Séries entières

1. Les séries entières sont les séries de fonctions les plus simples : la somme d'une série entière est, sur son ensemble de définition, la limite simple d'une suite de fonctions polynomiales.

1.1 ✍ *La **série entière** de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série de fonctions*

$$\sum a_n z^n$$

où la variable z est réelle ou complexe.

1.2 Par un abus classique, l'expression $\sum a_n z^n$ pourra désigner la série entière (*série de fonctions*, pour laquelle z est une variable) aussi bien que la série réelle ou complexe (*série numérique*, où z est fixé).

I
Rayon de convergence

2. Échauffement

2.1 Si $u_n = \mathcal{O}(r^n)$ avec $0 \leqslant r < 1$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

2.2 Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2.3 Si $r \leqslant R_b$ pour tout $r < R_a$, alors $R_a \leqslant R_b$.

3. Lemme d'Abel

Pour tout $r > 0$ et tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq r$,

$$a_n z^n = (a_n r^n)\Big(\frac{z}{r}\Big)^n.$$

Il reste à choisir le réel r de telle sorte que le second membre ne reste pas sous forme indéterminée.

3.1 ➔ *Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.*

3.2 ➔ *Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > |z_0|$.*

I.1 Domaine de convergence

4. L'ensemble de définition de la somme d'une série entière à une géométrie assez simple puisque l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente est un disque (ouvert ou fermé) centré en 0.

5. Soit $\sum a_n z^n$, une série entière. L'ensemble $\mathscr{B}$ des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée est un intervalle qui contient 0.

6. Rayon de convergence infini

6.1 ✍ *On dit que le **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ est **infini** lorsque la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $r \in \mathbb{R}_+$.*

6.2 ➔ *Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est infini si, et seulement si, la série complexe $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

6.3 Si $a_n = 0$ à partir d'un certain rang, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est infini et la somme de cette série entière est une fonction polynomiale.

7. Rayon de convergence fini

7.1 ✍ *On dit que le **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ est **fini** lorsqu'il existe $r_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que la suite $(a_n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.*

7.2 *Suite de* [**5**] – Si $\mathscr{B} \neq \mathbb{R}_+$, alors $\mathscr{B}$ est un intervalle borné, de la forme $[0, R[$ ou de la forme $[0, R]$.

7.3 ✍ *Soit $\sum a_n z^n$, une série entière dont le rayon de convergence est fini. Le **rayon de convergence** de cette série entière est la borne supérieure de l'ensemble des réels $r \in \mathbb{R}_+$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.*

8. ➔ **Première caractérisation du rayon de convergence**

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à R si, et seulement si,

8.1 *pour $|z| < R$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et*

8.2 *pour $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.*

9. Exemples

9.1 Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne tend pas vers 0, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à 1.

9.2 Si $a_n = n^2$ lorsque l'entier n est premier et $a_n = 0$ sinon, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à 1.

9.3 On note R_a, le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$ est égal à $\sqrt{R_a}$ et le rayon de convergence de $\sum a_n^2 z^n$ est égal à R_a^2.

10. ➔ **Deuxième caractérisation du rayon de convergence**

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à R si, et seulement si,

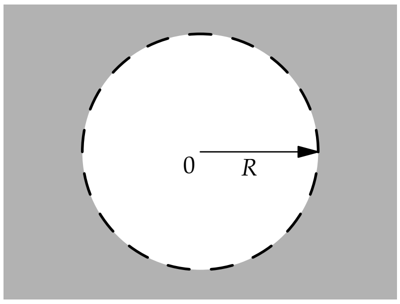
10.1 *pour $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et*

10.2 *pour $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.*

11. Exemples

11.1 Si la série $\sum a_n$ converge absolument, alors $R_a \geqslant 1$ et la série converge sur le disque unité fermé.

11.2 Si la série $\sum a_n$ est semi-convergente, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à 1.



12. ✍ *Si le rayon de convergence R d'une série entière est un réel strictement positif, le **disque ouvert de convergence** est $[|z| < R]$ et le **bord** du disque de convergence est le cercle $[|z| = R]$.*

I.2 Calcul du rayon de convergence

13. Les principales méthodes pour calculer le rayon de convergence d'une série entière sont les deux caractérisations [**8**] et [**10**], ainsi que leur synthèse [**14**]. Leur mise en œuvre demande de connaître le comportement asymptotique de suites et de séries de référence, notamment les séries du [**15**].

14. ➔ *Si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 pour $|z| < R_0$ et si la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour $|z| > R_0$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à R_0.*

15. Exemples de référence

Série entière	Paramètre	Rayon de convergence
$\sum z^n/n!$		∞
$\sum n! z^n$		0
$\sum n^\alpha z^n$	$(\alpha \in \mathbb{R})$	1
$\sum q^n z^n$	$(q \in \mathbb{C}^*)$	$1/\lvert q\rvert$

Utilisation de la règle de D'Alembert

16. La règle de D'Alembert [**4.46**] permet de calculer très facilement le rayon de convergence de certaines séries entières, notamment quand il n'est pas possible de comparer les coefficients de la série entière à ceux des séries de référence [**15**]. Cependant, elle reste beaucoup moins utile que les théorèmes [**8**], [**10**] et [**14**].

16.1 Le rayon de convergence de $\sum n!z^{n^2}$ est égal à 1.
16.2 Le rayon de convergence de $\sum \frac{n^n}{n!}z^{3n}$ est égal à $e^{-1/3}$.
16.3 Le rayon de convergence de $\sum \binom{2n}{n}z^n$ est égal à $1/4$.
16.4 Le rayon de convergence de $\sum \frac{(3n)!}{(n!)^3}z^n$ est égal à $1/27$.
17.1 Si $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à $1/\gamma$.
17.2 Si $|a_{n+1}|/|a_n|$ tend vers $\gamma \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$ est égal à $1/\sqrt{\gamma}$.
18. **Insuffisance de la règle de D'Alembert**
18.1 On pose $a_n = 2^n$ si n est pair et $a_n = 3^n$ si n est impair. La règle de D'Alembert ne prouve la convergence de $\sum a_n z^n$ pour aucun $z \neq 0$, alors que le rayon de convergence est égal à $1/3$.
18.2 La règle de D'Alembert ne permet pas de calculer le rayon de convergence de la série entière du [**9.2**].
18.3 Elle permet de deviner le résultat de l'exemple [**9.3**], mais pas de le démontrer.

I.3 Calcul par comparaison

19. Plus la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients tend vite vers 0, plus le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est grand. On compare en général les coefficients a_n à ceux d'une série entière de référence [**15**].
20. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum a_{n+p}z^n$ ont même rayon de convergence.
21. ➜ *Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum na_n z^n$ ont même rayon de convergence.*
22. Si le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est strictement positif, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n/n!$ est infini.
23. ➜ *On note R_a et R_b, les rayons de convergence respectifs (finis ou non) des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.*
23.1 *Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.*
23.2 *Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.*
24. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
25. On suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}.$$

Alors $R_b \geqslant \max\{1, R_a\}$ et si $R_b > 1$, alors $R_b = R_a$.
26. **Somme de deux séries entières**
26.1 ➜ *Soient R_a, R_b et R_0, les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum (a_n+b_n)z^n$. Alors*

$$R_0 \geqslant \min\{R_a, R_b\}$$

et si $R_a < R_b$, alors $R_0 = R_a$.
26.2 Les rayons de convergence de $\sum z^n$ et de $\sum (2^{-n}-1)z^n$ sont égaux à 1, mais celui de leur somme est égal à 2.
26.3 Les rayons de convergence de $\sum z^n$, de $\sum (-1)^n z^n$ et de leur somme sont égaux à 1.

Produit de Cauchy

27. Le **produit de Cauchy** [**5.55.2**] de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

27.1 ✍ *Le **produit de Cauchy** des deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière*

$$\sum \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Big) z^n.$$

27.2 ➜ *On note R_a, R_b et R_c, les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et de leur produit de Cauchy $\sum c_n z^n$. Alors*

$$R_c \geqslant \min\{R_a, R_b\} \quad et \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\Big)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$.
28. **Exemples**
28.1 On note $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n$.

$$\forall\, |z| < \min\{1, R_a\}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = \frac{1}{1-z}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

28.2 On pose $a_0 = b_0 = 1$ et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad a_n = 2 \quad \text{et} \quad b_n = 2(-1)^n.$$

Les rayons de convergence de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont égaux à 1, tandis que celui de leur produit de Cauchy est infini.

Entraînement

Dans les questions qui suivent, on convient de noter R_a et R_b, les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
29. **Questions pour réfléchir**
1. Si la série $\sum a_n z^n$ converge pour $z = z_0$, converge-t-elle aussi pour $z = -z_0$?
2. Si la série $\sum a_n z^n$ converge pour $z = z_0$, converge-t-elle aussi pour $z = \overline{z_0}$?
3. Justifier la description du domaine de convergence d'une série entière donnée au [**4**].
4. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence (que ce rayon soit fini ou infini).
5. Si $b_n = a_n q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $R_b = R_a/q$.
6. Si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $R_a \geqslant |z|$.
7. Si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $R_a \geqslant |z|$.
8. Si la série complexe $\sum a_n z^n$ converge, alors $R_a \geqslant |z|$.
9. Si la série complexe $\sum a_n z^n$ diverge, alors $R_a \leqslant |z|$.
10. Si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors $R_a \leqslant |z|$.
11. Si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors $R_a \leqslant |z|$.
12. Si $R_a > 1$, alors la série $\sum a_n$ est absolument convergente et, en particulier, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
13.a Si $r < R_a$, alors $a_n = o(1/r^n)$.
13.b Si $r > R_a$, est-il vrai que $1/r^n = o(a_n)$?
14. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne tend pas vers 0, alors $R_a = |z_0|$.
15. Si la série $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $R_a = |z_0|$.
16. Si la série $\sum a_n (1+i)^n$ converge, alors $R_a \geqslant \sqrt{2}$.
17. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $R_a \geqslant 1$.
18. Si $a_n = \mathcal{O}(q^n)$ avec $q \in \mathbb{R}_+^*$, alors $R_a \geqslant 1/q$.
19.a Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est infini si, et seulement si, $a_n = o(\theta^n)$ pour tout $\theta > 0$.
19.b Si $\theta^n = o(a_n)$ pour tout $\theta > 0$, alors $R_a = 0$.
20. Les propositions suivantes sont équivalentes :
20.a $R_a > 0$.
20.b Il existe $\theta > 0$ tel que $a_n = o(\theta^n)$.
20.c Il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leqslant M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
21. S'il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \geqslant M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $R_a \leqslant 1/M$.

30. On suppose qu'il existe $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} + \alpha a_{n+1} + \beta a_n = 0.$$

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est non nul. Condition pour que ce rayon soit fini ?
31. On suppose que les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et de $\sum b_n z^n$ sont égaux à R et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = b_{2n+1} = 0.$$

Alors le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est égal à R.

32. *Suite de* **[23]** – Soit $\sum a_n$, une série divergente de terme général positif. On note $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite des sommes partielles de $\sum a_n$ et on suppose que $a_n = o(b_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Alors $R_a = R_b = 1$.

33. *Suite de* **[23]** – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

1. Comparer R_a et R_b lorsque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. Si $R_a > 1$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant une suite géométrique de raison $0 < q < 1$ et $R_b \geqslant 1$.
3. Si $0 < R_a < 1$, alors il existe $q > 1$ tel que $a_n = o(q^n)$, donc $b_n = o(q^n)$ et $R_b \geqslant R_a$.
4. On suppose que $a_{2n} = 4^n$ et que $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comparer R_a et R_b.

34. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n, la n-ième somme partielle de la série harmonique. Le rayon de convergence de $\sum H_n x^n$ est égal à 1 et

$$\forall\ |x| < 1, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \frac{-\ell\mathrm{n}(1-x)}{1-x}.$$

35. Calculer les rayons de convergence des séries entières suivantes.

35.1

$$\sum \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \sum n^3 z^n \quad \sum \frac{z^n}{(2n+1)!} \quad \sum \frac{3^n(n^2+2)}{2n^2+1} z^n$$

$$\sum n! z^n \quad \sum n^{\sqrt{n}} z^n \quad \sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n \quad \sum \frac{(-1)^n z^{3n+1}}{(3n+1)!}$$

$$\sum \sqrt{n} z^n \quad \sum e^{-n^2} z^n \quad \sum \frac{\ell\mathrm{n}\, n}{n^2} z^{2n} \quad \sum \frac{\ell\mathrm{n}(1+n^2)}{3^{n+1} n} z^n$$

$$\sum z^{n^2} \quad \sum (\sin n) z^n \quad \sum \frac{2^n}{n^2+1} z^n \quad \sum \mathrm{Arccos}\, \frac{n^3-1}{n^3} z^n$$

35.2

$$\sum \big(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}\big) z^n \qquad \sum \Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big)^{n^2} z^n$$

II
Étude de la somme

36. On suppose dans ce paragraphe que le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum a_n z^n$ est strictement positif. La somme S de cette série entière est alors définie *au moins* sur le disque ouvert de convergence :

$$\Omega = \big\{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| < R_a\big\}$$

et *au plus* sur le disque fermé $\overline{\Omega} = \big\{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| \leqslant R_a\big\}$.

II.1 Continuité

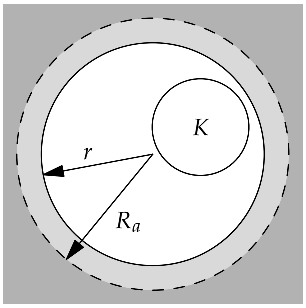
37. La série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque ouvert de convergence si, et seulement si, la série numérique $\sum a_n R_a^n$ converge absolument.

38. **Continuité sur le disque ouvert de convergence**

38.1 Si K est un disque fermé contenu dans le disque ouvert Ω, alors il existe $0 < r < R_a$ tel que K soit contenu dans le disque fermé $[|z| \leqslant r]$.

38.2 ➔ *La série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé contenu dans le disque ouvert de convergence.*

38.3 ➔ *La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.*



39. **Continuité au bord**

Sur le disque ouvert de convergence Ω et hors du disque fermé, le comportement d'une série entière est très contrasté **[14]**, quelle que soit la série entière.

En revanche, le comportement sur le cercle $\partial\Omega = [|z| = R_a]$ varie d'une série entière à l'autre.

39.1 Si la série numérique $\sum a_n R_a^n$ est absolument convergente, alors la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ est continue sur le disque fermé $\overline{\Omega}$.

39.2 Si la suite *réelle* $(u_n R_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série entière $\sum u_n x^n$ converge uniformément sur $[-R_a, 0]$ et sa somme est continue sur $[-R_a, 0]$.

40. **Développement limité au voisinage de l'origine [36]**

40.1 Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme de $\sum a_{n+p} z^n$ est bornée au voisinage de 0.

40.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé et pour $z \in \Omega$ voisin de 0,

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \mathcal{O}(z^{n+1}).$$

II.2 Dérivabilité

41. On suppose encore que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est strictement positif, mais on considère maintenant la somme S comme une fonction de la variable *réelle* t qui parcourt l'**intervalle ouvert de convergence** $]-R, R[$.

41.1 Pour tout $p \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} t^n$$

est égal à R.

41.2 ➔ *Si le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est strictement positif, alors sa somme S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$ et on obtient ses dérivées en dérivant terme à terme.*

$$\forall\ p \geqslant 1,\ \forall\ t \in\ ]-R, R[, \quad S^{(p)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} t^n$$

En particulier,

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

41.3 ➔ **Formule de Taylor**

La somme S d'une série entière vérifie la ***formule de Taylor*** *:*

$$\forall\ t \in\ ]-R, R[, \quad S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

où R est le rayon de convergence de la série entière.

42. ➔ **Unicité du développement en série entière**

Si les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et de $\sum b_n z^n$ sont strictement positifs et s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\ t \in\ ]-\alpha, \alpha[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n,$$

alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Entraînement

43. Questions pour réfléchir

1. Une série entière converge normalement sur le disque ouvert de convergence Ω si, et seulement si, elle converge normalement sur le disque fermé $\overline{\Omega}$.
2. Une série entière converge normalement sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, sa somme est constante sur $\mathbb{R}$.
3. Une série entière converge normalement sur tout segment $[-A, A] \subset \mathbb{R}$ si, et seulement si, son rayon de convergence est infini.
4. Les sommes des séries entières $\sum n!x^n$ et $\sum e^{(n^2)}x^n$ sont égales alors que leurs coefficients ne sont pas égaux deux à deux.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n!a_n$. Exprimer la somme S et ses dérivées successives en fonction des u_n.

44. Dérivation des fonctions composées

On sait que si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$ sont des fonctions dérivables sur les intervalles *réels* I et J, alors la composée $g \circ f$ est dérivable sur I.

La notion de *fonction dérivable de la variable complexe* n'ayant pas été définie, la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ et la composée $g \circ f : I \to \mathbb{K}$ peuvent être dérivables alors que la dérivabilité de $g : \mathbb{C} \to \mathbb{K}$ n'a pas de sens.

44.1 Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors $\exp \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall\, t \in I, \quad (\exp \circ \varphi)'(t) = \exp\big[\varphi(t)\big]\, \varphi'(t)$$

car $\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

44.2 On peut étendre ce résultat aux sommes de toutes les séries entières. →**[52.1]**

Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^p$ (avec $p \in \mathbb{N}$ ou $p = \infty$) telle que

$$\forall\, t \in I, \quad \big|\varphi(t)\big| < R$$

alors $S \circ \varphi$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^p$ sur I et

$$\forall\, t \in I, \quad (S \circ \varphi)'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \big[\varphi(t)\big]^{n-1} \varphi'(t).$$

En particulier, si $\varphi : I \to \mathbb{R}$, on retrouve la formule usuelle :

$$\forall\, t \in I, \quad (S \circ \varphi)'(t) = S'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t).$$

III

Développements en série entière

45. ✍ *Une fonction f est* ***développable en série entière au voisinage de*** *$t_0 \in \mathbb{R}$ lorsqu'il existe un réel $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que*

$$\forall\, t \in \left]t_0 - r, t_0 + r\right[, \quad f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_n (t - t_0)^n.$$

On dit alors que la fonction f est ***développable en série entière sur l'intervalle*** *$\left]t_0 - r, t_0 + r\right[$.*

III.1 Série de Taylor

46. Pour que f soit développable en série entière au voisinage de t_0, il faut **[41.2]** que f soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert $\left]t_0 - r, t_0 + r\right[$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}.$$

47. ✍ *Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $\left]t_0 - r, t_0 + r\right[$. La* ***série de Taylor de f au point*** *t_0 est la série entière*

$$\sum \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n.$$

48. Caractérisation

Une fonction f est développable en série entière au voisinage de t_0 si, et seulement si,

– Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de t_0 ;
– Le rayon de convergence de sa série de Taylor est strictement positif et
– La somme de sa série de Taylor est bien égale à f sur un voisinage de t_0.

49. Exemples

49.1 La fonction rationnelle

$$\left[t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\right]$$

est développable en série entière au voisinage de 0. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais sa série de Taylor au point 0 a un rayon de convergence fini.

49.2 La fonction f définie par

$$\forall\, t \leqslant 0, \quad f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, t > 0, \quad f(t) = \exp(-1/t)$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et le rayon de convergence de la série de Taylor est infini, mais la fonction f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

50. Unicité du développement en série entière [42]

Soit f, une fonction f développable en série entière au voisinage de 0 :

$$\forall\, t \in \left]-r, r\right[, \qquad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

50.1 Si f est identiquement nulle sur un voisinage de 0, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

50.2 S'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(t) = 0$ pour tout $t \in \left]0, \alpha\right[$, alors f est identiquement nulle sur $\left]-r, r\right[$.

50.3 S'il existe une suite strictement décroissante et de limite nulle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f(u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est identiquement nulle sur $\left]-r, r\right[$.

50.4 Si f coïncide avec une fonction polynomiale g de degré d sur un voisinage $\left]-\alpha, \alpha\right[$ de 0, alors $a_n = 0$ pour tout $n > d$.

50.5 La fonction $\check{f} = [t \mapsto f(-t)]$ est développable en série entière et

$$\forall\, t \in \left]-r, r\right[, \quad f(-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n t^n.$$

50.6 ➜ *Si f est paire, alors $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et*

$$\forall\, t \in \left]-r, r\right[, \quad f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} t^{2p}.$$

50.7 ➜ *Si f est impaire, alors $a_{2p} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et*

$$\forall\, t \in \left]-r, r\right[, \quad f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} t^{2p+1}.$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

51. L'inégalité de Taylor-Lagrange peut servir à démontrer que la série de Taylor d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ converge bien vers f.

51.1 Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-r, r\right[$, alors

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{-\rho \leqslant u \leqslant \rho} \left| f^{(n+1)}(u) \right|$$

pour tout t tel que $|t| \leqslant \rho < r$.

51.2 Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors il existe deux réels strictement positifs r et M tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|f^{(n)}(0)\big| \leqslant \frac{Mn!}{r^n}.$$

51.3 Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 et s'il existe deux réels strictement positifs M et r tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \left]-r, r\right[, \quad \left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant \frac{Mn!}{r^n}$$

alors f est développable en série entière sur $\left]-r, r\right[$.

52. Série exponentielle
En appliquant [**51.3**] à $f(t) = \exp(tz)$ on obtient l'un des développements en série entière fondamentaux. →[**80**]

52.1 ➔

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

52.2 La formule [**52.1**] peut être prise comme *définition* de la fonction exp et toutes les formules trigonométriques peuvent se déduire de la propriété de morphisme [**5.56**].

52.3 ➔

$$\forall\, (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2).$$

Fonctions de référence

53. Les développements de référence peuvent tous être déduits des trois développements fondamentaux [**54.1**], [**55.1**] et [**56.1**].

54. Série exponentielle et fonctions trigonométriques

54.1 ➔

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

54.2 ➔ *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

55. Série géométrique et séries associées
On note $\mathbb{D}$, le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

55.1 ➔

$$\forall\, z \in \mathbb{D}, \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad \textit{et} \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$$

55.2

$$\forall\, z \in \mathbb{D}, \quad \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$$

55.3 Pour tout *entier* $p \geqslant 2$,

$$\forall\, z \in \mathbb{D}, \quad \frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n$$

55.4 ➔ *Pour tout $t \in \left]-1, 1\right[$,*

$$\ell\mathrm{n}(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}$$

$$-\ell\mathrm{n}(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

55.5 ➔ *Pour tout $t \in \left]-1, 1\right[$,*

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \qquad \operatorname{Arctan} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \qquad \operatorname{Arg\,th} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

56. Exposants fractionnaires

56.1 ➔ *Pour tout $t \in \left]-1, 1\right[$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$,* →[**81**]

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n.$$

56.2 Pour tout $t \in \left]-1, 1\right[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{[2^n n!]^2} t^{2n}$$

$$\operatorname{Arg\,sh} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} t^{2n}$$

$$\operatorname{Arcsin} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

57. Applications

57.1 Série géométrique

(1) $$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

(2) $$\int_0^1 \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)^2}$$

(3) $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

(4) $$\forall\, p \geqslant 2, \quad \frac{1}{p!} \int_0^1 \frac{\ell\mathrm{n}^p\, t}{1-t}\, \mathrm{d}t = (-1)^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$$

(5) $$\forall\, a > 0, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$

(6) $$\forall\, a > 0, \quad \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a}$$

(7) $$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1-te^{-t})^2}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

57.2 Série exponentielle

(8) $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

(9) $$\int_0^1 t^t\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

(10) $$\forall\, x > 0, \quad \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

57.3

(11) $$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

(12) $$\int_0^1 \frac{\ell\mathrm{n}(1+t)}{t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

57.4 *Suite de* [**10.47**] –

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n\, n!} = 2^{n-1/2}\Gamma(n + 1/2)$$

III.2 Calculs de développements

58.1 Le développement de la fonction exp [**52.1**] est à peu près le seul qui puisse être facilement déduit de la formule de Taylor-Lagrange [**51.3**].

58.2 Dans les exemples qui suivent, on note encore R_a et f, le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum a_n z^n$.

Combinaison linéaire

59. ➔ *Si les deux fonctions f et g sont développables en série entière au voisinage de 0, alors la combinaison linéaire $\lambda f + g$ est développable en série entière au voisinage de 0.*

60. Pour $|t| < 1/2$,

$$\ell n(1 - t - 2t^2) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k + (-1)^k}{k} t^k.$$

Substitution

61. Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors la fonction

$$g = [t \mapsto f(\alpha t^p)]$$

est développable en série entière au voisinage de 0 quels que soient $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

62. *Suite de* [**58.2**] – Les rayons de convergence de $\sum a_{2n}z^{2n}$ et $\sum a_{3n}z^{3n}$ sont supérieurs à R_a et

$$\forall\ |z| < R_a, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}z^{2n} = \frac{f(z) + f(-z)}{2}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n}z^{3n} = \frac{f(z) + f(jz) + f(j^2z)}{3}.$$

63. *Suite de* [**58.2**] – Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite non nulle et périodique, de période T, alors $R_a = 1$ et →[**103**]

$$\forall\ |z| < 1, \quad f(z) = \frac{1}{1 - z^T} \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^k.$$

Intégration et dérivation terme à terme

64. ➔ *Si la fonction f est développable en série entière sur $]-r, r[$, alors toutes ses dérivées sont développables en série entière sur $]-r, r[$ et leurs développements sont obtenus en dérivant terme à terme.*

65. ➔ *Si la fonction f est développable en série entière sur $]-r, r[$, alors toutes ses primitives sont développables en série entière sur $]-r, r[$ et leurs développements sont obtenus en intégrant terme à terme.*

66. Pour $|t| <$,

$$\text{Arctan}\, \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4} - 2\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{4k+2}}{4k + 2}.$$

67. On peut aussi calculer un développement en série entière à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme.

67.1 Pour $|x| < 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + x^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1 + x^2u^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n + 1}.$$

67.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \int_0^1 \tan^n t \,\mathrm{d}t.$$

Comme $a_n \sim 1/2n$, alors $R_a = 1$ et

$$\forall\ |x| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\tan t}$$
$$= \frac{1}{1 + x^2}\Big[\frac{\pi}{4} + \frac{\ell n\, 2}{2}x - x\,\ell n(1 - x)\Big].$$

Produit de Cauchy

68. ➔ *Si f et g sont développables en série entière au voisinage de 0, alors le produit fg est développable en série entière au voisinage de 0 et les coefficients du développement de fg sont donnés par la formule du produit de Cauchy* [**27.1**].

Utilisations du théorème de Fubini

69. Le théorème de Fubini [**5.43**] permet lui aussi de calculer des développements en série entière.

69.1 La fonction $f = [t \mapsto \exp(\exp t)]$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\ t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!}\Big)\frac{t^p}{p!}.$$

69.2 Si $a \in]-1, 1[$, alors

$$\forall\ t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!(1 - a^{2p+1})}\, t^{2p+1}.$$

69.3 Soient f, une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ et $t_0 \in]-R, R[$. Avec $\alpha = R - |t_0| > 0$, la fonction

$$g = [t \mapsto f(t_0 + t)]$$

est développable en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$ et

$$g(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p}\binom{n+p}{p} t_0^n\Big] t^p$$

pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$.

Entraînement

70. Questions pour réfléchir

1. Les fonctions polynomiales sont développables en série entière au voisinage de tout point $t_0 \in \mathbb{R}$.
2. On suppose que f est développable en série entière sur $]t_0 - r, t_0 + r[$. Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?
3. On dit que f est une **fonction entière** lorsqu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\ t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

3.a Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?
3.b Exemples de fonctions entières ?
4. On suppose que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que les deux sommes aient un sens. Peut-on en déduire que $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
5. *Suite de* [**56.1**] – Simplifier les développements de $\sqrt{1+t}$ et de $1/\sqrt{1+t}$.
6. Quel est le développement en série entière de Arccos au voisinage de 0 ?
7. La fonction Argch est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?
8. Si $a_n = \mathcal{O}(r^n/n!)$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors la somme de $\sum a_n t^n$ est $\mathcal{O}(e^{rt})$ lorsque t tend vers $+\infty$.
9. On considère une fonction f, développable en série entière sur $]-r, r[$:

$$\forall\ t \in]-r, r[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

9.a Pour tout $t \in]-r, r[$,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n,$$
$$f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n$$

et ainsi de suite...

9.b La fonction F est une primitive de f si, et seulement si,

$$F(t) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} t^n$$

pour tout $t \in \left]-r, r\right[$.

10.a Le développement [55.3] peut être déduit de l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{p-1} = \binom{n+p}{p},$$

qui est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

10.b Autre méthode pour justifier [55.3] ?

11. Développement en série entière de $1/(\alpha - z)^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

12. Une fonction rationnelle f est développable en série entière au voisinage de $t_0 \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, t_0 n'est pas un pôle de f.

71. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est strictement positif.

71.1 Les sommes

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n} \quad \text{et} \quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n t^{2n}$$

sont définies sur un même voisinage $\left]-r, r\right[$ de 0 et la fonction h définie par

$$h(t) = \left| \begin{array}{ll} g(\sqrt{-t}) & \text{pour } -r < t \leqslant 0 \\ f(\sqrt{t}) & \text{pour } 0 \leqslant t < r \end{array} \right.$$

est développable en série entière au voisinage de 0.

71.2 Les sommes

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n+1} \quad \text{et} \quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n t^{2n+1}$$

sont définies sur un même voisinage $\left]-r, r\right[$ de 0 et la fonction h définie par

$$h(t) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{g(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}} & \text{pour } -r < t < 0 \\ \dfrac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{pour } 0 < t < r \end{array} \right.$$

admet un prolongement développable en série entière (et donc de classe $\mathscr{C}^\infty$) au voisinage de 0.

72. Calculer le développement en série entière au voisinage de 0 des expressions suivantes.

$$\cos(t+\theta) \qquad \ell n(t^2 - 5t + 4) \qquad \ell n(t^2 + t + 1)$$
$$\cos t \operatorname{ch} t \qquad e^{2t} \sin t \qquad \ell n \sqrt{1+t^2}$$
$$\frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \qquad \frac{\ell n(1+t^3)}{t^2} \qquad \frac{e^t}{1+t}$$

73. **Calculs de sommes**

$$(1) \quad \forall\, t \in \left]-1, 1\right[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 t^n = \frac{t(1+t)}{(1-t)^3}$$

$$(2) \quad \forall\, t \in \left]-1, 1\right[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n t^{2n+1} = \frac{t^3}{(1+t^2)^2}$$

$$(3) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} t^n = e^t (t-1)$$

$$(4) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!} t^n = e^t (2 + 4t + t^2)$$

74. *Suite de* [**71**] – Exprimer les sommes suivantes pour $t < 0$.

$$(5) \quad \forall\, 0 < t < 1, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{(1-t)\,\ell n(1-t)}{t}$$

$$(6) \quad \forall\, t > 0, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\sin t}{t}$$

$$(7) \quad \forall\, t > 0, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+2)!} = \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t}$$

$$(8) \quad \forall\, t > 0, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{t} \sin \sqrt{t}$$

$$(9) \quad \forall\, t > 0, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n)!} = \cos \sqrt{t}$$

$$(10) \quad \forall\, 0 < t < 1, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \,\ell n \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}$$

75. Étudier les sommes suivantes au voisinage de l'origine.

$$(11) \quad \forall\, 0 < |t| < 1, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2t} \,\ell n \frac{1+t}{1-t}$$

$$(12) \quad \forall\, 0 < |t| < 1, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{4n^2-1} = \frac{-1}{2} + \frac{1-t^2}{4t} \,\ell n \frac{1-t}{1+t}$$

IV

Applications

IV.1 Existence d'un prolongement $\mathscr{C}^\infty$

76. Si une fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et s'il existe un réel $\alpha > 0$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\forall\, 0 < |t| < \alpha, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,$$

alors on définit un prolongement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ de f en posant $f(0) = a_0$.

77. Les expressions suivantes admettent un prolongement de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0.

$$\frac{\ell n(1+t)}{t} \qquad \frac{1-\cos t}{t^2} \qquad \frac{\sin t}{t} \qquad \frac{e^t - 1}{t} \qquad \frac{\sin t}{e^t - 1}$$

78. La fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1-\cos t}{\sin t}$$

admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\pi, \pi\right[$.

IV.2 Résolution d'équations différentielles

79. **Méthode**

On considère une équation différentielle (E) définie sur un intervalle ouvert I. Pour trouver les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de $t_0 \in I$, on procède par analyse et synthèse.

79.1 **Analyse**

1. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est strictement positif et que la somme

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t - t_0)^n$$

est une solution de l'équation différentielle (E) ;

2. On déduit des développements de S, S', S''... [41.2] et de l'équation différentielle (E) des relations de récurrence entre les coefficients a_n [42].

79.2 Synthèse

1. On s'assure qu'il existe des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les relations trouvées ;
2. On déduit de ces relations de récurrence (ou des coefficients a_n eux-mêmes, s'il est possible de les expliciter) que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est strictement positif ;
3. Lorsque c'est possible, on explicite les coefficients a_n en tenant compte d'une éventuelle condition initiale.

Équations du premier ordre

80. Soit $z \in \mathbb{C}$. Les solutions de l'équation différentielle

$$x'(t) - zx(t) = 0$$

sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.
La solution associée à la condition initiale $x(0) = 1$ est la fonction $[t \mapsto \exp(tz)]$. →**[52.1]**

81. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle

$$(1+t)x'(t) - \alpha x(t) = 0$$

admet une, et une seule, solution sur $I =]-1,1[$ avec la condition initiale $x(0) = 1$.
Cette solution est développable en série entière sur I. →**[56.1]**
Elle est polynomiale si, et seulement si, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Équations du second ordre

82. Équations à coefficients constants
Relier l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$$

à la relation de récurrence linéaire d'ordre deux

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

en cherchant les solutions développables en série entière de l'équation différentielle. Examiner en particulier le cas où l'équation caractéristique admet une racine double.

83. Changements d'inconnue [74]
L'allure des solutions développables en série entière d'une équation différentielle suggère un changement d'inconnue qui permet parfois de résoudre complètement l'équation en se ramenant à une équation différentielle à coefficients constants.

83.1 Soit $\varepsilon = \pm 1$. Les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation

$$tx''(t) + 2x'(t) + \varepsilon t x(t) = 0 \tag{1}$$

sont proportionnelles à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\varepsilon)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n}.$$

La fonction x est solution de (1) sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, la fonction y définie par $y(t) = tx(t)$ est solution de l'équation $y''(t) + \varepsilon y(t) = 0$ sur $]0,+\infty[$.

83.2 Les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de

$$4t^2x''(t) - 2tx'(t) + (t+2)x(t) = 0 \tag{2}$$

sont proportionnelles à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{n+1}.$$

La fonction x est solution de (2) sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, la fonction y définie par $x(t) = \sqrt{t}\cdot y(\sqrt{t})$ est solution de l'équation $y''(u) + y(u) = 0$ sur $]0,+\infty[$.

83.3 Les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de

$$4tx''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0 \tag{3}$$

sont proportionnelles à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, t^{n}.$$

La fonction x est solution de (3) sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, la fonction y définie par $x(t) = y(\sqrt{t})$ est solution de l'équation $y''(u) + y(u) = 0$ sur $]0,+\infty[$.

84. Équation de Bessel
On considère l'équation différentielle suivante :

$$tx''(t) + x'(t) + tx(t) = 0.$$

84.1 Toute solution de cette équation développable en série entière au voisinage de 0 est proportionnelle à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}\, t^{2n}.$$

84.2 *Suite de* [**10.28.7**] – La fonction J_0 définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t\sin x)\,\mathrm{d}x$$

est une solution de l'équation de Bessel qui est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On retrouve ainsi les valeurs des intégrales de Wallis d'indice pair. →**[4.93]**

85. Équation d'Hermite
On considère l'équation différentielle suivante

$$x''(t) - 2tx'(t) + 2\nu x(t) = 0$$

où $\nu \in \mathbb{N}$.
Toute solution développable en série entière au voisinage de 0 est une combinaison linéaire de la fonction paire x_1 définie par

$$x_1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(-\nu)(2-\nu)(4-\nu)\cdots(2n-2-\nu)}{(2n)!}\, t^{2n}$$

et de la fonction impaire x_2 définie par

$$x_2(t) = t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(1-\nu)(3-\nu)\cdots(2n-1-\nu)}{(2n+1)!}\, t^{2n+1}.$$

Comme $\nu \in \mathbb{N}$, l'une de ces deux fonctions est polynomiale et le rayon de convergence de l'autre est infini.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

Dans les questions qui suivent, on convient de noter R_a et R_b, les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

86. Exemples et contre-exemples

1. Trouver des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $R_a = 1$ et que la série numérique $\sum a_n z^n$
   - 1.a converge seulement sur le disque unité ouvert ;
   - 1.b converge sur le disque unité fermé ;
   - 1.c converge en certains points du disque unité fermé mais pas sur tout le disque unité fermé.
2. Exemples de séries entières dont le rayon de convergence est nul.

3. Exemples de séries entières dont le rayon de convergence est infini.
4. Exemples de séries entières dont le rayon de convergence est un réel strictement positif différent de 1.
5. Exemples de séries entières dont la somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-R_a, R_a]$.
6. Exemple de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ telles que $R_a = R_b$ avec $a_n = o(b_n)$.
7. Exemples où le rayon de convergence de la série entière $\sum(a_n + b_n)z^n$ est :
7.a strictement supérieur à $\min\{R_a, R_b\}$.
7.b égal à $R_a = R_b$.
8. *Suite de* **[38.2]** – Exemple de série entière qui ne converge pas normalement sur le disque ouvert de convergence.
9. Exemple de série entière dont la somme est continue sur $[0, R]$ sans que la série converge normalement sur $[0, R]$.
10. Exemple de fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 qui n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

87. Méthodes

1. Comment calculer le rayon de convergence d'une série entière ?
2. Comment prouver que la somme de $\sum a_n t^n$
2.a est continue sur $[0, R_a]$?
2.b tend vers l'infini au voisinage de R_a ?
3. Pourquoi est-il essentiel de vérifier que le rayon de convergence est strictement positif lorsqu'on cherche une solution développable en série entière d'une équation différentielle ?

88. Questions pour réfléchir

1. Peut-on comparer le rayon de convergence de $\sum a_{2n} z^n$ à celui de $\sum a_n z^n$?
2. Pour les exemples de référence où le développement en série entière est donné sur le disque unité ouvert ou sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$, étudier la convergence en ± 1.
3. Comment déduire les développements de référence des trois développements fondamentaux **[54.1]**, **[55.1]** et **[56.1]** ?
4. *Suite de* **[83]** –
4.a Résoudre les équations (1), (2) et (3) sur $]-\infty, 0[$.
4.b Les solutions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de ces équations sont en fait les solutions développables en série entière au voisinage de 0.

89. Encore des calculs de somme

(1) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n(n+1)} = t + (1-t)\,\ell n(1-t)$$

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t^{n+1}}{n(n+2)} = \frac{t}{2} + 1 + \Big(t - \frac{1}{t}\Big)\,\ell n(1-t)$$

(3) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nt^{n+1}}{n+1} = \ell n(1-t) - \frac{t}{t-1}$$

(4) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n+2}}{n(n+2)} = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \Big(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{4}\Big)\,\ell n(1-t)$$

(5) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nt^n}{n+1} = \frac{\ell n(1-t)}{t} + \frac{1}{1-t}$$

(6) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\ell n\,\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}$$

(7) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)t^{2n}}{n+1} = \frac{\ell n(1-t^2)}{t^2} + \frac{2}{1-t^2}$$

(8) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)n} = t + (1-t)\,\ell n(1-t)$$

(9) $$\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)t^n = \frac{t+1}{(1-t)^2}$$

(10) $$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n t^{2n} = \frac{qt^2}{(qt^2-1)^2}$$

(11) $$\sum_{n=0}^{+\infty} nt^n = \frac{t}{(1-t)^2}$$

(12) $$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)t^n = \frac{2t^2}{(1-t)^3}$$

(13) $$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 t^n = \frac{t(1+t)}{(1-t)^3}$$

(14) $$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)t^n = \frac{6t^3}{(1-t)^4}$$

(15) $$\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 t^n = \frac{t(1+4t+t^2)}{(1-t)^4}$$

(16) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 t^n}{n!} = t(1+t)e^t$$

(17) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)t^{2n}}{n!} = (1+2t^2)e^{t^2}$$

(18) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+2)n!} = \frac{e^{t^2}-1}{2t}$$

(19) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^{t^2}-1}{t}$$

(20) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\operatorname{sh} t - t}{t}$$

(21) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2nt^{2n}}{(2n+1)!} = \operatorname{ch} t - \frac{\operatorname{sh} t}{t}$$

(22) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)t^{2n}}{(n+1)!} = 2e^{t^2} + \frac{1-e^{t^2}}{t^2}$$

(23) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{3n}}{(3n)!} = \frac{e^t}{3} + \frac{2}{3}e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}$$

(24) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} = \int_t^0 \frac{\ell n(1-u)}{u}\,du$$

(25) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n\cdot n!} = \int_0^t \frac{e^u-1}{u}\,du$$

(26) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)n!} = \int_0^t e^{u^2}\,du$$

(27) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)n!} = t\int_0^t \frac{e^u-1-u}{u^2}\,du$$

Approfondissement

90. *Suite de* **[23]** – On suppose que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement positive et que la série $\sum b_n R_b^n$ est divergente.
1. Si $a_n = o(b_n)$, alors $f(t) = o\big(g(t)\big)$ au voisinage de R_b.
2. Si $a_n \sim b_n$, alors $f(t) \sim g(t)$ au voisinage de R_b.

91. Prolongement analytique
Soient f et g, deux fonctions définies sur $]-r, r[$. On suppose que f et g sont développables en série entière respectivement sur $]-r_1, r_1[$ et $]-r_2, r_2[$ avec $0 < r_1 < r_2 \leqslant r$ et qu'elles coïncident sur un voisinage de 0.
Alors les fonctions f et g coïncident sur $]-r_1, r_1[$ mais pas nécessairement sur $]-r_2, r_2[$.

92. Si $f = \operatorname{Arctan}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i}\Big(\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\Big).$$
On peut ainsi retrouver la série de Taylor de Arctan et comme
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \big|f^{(n+1)}(x)\big| \leqslant n!$$
on peut déduire de **[51.3]** que la fonction Arctan est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

93. On considère une série entière $\sum a_n z^n$ dont le rayon de convergence est infini et on note S, sa somme :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

93.1 La connaissance de la somme S permet de retrouver les coefficients a_n :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, r > 0, \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} S(re^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

93.2 Si la somme S est bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante.
93.3 La fonction cos est bornée sur $\mathbb{R}$, développable en série entière sur $\mathbb{C}$ mais n'est pas constante.

94. Utilisation des intégrales de Wallis [4.93]
94.1 La fonction Arcsin est développable en série entière sur le segment $[-1, 1]$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Arcsin}(\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$$

et $\zeta(2) = \pi^2/6$. →**[4.97]**
94.2 Pour $|x| < 1$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ell\mathrm{n}(1 + x\sin^2 t)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \pi\big(\sqrt{1+x} - 1\big).$$

95. Soit $p_n \in \mathbb{N}$. La fonction f définie par

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} t^n$$

est une solution de l'équation différentielle

$$(1-t)x'(t) = (p+1)x(t).$$

sur l'intervalle $]-1, 1[$. →**[81]**

96. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $a_0 = 1$ et la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k$$

et on note S, la somme de la série entière $\sum a_n t^n$.
1. Sur l'intervalle ouvert de convergence **[41]**, on a

$$tS^2(t) = S(t) - 1$$

et on en déduit que

$$S(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t}.$$

2. Le rayon de convergence est égal à $1/4$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

97.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ell\mathrm{n}\, t\, \ell\mathrm{n}(1-t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1}\,\ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$ **[9.62.4]**

98. La fonction f définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-t^2} \int_0^t e^{s^2}\,\mathrm{d}s$$

est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et est une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad x'(t) + 2tx(t) = 1.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n}{2n+1}.$$

99. Développement de tan
On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-A, A[$. On note $\sum a_n t^n$, la série de Taylor de f au point 0 et on suppose que f est une solution de l'équation différentielle non linéaire

$$(\star) \qquad \forall\, t \in\,]-A, A[, \quad x'(t) = 1 + x^2(t).$$

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in\,]-A, A[$,

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$$

et en particulier

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

2. On suppose que $f(0) = 0$.
2.a La fonction $f^{(n)}$ est positive sur $[0, A[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La série entière $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in\,]-A, A[$ (d'après la formule de Taylor avec expression intégrale du reste) et sa somme g est une solution de l'équation différentielle $(\star)$.
4. La fonction tan est développable en série entière sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.

100. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle

$$x''(t) + 2tx'(t) + 2x(t) = 0$$

qui sont développables en série entière au voisinage de 0 ? Simplifier l'expression des solutions paires.

101. La fonction f définie par

$$\forall\, t \in\,]-1, 1[, \quad f(t) = \frac{\operatorname{Arcsin} t}{\sqrt{1-t^2}}$$

est une solution développable en série entière de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in\,]-1, 1[, \quad (1-t^2)x'(t) - tx(t) = 1$$

donc

$$\forall\, t \in\,]-1, 1[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} t^{2n+1}.$$

On en déduit le développement de $\frac{\operatorname{Arccos} t}{\sqrt{1-t^2}}$. →**[56.1]**

Pour aller plus loin

102. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* [**38.2**] – La série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact K du disque ouvert de convergence Ω.

2. Soit f, une fonction rationnelle admettant 0 pour pôle de multiplicité $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est **développable en série de Laurent** :

$$f(t) = \frac{\alpha_p}{t^p} + \cdots + \frac{\alpha_1}{t} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

pour tout t voisin de 0. Comment calculer coefficients $\alpha_p, \ldots, \alpha_1, a_0, a_1, \ldots, a_n \ldots$?

3. *Suite de* [**84**] – Le wronskien de l'équation de Bessel n'étant pas borné au voisinage de 0, toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation de Bessel est proportionnelle à J_0.

103. Caractérisation des fonctions rationnelles [63]
On considère la somme S de la série entière $\sum a_n z^n$.

1. Que dire de S si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique ? Et si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux ?

2. Quel que soit la fonction polynomiale P, le produit PS est développable en série entière au voisinage de 0. Exprimer les coefficients du développement en série entière de PS en fonction des coefficients de P et des a_n.

3. La fonction S est une fonction rationnelle dont le dénominateur est de degré d si, et seulement si, les coefficients a_n vérifient, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire d'ordre d.

104. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. La fonction f définie par

$$\forall\, t \in \left]-1,1\right[, \quad f(t) = \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} t)$$

est l'unique solution paire et nulle en $t = 0$ de l'équation différentielle

$$(\star) \qquad (1-t^2)x''(t) - tx'(t) + \alpha^2 x(t) = 0.$$

On peut remarquer que $y(u) = f(\sin u)$ est solution de l'équation $y'' + \alpha^2 y = 0$. →[**83**]

2. Si la somme de $\sum a_n t^n$ est une solution de $(\star)$, alors

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad a_n = \frac{(n-2-\alpha)(n-2+\alpha)}{n(n-1)}\, a_{n-2}.$$

3. La fonction f est développable en série entière sur $\left]-1,1\right[$ et polynomiale si, et seulement si, α est un entier pair.

105. Transformée de Laplace [10.38]
Soit f, la somme de la série entière $\sum a_n t^n$. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum n!a_n z^n$ est strictement positif.

1. Le rayon de convergence de $\sum a_n t^n$ est infini.
2. Il existe $p_0 > 0$ tel que

$$\forall\, p > p_0, \quad L(f)(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!a_n}{p^{n+1}}.$$

3. La fonction $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, p > p_0, \quad [L(f)]^{(k)}(p) = (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!a_n}{p^{n+k}}.$$

4. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\, p > p_0, \quad L[f^{(k)}](p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!a_{n+k}}{p^{n+1}}.$$

5. Si la fonction f est une solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle $y'' + y = 0$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)!a_{n+2} = n!a_n$$

donc les deux suites $\big((2n)!a_{2n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big((2n+1)!a_{2n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes. Commenter.

106. Noyau de Poisson

106.1 Soient $-\pi < t < \pi$ et $|x| < 1$.

$$(1) \qquad \frac{1 - x\cos t}{1 - 2x\cos t + x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos nt$$

$$(2) \qquad \frac{\sin t}{1 - 2x\cos t + x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \sin nt$$

$$(3) \qquad \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos t + x^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos nt$$

106.2 On pose

$$K(x,t) = \operatorname{Arctan}\Big(\frac{1+x}{1-x}\tan\frac{t}{2}\Big).$$

Calculer les dérivées partielles de K par rapport à x et à t et en déduire que

$$K(x,t) = \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\sin nt$$

pour tout $(x,t) \in \left]-1,1\right[\times \left]-\pi,\pi\right[$.

107. Permutations et dérangements
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant p \leqslant n$, on note $N(n,p)$, le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui ont exactement p points fixes et $D(n) = N(n,0)$, le nombre de **dérangements**, c'est-à-dire de permutations sans point fixe. On convient de $D(0) = 1$.

1.
$$\forall\, 0 \leqslant p \leqslant n, \quad N(n,p) = \binom{n}{p} D(n-p).$$

2.
$$\forall\, x \in \left]-1,1\right[, \quad e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

3.
$$\forall\, 0 \leqslant p \leqslant n, \quad N(n,p) = \frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

4.
$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{N(n,p)}{n!} = \frac{e^{-1}}{p!}$$

108. Composition des fonctions analytiques
On suppose que f est développable en série entière au voisinage de 0.

108.1 Si $f(0) \neq 0$, alors la fonction $g = [t \mapsto 1/f(t)]$ est définie sur un voisinage de 0. Est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

108.2 Si g est développable en série entière au voisinage de $t_0 = f(0)$, alors la composée $g \circ f$ est définie au voisinage de 0. Est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?