finies) en x.
Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions réglées sur $]a, b[$ converge uniformément sur $]a, b[$ vers f, alors f est réglée.
3. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux sur Ω converge uniformément sur Ω vers f, la fonction f est-elle continue par morceaux sur Ω ?
4. En quel(s) sens une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$ est-elle la limite d'une suite de fonctions polynomiales ?
5. Si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors f est une fonction polynomiale.

Approfondissement

119. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I =]0, +\infty[$, on pose
$$f_n(x) = nx^2 e^{-nx} \quad \text{et} \quad g_n(x) = n^2 x e^{-nx}.$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'intervalle I vers la fonction nulle.
2. Pour tout $a > 0$, la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers la fonction nulle, mais elle ne converge pas uniformément sur I.

120. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}.$$
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Condition sur l'intervalle I pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I ?

121. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$\forall\, x \in [0,1], \quad f_n(x) = 4^n (x^{2^n} - x^{2^{n+1}}).$$
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle. Condition sur l'intervalle $I \subset [0,1]$ pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I ?

122. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n f(x)$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$. Condition sur f pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$?

123. Approximation uniforme de $\exp(-x)$
Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in I = [0, +\infty[$, on pose
$$f_n(x) = (1 + x/n)^{-n}.$$

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur I vers $f = [x \mapsto e^{-x}]$.

2. Comme

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad t - t^2/2 \leqslant \ell\mathrm{n}(1+t) \leqslant t,$$

alors, pour tout $a > 0$, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,a]$ vers f et

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall\, x \in I, \quad f_n(x) \geqslant f(x) > 0.$$

3. Soit $a > 0$. Alors

$$\forall\, x \geqslant a, \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant f(a) + \big[f_n(a) - f(a)\big]$$

et la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur I vers f.

124. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$f_n(x) = \left|\begin{array}{ll} n^2 x(1-nx) & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant 1/n, \\ 0 & \text{pour } 1/n < x \leqslant 1. \end{array}\right.$$

1. La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle. Elle converge uniformément sur $[a,1]$ pour tout $0 < a < 1$.
2. Comme la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

ne tend pas vers 0, la convergence n'est ni dominée, ni uniforme sur $]0,1]$.

125. Méthode de Picard
On note f_0, la fonction identiquement égale à 1 sur le segment $[0,1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t.$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. La série de fonctions $\sum(f_n - f_{n+1})$ converge normalement sur $[0,1]$.
3. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, telle que

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in [0,1], \quad f'(x) = f(x - x^2).$$

126. Soit $I = [0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$. Pour tout $x \in I$, on pose **[4.55]**

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}.$$

La fonction S est continue sur I et

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad S(1/x) = S(x).$$

La fonction S est croissante sur $[0,1[$, décroissante sur $]1,+\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

127. Approximation uniforme et polynômes de Bernstein
Pour tout entier $n \geqslant 1$, toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ et tout $x \in [0,1]$, on pose

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big) x^k (1-x)^{n-k}.$$

127.1 Un endomorphisme T de $\mathscr{C}^0([0,1])$ est dit **positif** lorsque l'inégalité

$$\big[\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) \leqslant g(x)\big]$$

implique l'inégalité

$$\big[\forall\, x \in [0,1], \quad T(f)(x) \leqslant T(g)(x)\big].$$

1. L'application B_n est un endomorphisme positif (non surjectif) de $\mathscr{C}^0([0,1])$.
2.

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0([0,1]),\ \forall\, x \in [0,1], \quad \big|B_n(f)(x)\big| \leqslant B_n\big(|f|\big)(x).$$

3.a

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

3.b

$$\forall\, 1 \leqslant k < n, \quad \frac{k}{n}\Big(\frac{k}{n} - 1\Big)\binom{n}{k} = \frac{1-n}{n}\binom{n-2}{k-1}$$

4. On considère les trois fonctions polynomiales I, X et Y définies par

$$\forall\, t \in [0,1], \quad I(t) = 1, \quad X(t) = t, \quad Y(t) = t^2.$$

4.a

$$B_n(I) = I, \qquad B_n(X) = X.$$

4.b

$$B_n(Y) = B_n(Y - X) + B_n(X) = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)Y + \frac{1}{n}X.$$

127.2
5. Soient $\varepsilon > 0$ et $t_0 \in [0,1]$.
5.a Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [0,1] \cap\,]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\,, \quad \big|f(t) - f(t_0)\big| \leqslant \varepsilon$$

et un réel $M_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t) - f(t_0)\big| \leqslant \varepsilon + M_\varepsilon (t - t_0)^2.$$

5.b Pour tout tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0,1]$,

$$\big|B_n(f)(x) - f(t_0)\big| \leqslant \varepsilon + M_\varepsilon B_n(Y - 2t_0 X + t_0^2 I)(x).$$

5.c Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\big|B_n(f)(t_0) - f(t_0)\big| \leqslant \varepsilon + \frac{M_\varepsilon}{4n}.$$

6. La suite $\big(B_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Pour aller plus loin

128. Questions pour réfléchir
1. La notion de convergence absolue n'a d'intérêt que dans un espace complet.
2. On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur Ω et que les fonctions u_n prennent leurs valeurs dans un espace qui n'est pas complet. Que peut-on en déduire ?
3. Si les hypothèses du théorème lebesguien d'intégration terme à terme **[9.98]** sont satisfaites, alors les hypothèses du théorème de convergence dominée **[9.100.2]** le sont aussi.

129. Approximation polynomiale de $\exp(z)$
Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n = \Big(1 + \frac{1}{n}X\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} X^k.$$

129.1 Pour tout nombre *réel* x et pour tout entier n assez grand,

$$P_n(x) = \exp\big[n\,\ell n(1 + {}^{x}\!/_{n})\big] = \exp\big[x + \mathcal{O}({}^{1}\!/_{n})\big].$$

La suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$, mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$, vers la fonction exp.

129.2 Extension au domaine complexe
Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

1.

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \Big|1 + \frac{z}{n}\Big| = \sqrt{1 + \frac{2r}{n}\cos\theta + \frac{r^2}{p^2}}.$$

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on note θ_n, la détermination principale de l'argument de $(1 + {}^{z}\!/_{n})$.
Pour tout n assez grand, $|\theta_n| < {}^{\pi}\!/_{2}$ et

$$p\theta_p = p \operatorname{Arctan}\Big(\frac{r}{p}\sin\theta + o({}^{1}\!/_{p})\Big).$$

3. La suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{C}$ vers la fonction exp.
4. La convergence est uniforme sur tout disque de centre 0 et de rayon $r_0 > 0$.

129.3 Développement en série entière
On fixe $z \in \mathbb{C}$ et, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on définit la *suite* u_k en posant

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad u_k(n) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant k, \quad u_k(n) = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} z^k.$$

On la considère comme une *fonction* définie sur $\Omega = \mathbb{N}$ **[98]**.
La série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur tout voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$, donc

$$\exp(z) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} u_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

130. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction f. Alors :

$$\inf_{x\in[a,b]} f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

131. Soit f, une fonction continue sur $[a, b]$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $[a, b]$ qui converge vers x et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions (pas nécessairement continues) qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite de terme général $f_n(x_n)$ converge vers $f(x)$.

132. *Suite de* **[24.2]** – On suppose que φ est continue sur Ω.

1. La suite de fonctions $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers $\varphi \circ f$.
2. Si Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors la suite $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ contenu dans I.
3. Exemple pour lequel la convergence n'est pas uniforme sur I.

133. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, qui converge uniformément sur $[0, 1[$ vers une fonction f.

1.a La suite $(f_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
1.b Il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. La fonction f admet un prolongement continu sur $[0, 1]$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers ce prolongement.

134. Interpolation et approximation

134.1 Échantillonnage
Soit f, une fonction bornée sur un segment $[a, b]$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on **discrétise** le segment $[a, b]$ en introduisant une subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$:

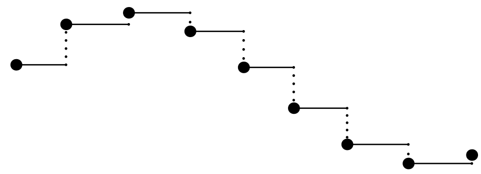
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

et on **échantillonne** la fonction f en considérant la famille $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ définie par :

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad y_k = f(x_k).$$

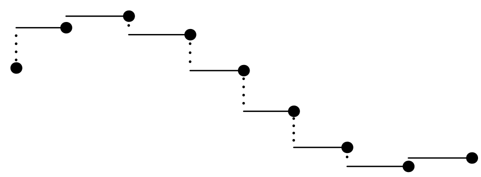
134.2 On peut **interpoler** l'échantillon $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ par des fonctions constantes en posant

$$\forall\, 0 \leqslant k < n,\ \forall\, x_k < t < x_{k+1}, \quad g_n(t) = y_k$$



ou en posant

$$\forall\, 0 < k \leqslant n,\ \forall\, x_k < t < x_{k+1}, \quad h_n(t) = y_{k+1}.$$

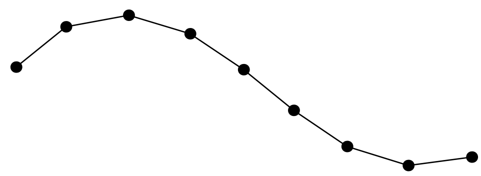


Dans les deux cas, on interpole f par une fonction en escalier.
Comment définir les fonctions en escalier g_n et h_n aux points d'abscisses $t = x_k$? Discuter l'importance de ce choix.

134.3 On peut aussi interpoler l'échantillon $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ par des fonctions affines :

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \forall\, x_k \leqslant t \leqslant x_{k+1},$$
$$\varphi_n(t) = \frac{x_{k+1} - t}{x_{k+1} - x_k} y_k + \frac{t - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1},$$

ce qui revient à interpoler f par une fonction continue et affine par morceaux.



134.4 Il ne faut pas confondre l'**interpolation** :
à partir d'un nombre *fini* de points du graphe de f, on construit une fonction définie sur l'intervalle I tout entier ;
avec l'**approximation** :
on construit une fonction, éventuellement au moyen d'un échantillon de points du graphe de f, qui est *assez proche* (en un sens à préciser) de f mais sans nécessairement passer par certains points choisis du graphe de f.

134.5 Approximation des fonctions continues sur un segment
On suppose que f est continue sur $[a, b]$. Les fonctions g_n, h_n et φ_n ont été définies au **[134.1]**.

1. Si g_n est continue à droite, alors

$$\|f - g_n\|_\infty = \max_{0\leqslant k<n} \sup_{t\in[x_k, x_{k+1}[} \big|f(t) - f(x_k)\big|.$$

2. Si h_n est continue à gauche, alors

$$\|f - h_n\|_\infty = \max_{0 \leqslant k < n} \sup_{t \in]x_k, x_{k+1}]} \left|f(t) - f(x_{k+1})\right|.$$

3. Si la fonction f est continue sur $[a, b]$, alors

$$\|f - \varphi_n\|_\infty \leqslant \max\left\{\|f - g_n\|_\infty, \|f - h_n\|_\infty\right\}$$

134.6→ *Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est approchée uniformément sur $[a, b]$ par des fonctions en escalier sur $[a, b]$ et par des fonctions continues et affines par morceaux sur $[a, b]$.*
134.7 Commenter **[134.4]** à la lumière du théorème **[134.6]**.

135. Théorème de Dini

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues à valeurs réelles, qui converge simplement sur $[a, b]$ vers la fonction nulle. On suppose que cette suite est décroissante, au sens où :

$$\forall\, x \in [a, b], \quad 0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = N^\infty_{[a,b]}(f_n)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $M_n = f_n(x_n)$.
2. Il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un réel $\omega \in [a, b]$.
3. La suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
4. Si la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, p \leqslant \varphi(n), \quad f_p(x_{\varphi(n)}) \geqslant f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \geqslant \varepsilon.$$

En particulier, $f_p(\omega) \geqslant \varepsilon$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Conclure.

136. Une courbe de Peano

Une **courbe de Peano** est un arc paramétré

$$F = \left[t \mapsto \left(x(t), y(t)\right)\right]$$

continu sur $[0, 1]$, dont le support est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.
L'existence d'une telle courbe signifie qu'il existe des applications continues et surjectives de $[0, 1]$ sur $[0, 1] \times [0, 1]$.
La construction suivante est dûe à Liu Wen, *A Space Filling Curve*, The American Mathematical Monthly, Vol. 90, No. 4 (Apr., 1983), p. 283.
Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant 9$, on pose $I_k = \left[k/10, (k+1)/10\right]$.
136.1 Il existe deux fonctions f et g, continues sur $\mathbb{R}$, de période 1, telles que

$$\begin{aligned} &\forall\, t \in I_1 \cup I_3, \quad f(t) = 0 \qquad &&\forall\, t \in I_5 \cup I_7, \quad f(t) = 1 \\ &\forall\, t \in I_1 \cup I_5, \quad g(t) = 1 \qquad &&\forall\, t \in I_3 \cup I_7, \quad g(t) = 0. \end{aligned}$$

136.2 Les fonctions φ et ψ définies pour tout $t \in [0, 1]$ par

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} f(10^k t) \quad \text{et} \quad \psi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} g(10^k t)$$

sont continues sur $[0, 1]$.
136.3 Soient $0 < x, y < 1$, représentés en base 2 :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{2^k} \quad \text{et} \quad y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{y_k}{2^k}.$$

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose

$$t_k = \left|\begin{array}{l} 1 \text{ si } (x_k, y_k) = (0, 0), \\ 3 \text{ si } (x_k, y_k) = (0, 1), \\ 5 \text{ si } (x_k, y_k) = (1, 0), \\ 7 \text{ si } (x_k, y_k) = (1, 1) \end{array}\right.$$

et enfin

$$t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t_k}{10^k} \in]0, 1[\,.$$

Alors $(x, y) = F(t)$.