13
Espaces probabilisés

1. Une expérience est **aléatoire** lorsqu'il n'est pas possible d'en prévoir le résultat ou plus largement lorsqu'il n'est pas simple d'en prévoir le résultat avec une marge d'erreur acceptable.

2. La théorie mathématique des probabilités permet de traiter les problèmes aléatoires simples en définissant les règles de calcul dans un **espace probabilisé**

$$(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}).$$

On traite les problèmes complexes au moyen de **variables aléatoires** définies sur cet espace probabilisé.

I
Axiomatique

3. **Notations**
On utilise le symbole $\sqcup$, au lieu de $\cup$, pour écrire l'union de parties qui sont deux à deux disjointes.
Lorsque de nombreux ensembles sont considérés, on peut remplacer le symbole $\cap$ par une virgule ou l'omettre, de telle sorte que l'intersection $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ peut être abrégée en

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \quad \text{ou en} \quad A_1 A_2 \cdots A_n.$$

I.1 Tribus

4. Soient E, un ensemble et $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(E)$, un ensemble de parties de E.
4.1 ✍ *L'ensemble $\mathcal{E}$ est **stable par intersection** lorsque*

$$\forall\, A, B \in \mathcal{E}, \qquad A \cap B \in \mathcal{E}.$$

4.2 Si l'ensemble $\mathcal{E}$ est stable par intersection, alors il est **stable par intersection finie** : pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\forall\, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}, \qquad A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{E}.$$

4.3 ✍ *L'ensemble $\mathcal{E}$ est dit **stable par intersection dénombrable** lorsque, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$,*

$$\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \in \mathcal{E}.$$

4.4 ✍ *L'ensemble $\mathcal{E}$ est **stable par union** lorsque*

$$\forall\, A, B \in \mathcal{E}, \qquad A \cup B \in \mathcal{E}.$$

4.5 Si l'ensemble $\mathcal{E}$ est stable par union, alors il est **stable par union finie** : pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\forall\, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}, \qquad A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{E}.$$

4.6 ✍ *L'ensemble $\mathcal{E}$ est **stable par union dénombrable** lorsque, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$,*

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \in \mathcal{E}.$$

4.7 ✍ *L'ensemble $\mathcal{E}$ est dit **stable par passage au complémentaire** lorsque*

$$\forall\, A \in \mathcal{E}, \qquad A^c \in \mathcal{E}.$$

5.1 ✍ *Une **algèbre (de Boole)** sur E est une partie $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(E)$, non vide, stable par intersection, par union et par passage au complémentaire.*
5.2 Toute algèbre de Boole sur E contient $\varnothing$ et E.
5.3 ✍ *Une **tribu**, ou **σ-algèbre de Boole**, sur E est un ensemble non vide $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(E)$ qui est :*
1. *stable par intersection dénombrable,*
2. *stable par union dénombrable et*
3. *stable par passage au complémentaire.*

5.4 ✍ *Pour tout ensemble E, l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ est une tribu sur E, appelée **tribu discrète** sur E.*
5.5 ✍ *Pour toute partie A de E, la famille*

$$\sigma(A) = \{\varnothing, A, A^c, E\}$$

*est une tribu sur E, dite **tribu engendrée par** A.*

I.2 Mesures de probabilité

6. Soit $\mathcal{E}$, une tribu sur un ensemble E.
6.1 ✍ *Une application $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est **additive** lorsque, pour toute famille finie $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de parties mesurables deux à deux disjointes,*

$$f\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} f(A_k).$$

6.2 ✍ *Une application $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est **σ-additive** lorsque, pour toute famille dénombrable $(A_k)_{k\in I}$ de parties mesurables deux à deux disjointes, la famille $(f(A_k))_{k\in I}$ est sommable et*

$$f\Big(\bigsqcup_{k\in I} A_k\Big) = \sum_{k\in I} f(A_k).$$

6.3 ✍ *Soit $\mathcal{E}$, une tribu sur un ensemble E. On appelle **(mesure de) probabilité** sur $(E, \mathcal{E})$ toute application σ-additive*

$$\mu : \mathcal{E} \to [0, 1]$$

telle que $\mu(E) = 1$.
6.4 ➜ *Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{E}$, alors $\mu(\varnothing) = 0$.*

I.3 Espaces probabilisés

7. La théorie des probabilités, en tant que discipline mathématique, peut et doit être fondée sur des axiomes exactement de la même manière que la Géométrie et l'Algèbre. [...]
[Ainsi, le concept d'espace probabilisé] est défini comme un système d'ensembles qui vérifie certaines conditions. Ce que représentent les éléments de ces ensembles n'est d'aucune importance dans le développement strictement mathématique de la théorie des probabilités (cf. l'introduction des concepts géométriques de base dans les *Fondements de la Géométrie* de Hilbert, ou les définitions des groupes, anneaux et corps en algèbre générale).

A.N. Kolmogorov
Fondements de la théorie des probabilités (ch. 1)

7.1 ✍ *Un **espace probabilisé** $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ est composé d'un ensemble Ω, d'une **tribu** $\mathfrak{A}$ sur Ω et d'une **mesure de probabilité** P sur $\mathfrak{A}$.*
7.2 ✍ *Le couple $(\Omega, \mathfrak{A})$ est un **espace probabilisable**.*
7.3 ✍ *Les éléments de la tribu $\mathfrak{A}$ sont appelés **événements (aléatoires)**.*
7.4 En pratique, l'ensemble Ω reste *indéterminé* et la puissance de la théorie probabiliste réside précisément dans ce fait. L'ensemble $\mathfrak{A}$, qui est une σ-algèbre sur Ω, reste par conséquent indéterminé lui aussi.

8. **Vocabulaire probabiliste**
Tout événement $A \in \mathfrak{A}$ est une partie de Ω et les opérations sur les événements sont donc des opérations sur les ensembles.
8.1 La stabilité de $\mathfrak{A}$ par passage au complémentaire signifie que le **contraire** d'un événement A, représenté par A^c, est encore un événement.

8.2 De même, la **conjonction** de deux événements A et B, ou réalisation de A *et* de B représentée par $A \cap B$, est encore un événement.
La **disjonction** de deux événements, ou réalisation de A *ou* B représentée par $A \cup B$, est encore un événement.
8.3 L'événement **impossible** est représenté par l'ensemble vide $\varnothing$ et l'événement **certain** par Ω.
8.4 Deux événements représentés par des parties disjointes sont dits **incompatibles** : la réalisation conjointe de ces deux événements est impossible.
8.5 L'événement B est une **conséquence** de l'événement A si, et seulement si, $A \subset B$.
8.6 L'ensemble des événements est l'ensemble de définition de la mesure de probabilité P : le réel $\mathsf{P}(A)$ est défini si, et seulement si, l'ensemble A est un événement, c'est-à-dire $A \in \mathfrak{A}$.
8.7 La probabilité $\mathsf{P}(A)$ sert à situer l'événement $A \in \mathfrak{A}$ sur une échelle qui va de l'événement impossible à l'événement certain Ω.

$$\forall\, A \in \mathfrak{A}, \quad 0 = \mathsf{P}(\varnothing) \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(\Omega) = 1$$

I.4 Règles du calcul des probabilités

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, un espace probabilisé.
9.1 ➜ *Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, la série $\sum \mathsf{P}(A_n)$ est convergente et*

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{P}(A_n).$$

9.2 ➜

$$\mathsf{P}(\varnothing) = 0$$

9.3 Si les événements A et B sont incompatibles, alors

$$\mathsf{P}(A \sqcup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B).$$

9.4 ➜

$$\forall\, A \in \mathfrak{A}, \qquad \mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A)$$

9.5 Si A et B sont deux événements tels que $A \subset B$, alors

$$B = A \sqcup (B \cap A^c).$$

9.6 ➜ *La mesure de probabilité P est **croissante** au sens où, quelles que soient les événements A et B,*

$$A \subset B \Longrightarrow \mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(B).$$

9.7 Quelles que soient les événements A et B, les parties

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A \cap B^c \quad \text{et} \quad A^c \cap B$$

sont des événements et →[81]

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \sqcup (A^c \cap B) = (A \cap B^c) \sqcup B \\ &= (A \cap B^c) \sqcup (A^c \cap B) \sqcup (A \cap B). \end{aligned}$$

9.8 ➜

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{A}, \quad \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$$

9.9 ➜ *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, quels que soient $A_0, \dots, A_n$ dans $\mathfrak{A}$,*

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(A_k).$$

9.10 ➜

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{A}, \quad \mathsf{P}(A \cap B^c) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B)$$

10. Exemples
Soient A et B, deux événements.
1. On suppose que $\mathsf{P}(A) = 1/3$ et $\mathsf{P}(B) = 1/2$. Calculer la probabilité de $\mathsf{P}(B \cap A^c)$ lorsque :
1.a Les événements A et B sont incompatibles ;
1.b L'événement B est une conséquence de A ;
1.c La probabilité de $A \cap B$ est égale à $1/8$.
2. Avec $\mathsf{P}(A) = 1/2$, $\mathsf{P}(B) = 1/5$ et $\mathsf{P}(A \cap B) = 1/10$, calculer la probabilité pour que :
2.a Au moins l'un des deux événements soit réalisé ;
2.b Aucun des deux événements ne soit réalisé ;
2.c Exactement un des deux événements soit réalisé.
3. On suppose que $\mathsf{P}(A) = 4/10$ et $\mathsf{P}(B) = 7/10$. Quelles sont les valeurs extrêmes possibles pour $\mathsf{P}(A \cap B)$?

11. Continuité monotone
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'événements.
11.1 On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **croissante** :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A_n \subset A_{n+1}.$$

1. La suite de terme général $\mathsf{P}(A_n)$ est convergente.
2. On pose $B_0 = A_0$ et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad B_n = A_n \cap A_{n-1}^c.$$

La famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles et

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

11.2 ➜ **Continuité croissante**
Pour toute suite croissante d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\mathsf{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

11.3 Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} \subset A_n,$$

alors la suite de terme général $\mathsf{P}(A_n)$ est convergente et la suite $(A_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements.
11.4 ➜ **Continuité décroissante**
Pour toute suite décroissante d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\mathsf{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

12. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'événements. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$B_n = \bigcup_{m=0}^{n} A_m \quad \text{et} \quad C_n = B_n \cap B_{n-1}^c.$$

12.1 La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements et

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

12.2 ➜ *Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,*

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{P}(A_n).$$

12.3 La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad C_n \subset A_n \quad \text{et} \quad \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

I.5 Événements négligeables

13. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.
13.1 ✍ *Un événement $A \in \mathfrak{A}$ est **négligeable** lorsque $\mathbf{P}(A) = 0$.*
13.2 ✍ *Un événement $A \in \mathfrak{A}$ est **presque sûr** lorsque $\mathbf{P}(A) = 1$.*
13.3 ✍ *Deux événements A et B sont **presque sûrement incompatibles** lorsque $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$.*
13.4 Quelle que soit la mesure de probabilité $\mathbf{P}$ définie sur $\mathfrak{A}$, l'événement impossible $\varnothing$ est négligeable et l'événement certain Ω est presque sûr.

14. Les notions d'**événement négligeable** et d'**événement presque sûr** sont relatives à la mesure de probabilité considérée sur $\mathfrak{A}$.
14.1 On lance une pièce de monnaie : les résultats possibles sont Pile et Face, mais le résultat de chaque lancer est imprévisible. On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisable $(\Omega, \mathfrak{A})$ où la tribu $\mathfrak{A}$ peut être restreinte à une famille de quatre événements : →[**5.5**]

$$\mathfrak{A} = \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}.$$

(On rappelle qu'il est superflu de préciser l'ensemble Ω.)
1. La modélisation usuelle consiste à définir une mesure de probabilité $\mathbf{P}_0$ sur $\mathfrak{A}$ telle que

$$\mathbf{P}_0(A) = \mathbf{P}_0(A^c) = 1/2,$$

ce qui revient à supposer qu'on a autant de chances d'obtenir Pile que d'obtenir Face.
2. On peut définir deux autres mesures de probabilités $\mathbf{P}_P$ et $\mathbf{P}_F$ telles que

$$\mathbf{P}_P(A) = \mathbf{P}_F(A^c) = 1,$$

ce qui revient à truquer la pièce pour obtenir presque sûrement Pile (avec la mesure $\mathbf{P}_P$) ou presque sûrement Face (avec la mesure $\mathbf{P}_F$).
14.2 Plus généralement, si un événement $A \in \mathfrak{A}$ n'est ni impossible, ni certain, alors pour tout $p \in [0,1]$, on peut définir une mesure de probabilité $\mathbf{P}_0$ sur $\mathfrak{A}$ telle que $\mathbf{P}_0(A) = p$.

Règles de calcul sur les événements négligeables

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.
15. Un événement $A \in \mathfrak{A}$ est négligeable si, et seulement si, l'événement contraire A^c est presque sûr.

16. On considère deux événements A et B tels que $A \subset B$.
16.1 Si l'événement B est négligeable, alors l'événement A est négligeable.
16.2 Si l'événement A est presque sûr, alors l'événement B est presque sûr.
16.3 Si $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$, alors l'événement $B \cap A^c$ est négligeable.

17.1 ➜ *Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est un événement négligeable.*
17.2 ➜ *Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.*

18. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'événements deux à deux presque sûrement incompatibles :

$$\forall\, n \neq q, \quad \mathbf{P}(A_n \cap A_q) = 0.$$

18.1 Avec les notations de [**12**] :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(B_{n+1}) = \mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}).$$

18.2 La série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ est convergente et

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

Entraînement

19. Questions pour réfléchir
1. Si $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(E)$ est stable par intersection dénombrable (resp. par union dénombrable), alors $\mathcal{E}$ est stable par intersection (resp. par union).
2. On suppose que $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(E)$ est stable par passage au complémentaire. Alors l'ensemble $\mathcal{E}$ est stable par intersection (resp. par intersection dénombrable) si, et seulement si, il est stable par union (resp. par union dénombrable).
3. Une tribu est une algèbre de Boole.
4. Si E est un ensemble fini, toute algèbre de Boole sur E est une σ-algèbre.
5. Si une algèbre de Boole ne compte qu'un nombre fini d'éléments, alors c'est aussi une σ-algèbre de Boole.
6. Pour tout ensemble E, l'ensemble $\{\varnothing, E\}$ est une tribu sur E, appelée **tribu grossière** sur E.
7. Si f est une application additive sur une algèbre de Boole finie $\mathcal{E}$, alors f est une application σ-additive sur la tribu $\mathcal{E}$.
8. Toute mesure de probabilité est additive.
9. Il n'existe pas de mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ telle que la valeur de $\mu(\{k\})$ soit indépendante de $k \in \mathbb{N}$.
10. Si les événements A et B sont incompatibles, alors

$$\mathbf{P}(A) \leqslant 1 - \mathbf{P}(B).$$

11. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles, alors la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ est convergente.
12. Généraliser le théorème [**9.8**] à l'union d'une famille finie d'événements (**formule du crible**).
13. Dans quel cas la majoration [**12.2**] est-elle utile ?
14. *Suite de* [**12.2**] – Étudier le cas d'égalité.
15. Si $\mathbf{P}(A \cup B) = 0$, alors A ou B est négligeable.

20. Trace d'une tribu
Soit $\mathcal{E}$, une tribu sur E. Pour toute partie $B \subset E$, la **trace** de $\mathcal{E}$ sur B, définie par

$$\mathcal{E}_B = \{A \cap B,\ A \in \mathcal{E}\},$$

est une tribu sur E. La tribu $\mathcal{E}_B$ est contenue dans $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $B \in \mathcal{E}$.

21. Quels que soient les événements $B_1, \ldots, B_n$,

$$\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k^c).$$

22. Soit $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, une famille d'événements tous de même probabilité :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(A_k) = p.$$

Si, presque sûrement, l'un de ces événements est réalisé, alors $p \geqslant 1/n$.

23. Lemme de Borel-Cantelli
Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, on pose →[**75.4**]

$$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m.$$

1. La partie B est un événement et

$$\mathbf{P}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\Big).$$

2. Si la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge, alors l'événement B est négligeable et presque sûrement, à partir d'un certain rang, aucun des événements A_n n'est réalisé :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m^c\Big) = 1.$$

24. Tribus complètes
Soit $(E, \mathcal{E}_0, \mathbf{P}_0)$, un espace probabilisé.
24.1 ✍ *Une tribu $\mathcal{E}$ sur E est **complète** lorsque toute partie A de E contenue dans une partie négligeable $N \in \mathcal{E}$ appartient à la tribu $\mathcal{E}$.*
24.2 On suppose que $\mathcal{E}_0$ est une tribu complète sur E. Étant donnée une partie A de E, s'il existe deux éléments A^- et A^+ de $\mathcal{E}_0$ tels que

$$A^- \subset A \subset A^+ \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_0(A^-) = \mathbf{P}_0(A^+),$$

alors $A \in \mathcal{E}_0$. Que vaut $\mathbf{P}_0(A)$ dans ce cas ?
24.3 ✍ *la **tribu complétée** de $\mathcal{E}_0$ est la plus petite tribu complète qui contienne la tribu $\mathcal{E}$.*
24.4 On note $\mathcal{E}$, l'ensemble des parties $A \subset E$ pour lesquelles il existe deux éléments A^- et A^+ de $\mathcal{E}_0$ tels que

$$A^- \subset A \subset A^+ \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_0(A^-) = \mathbf{P}_0(A^+).$$

Alors $\mathcal{E}$ est la tribu complétée de $\mathcal{E}_0$.
24.5 Il existe une, et une seule, mesure de probabilité $\mathbf{P}$ définie sur $\mathcal{E}$, tribu complétée de $\mathcal{E}_0$, telle que

$$\forall\, A \in \mathcal{E}_0, \quad \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_0(A).$$

25. Classes monotones
Soient μ_1 et μ_2, deux mesures de probabilité sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.
La classe $\mathscr{C}$ définie par

$$\mathscr{C} = \big\{A \in \mathcal{E} \,:\, \mu_1(A) = \mu_2(A)\big\}$$

contient $\varnothing$, est stable par passage au complémentaire et est stable par union dénombrable croissante : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante pour $\subset$ de parties mesurables qui appartiennent à $\mathscr{C}$, alors

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{C}.$$

II
Conditionnement

26. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.
26.1 La notion de **conditionnement** apparaît lorsqu'on rapporte la réalisation d'un événement quelconque A à la réalisation d'un événement donné B : comment la probabilité de A varie-t-elle lorsqu'on apprend que B est réalisé ?
Autrement dit : quelle information sur A la réalisation de B apporte-t-elle ?
26.2 ✍ *Si l'événement $B \in \mathfrak{A}$ n'est pas négligeable, alors la **probabilité conditionnelle de** $A \in \mathfrak{A}$ **sachant** B est définie par*

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

26.3 Les événements A et B sont presque sûrement incompatibles si, et seulement si,

$$\mathbf{P}(A \mid B) = 0.$$

26.4 On dit que la réalisation de l'événement B **favorise** la réalisation de A lorsque $\mathbf{P}(A \mid B) \geqslant \mathbf{P}(A)$ et qu'elle **défavorise** la réalisation de A lorsque $\mathbf{P}(A \mid B) \leqslant \mathbf{P}(A)$. →[**35**]
Si $0 < \mathbf{P}(B) < 1$, alors

$$\mathbf{P}(A \mid B) \leqslant \mathbf{P}(A) \iff \mathbf{P}(A \mid B^c) \geqslant \mathbf{P}(A)$$

pour tout $A \in \mathfrak{A}$.
26.5 Les probabilités conditionnelles servent à calculer la probabilité de l'intersection de deux événements.
– Si A et B sont deux événements non négligeables, alors

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A \mid B)\,\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \mid A)\,\mathbf{P}(A).$$

– Si l'événement A ou l'événement B est négligeable, alors

$$\mathbf{P}(A \cap B) = 0.$$

27. ➜ *L'application $\mathbf{P}_B$ définie sur $\mathfrak{A}$ par*

$$\forall\, A \in \mathfrak{A}, \quad \mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \mid B)$$

est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathfrak{A})$.

II.1 Probabilités conditionnelles

28. La probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(A \mid B)$, comparée à la probabilité $\mathbf{P}(A)$, permet d'estimer l'influence de la réalisation de B sur la réalisation de A. En quelque sorte, A est un *effet* de la *cause* B. →[**26.4**]
Dans cette perspective, la probabilité de A (calculée indépendamment de la réalisation, ou non, de B) est dite **probabilité a priori** et la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est dite **probabilité a posteriori**.
La première formule de Bayes [**29**] renverse la perspective : sachant que l'effet A est observé, dans quelle mesure prouve-t-il la réalisation préalable de la cause B ?
29. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.
29.1 ➜ **Première formule de Bayes**
Soient A et B, deux événements non négligeables. Alors

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{\mathbf{P}(A \mid B)\ \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

29.2 ➜ **Probabilités composées [3]**
Soient A_1, …, A_n, des événements tels que

$$\mathbf{P}(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathbf{P}(A_1)\,&\mathbf{P}(A_2 \mid A_1)\\ &\times \mathbf{P}(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots\\ &\times \mathbf{P}(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).\end{aligned}$$

30. Exemples
30.1 Soient A et B, deux événements tels que

$$\mathbf{P}(B) = 1/2, \quad \mathbf{P}(A \mid B) = 1/2 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(A \mid B^c) = 1/6.$$

Alors $\mathbf{P}(B^c) = 1/2$, $\mathbf{P}(A^c \mid B) = 1/2$ et $\mathbf{P}(B \mid A) = 3/4$.
30.2 Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement et sans remise trois boules. La probabilité pour que la première et la troisième boules soient noires et que la seconde soit blanche est égale à $4/35$.
31. Systèmes complets d'événements [29]
En général, on ne conditionne pas par un seul événement, mais par une famille d'événements qui modélise l'ensemble des issues possibles d'une situation aléatoire.
31.1 ✍ *Soit $(\Omega, \mathfrak{A})$, un espace probabilisable. On appelle **système complet d'événements** toute famille $(A_k)_{k \in I}$, finie ou dénombrable, d'événements deux à deux incompatibles et tels que*

$$\Omega = \bigsqcup_{k \in I} A_k.$$

31.2 Pour tout $A \in \mathfrak{A}$, la famille (A, A^c) est un système complet d'événements.

31.3 Soit $(A_k)_{k\in I}$, un système complet d'événements.

1.
$$\sum_{k\in I} \mathsf{P}(A_k) = 1$$

2.
$$\forall\, B \in \mathfrak{A}, \qquad B = \bigsqcup_{k\in I} (B \cap A_k)$$
$$\mathsf{P}(B) = \sum_{k\in I} \mathsf{P}(B \cap A_k)$$

32. ➔ *Suite de* **[29]** *– Soit $(A_k)_{k\in I}$, un système complet d'événements non négligeables.*

32.1 Probabilités totales

$$\forall\, B \in \mathfrak{A}, \quad \mathsf{P}(B) = \sum_{k\in I} \mathsf{P}(B \mid A_k)\,\mathsf{P}(A_k)$$

32.2 Deuxième formule de Bayes
Si $B \in \mathfrak{A}$ n'est pas négligeable, alors

$$\forall\, k \in I, \quad \mathsf{P}(A_k \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A_k)\,\mathsf{P}(B \mid A_k)}{\sum_{\ell\in I} \mathsf{P}(A_\ell)\,\mathsf{P}(B \mid A_\ell)}.$$

33. Exemples

33.1 On dispose de deux urnes : l'urne 1 contient deux boules blanches et trois bleues ; l'urne 2 contient trois boules blanches et quatre bleues. On tire une boule dans l'urne 1 et on la place dans l'urne 2. On tire alors une boule dans l'urne 2.

1. La probabilité pour que la première boule tirée soit bleue est égale à $3/5$.
2. La probabilité pour que la deuxième boule tirée soit bleue est égale à $23/40$.

33.2 Deux usines produisent des flaveurmètres bilobés. La première produit deux fois plus de flaveurmètres bilobés que l'usine 2. On estime à 20% (resp. à 5%) la proportion de flaveurmètres bilobés défectueux produits par l'usine 1 (resp. par l'usine 2).

1. La proportion de flaveurmètres produits par l'usine 1 est égale à $2/3$.
2. La proportion de flaveurmètres non défectueux est égale à $17/20$.
3. Si un flaveurmètre tiré au hasard de la production est défectueux, la probabilité pour que ce flaveurmètre ait été produit par l'usine 1 est égale à $8/9$.

34. Paradoxe de Lewis Carroll
Si on ne prend pas soin de préciser comment la mesure de probabilité est définie, on risque de prouver qu'une urne ne peut pas contenir deux boules de la même couleur !

34.1 Une urne contient deux boules, chacune pouvant être noire ou blanche, donc

$$\mathsf{P}(NN) = \mathsf{P}(NB) = \mathsf{P}(BN) = \mathsf{P}(BB) = 1/4.$$

On ajoute une boule noire dans l'urne, donc

$$\mathsf{P}(NNN) = \mathsf{P}(NBN) = \mathsf{P}(BNN) = \mathsf{P}(BBN) = 1/4.$$

On tire au hasard une boule dans l'urne : la probabilité pour que la boule tirée soit noire est égale à $2/3$.

34.2 Pour qu'on ait 2 chances sur 3 de tirer une boule noire dans une urne contenant trois boules, il faut que l'urne contienne deux boules noires et une boule blanche.

34.3 Par conséquent, l'urne contenait initialement une boule noire et une boule blanche, ce qui prouve qu'une urne contenant deux boules ne peut ni contenir deux boules noires, ni contenir deux boules blanches. Étonnant, non ?

II.2 Événements indépendants

35. Comparaison de $\mathsf{P}(A \mid B)$ et de $\mathsf{P}(A)$ [26.4]
On munit l'ensemble $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ de la tribu discrète $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ et de la mesure de probabilité uniforme P :

$$\forall\, k \in \Omega, \quad \mathsf{P}(\{k\}) = 1/6.$$

35.1 Les trois ensembles

$$A_0 = \{4,5,6\}, \quad B_0 = \{1,3,5\}, \quad C_0 = \{2,4,6\}$$

sont des événements de probabilité $1/2$.

35.2 Les probabilités conditionnelles de A_0 sachant B_0 et sachant C_0 sont respectivement égales à $1/3$ et à $2/3$ de telle sorte que

$$\mathsf{P}(A_0 \mid B_0) < \mathsf{P}(A_0) < \mathsf{P}(A_0 \mid C_0).$$

35.3 Avec $A = \{2\}$, $B = \{2,4,6\}$ et $C = \{4,6\}$, on a

$$\mathsf{P}(A \mid B) = 1/3, \quad \mathsf{P}(B \mid A) = 1, \quad \mathsf{P}(C \mid B) = 2/3$$

et $\mathsf{P}(C \mid A) = 0$.

36. Indépendance de deux événements
Soient A et B, deux événements. L'égalité

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \mathsf{P}(A)$$

entre la **probabilité a posteriori** de A et la **probabilité a priori** de A **[28]** signifie que la réalisation de B n'a pas d'influence sur la réalisation de A.

36.1 ✍ *Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, un espace probabilisé. Deux événements A et B sont* ***indépendants*** *lorsque*

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B).$$

36.2 ➔ *Si les événements A et B ne sont pas négligeables, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Les événements A et B sont indépendants.*
2. $\mathsf{P}(A \mid B) = \mathsf{P}(A)$
3. $\mathsf{P}(B \mid A) = \mathsf{P}(B)$

36.3 Un événement négligeable est indépendant de tout autre événement.

36.4 Un événement presque sûr est indépendant de tout autre événement.

37. Famille quelconque d'événements indépendants
La définition de l'indépendance pour une famille d'au moins trois événements est un peu délicate, mais finalement peu utile. En effet, la plupart du temps, l'indépendance d'une famille d'événements est une *hypothèse* faite pour modéliser une situation aléatoire. Il n'y a donc pour ainsi dire jamais d'occasion d'avoir à *prouver* l'indépendance d'une famille d'événements.

37.1 ✍ *Une famille d'événements $(A_k)_{k\in I}$ est une famille d'événements* ***(mutuellement) indépendants****, ou* ***globalement indépendants****, lorsque*

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{k\in J} A_k\Big) = \prod_{k\in J} \mathsf{P}(A_k)$$

pour toute famille finie d'indices $J \subset I$.

37.2 ➔ *Si $(A_k)_{k\in I}$ est une famille d'événements indépendants, alors toute sous-famille $(A_k)_{k\in J}$ est encore une famille d'événements indépendants.*

37.3 En particulier, si les événements $(A_k)_{k\in I}$ sont indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants :

$$\forall\, i \neq j \in I, \quad \mathsf{P}(A_i \cap A_j) = \mathsf{P}(A_i)\,\mathsf{P}(A_j).$$

37.4 Si les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathsf{P}(A_0 A_1 \cdots A_n) = \mathsf{P}(A_0)\,\mathsf{P}(A_1) \cdots \mathsf{P}(A_n).$$

37.5 ➔ *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements indépendants, alors*

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \mathsf{P}(A_k).$$

37.6 Lemme des coalitions
Soit $(A_k)_{k\in I}$, une famille d'événements indépendants. Si

$$J_1 = \{i_1, \dots, i_m\} \quad \text{et} \quad J_2 = \{j_1, \dots, j_n\}$$

sont deux parties finies *disjointes* de I, alors les événements

$$(A_{i_1} \dots A_{i_m}) \quad \text{et} \quad (A_{j_1} \dots A_{j_n})$$

sont indépendants :

$$\mathbf{P}\big[(A_{i_1} \dots A_{i_m}) \cap (A_{j_1} \dots A_{j_n})\big] = \mathbf{P}(A_{i_1} \dots A_{i_m})\,\mathbf{P}(A_{j_1} \dots A_{j_n}).$$

38. Tribus indépendantes
Seule la notion de **tribus indépendantes*** permet de comprendre ce que signifie l'**indépendance mutuelle*** des événements.
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.
38.1 ✍ *Les sous-tribus $\mathfrak{A}_1$, …, $\mathfrak{A}_n$ de $\mathfrak{A}$ sont **indépendantes*** si, et seulement si,*

$$\mathbf{P}(B_1 B_2 \cdots B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k)$$

quels que soient les événements $B_1 \in \mathfrak{A}_1$, …, $B_n \in \mathfrak{A}_n$.
38.2 Deux événements A_1 et A_2 sont indépendants si, et seulement si, les tribus $\sigma(A_1)$ et $\sigma(A_2)$ qu'ils engendrent **[5.5]** sont indépendantes.
38.3 Si les sous-tribus $\sigma(A_1)$, …, $\sigma(A_n)$ engendrées par les événements $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ sont indépendantes, alors les événements A_1, …, A_n sont mutuellement indépendants.
38.4 Réciproquement, si les événements A_1, …, $A_n \in \mathfrak{A}$ sont mutuellement indépendants, alors

$$\mathbf{P}(B_1 B_2 \cdots B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k)$$

quels que soient les événements $B_1 \in \mathfrak{A}_1$, …, $B_n \in \mathfrak{A}_n$. (Raisonner par récurrence sur le plus grand indice $1 \leqslant k \leqslant n$ tel que $B_k = A_k^c$.)

Entraînement

39. Questions pour réfléchir
1.a Si $0 < \mathbf{P}(B) < 1$, alors $\mathbf{P}(A)$ est compris entre $\mathbf{P}(A \mid B)$ et $\mathbf{P}(A \mid B^c)$.
1.b Quels sont les cas d'égalité ?
2. Que vaut $\mathbf{P}(A \mid \Omega)$?
3. Que dire d'un événement $A \in \mathfrak{A}$ tel que $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$?
4. *Suite de* **[27]** – On suppose que l'événement B n'est pas négligeable.
4.a Que vaut $\mathbf{P}_B(B)$?
4.b Que dire des événements $A \in \mathfrak{A}$ tels que $\mathbf{P}_B(A) = 1$?
4.c Si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A) / \mathbf{P}(B)$.
4.d Si A et B sont incompatibles, alors A est négligeable pour $\mathbf{P}_B$ au sens où $\mathbf{P}(A \mid B) = 0$.
5. Si $\mathbf{P}(A \cap B) > 0$, alors :

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(B \mid A) \iff \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B).$$

6. Si $\mathbf{P}(A \mid B) \geqslant \mathbf{P}(A)$, alors $\mathbf{P}(B \mid A) \geqslant \mathbf{P}(B)$. →**[26.4]**
7. Soient A, B et C trois événements. Si $0 < \mathbf{P}(C) < 1$,

$$\mathbf{P}(A \mid C) \geqslant \mathbf{P}(B \mid C) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(A \mid C^c) \geqslant \mathbf{P}(B \mid C^c),$$

alors $\mathbf{P}(A) \geqslant \mathbf{P}(B)$.
8. Si $\mathbf{P}(A) = 1/3$, $\mathbf{P}(B) = 1/5$ et $\mathbf{P}(A \mid B) + \mathbf{P}(B \mid A) = 2/3$, alors $\mathbf{P}(A^c \cup B^c) = 11/12$.
9. Soient B et C, deux événements tels que $\mathbf{P}(B \cap C) > 0$. Alors

$$\forall\, A \in \mathfrak{A}, \quad \mathbf{P}_C(A \mid B) = \mathbf{P}(A \mid B \cap C)$$

ou encore : $(\mathbf{P}_C)_B = \mathbf{P}_{BC}$.
10. Condition pour que

$$\mathbf{P}(A \mid C) = \sum_{k \in I} \mathbf{P}(A \mid B_k \cap C)\,\mathbf{P}(B_k \mid C).$$

11. Soient A_1, …, A_n et B, des événements tels que

$$\mathbf{P}(A_1 \cdots A_{n-1} B) > 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cdots A_n \mid B) = \mathbf{P}(A_1 \mid B)\,&\mathbf{P}(A_2 \mid A_1 B)\\ &\times \mathbf{P}(A_3 \mid A_1 A_2 B) \cdots\\ &\times \mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1} B).\end{aligned}$$

12. Soient $(B_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, un système complet d'événements et A, un événement non négligeable. Si $\mathbf{P}(B_1 \mid A) < \mathbf{P}(B_1)$, alors il existe au moins un entier $2 \leqslant k \leqslant n$ tel que $\mathbf{P}(B_k \mid A) > \mathbf{P}(B_k)$.
13. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux systèmes complets d'événements. Alors la famille $(A_n \cap B_p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est un système complet d'événements.
14. Si les événements A et B sont indépendants, alors les événements A et B^c sont indépendants.
15. Si A et B sont deux événements indépendants, alors A^c et B^c sont des événements indépendants.
16. Soient A et B, deux événements indépendants. Si B est une conséquence de A **[8.5]**, alors A est négligeable ou B est presque sûr.
17. Si deux événements sont presque sûrement incompatibles et indépendants, alors l'un des deux (au moins) est négligeables.
18. Si $\mathbf{P}(A \mid B) = 1/2$ et $\mathbf{P}(A \mid B^c) = 1/3$, alors les événements A et B ne sont pas indépendants.
19. Si l'événement A est indépendant de tous les événements $B \in \mathfrak{A}$, alors $\mathbf{P}(A) = 0$ ou $\mathbf{P}(A) = 1$.
20. Si A et B sont deux événements indépendants tels que $\mathbf{P}(A \cup B) = 1$, alors l'un des deux événements au moins est presque sûr.
21. Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\mathbf{P}(A^c \mid B^c) = \mathbf{P}(A^c)$.
22. Soient A et B, deux événements indépendants de probabilités respectives $1/3$ et $1/4$. Alors $\mathbf{P}(A \cup B^c \mid B) = 1/3$.
23. Soient A, B et C, trois événements. On suppose que A et B sont indépendants et que

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 4\%, \quad \mathbf{P}(C \mid A \cap B) = 1/4, \quad \mathbf{P}(B) = 4\,\mathbf{P}(A).$$

Alors $\mathbf{P}(A \cup B) = 84\%$.
24. *Suite de* **[35]** – Citer une expérience aléatoire décrite par le modèle. Que signifient les événements A, B et C ?

40. Soient A, B et C, trois événements indépendants avec $\mathbf{P}(A) = 1/4$, $\mathbf{P}(B) = 1/3$ et $\mathbf{P}(C) = 1/2$.
1. La probabilité pour qu'aucun de ces événements ne soit réalisé est égale à $1/4$.
2. La probabilité pour qu'un seul de ces événements soit réalisé est égale à $11/24$.

41. Soit $A \in \mathfrak{A}$, un événement tel que $\mathbf{P}(A) > 0$. Si B et C sont deux événements indépendants pour la mesure de probabilité $\mathbf{P}_A$, alors

$$\mathbf{P}(B \mid A \cap C) = \mathbf{P}(B \mid A).$$

42. Soient A et B, deux événements. Si

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A \mid B^c),$$

alors ces deux probabilités conditionnelles sont égales à $\mathbf{P}(A)$: les événements A et B sont indépendants. →**[26.4]**

43. Soient $A \in \mathfrak{A}$ et $B \in \mathfrak{A}$ tels que $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 3/4$. Alors

$$2/3 \leqslant \mathbf{P}(A \mid B) \leqslant 1.$$

44. Quand un tricheur tire une carte dans un jeu de 52 cartes, il est sûr de retourner un as.

1. La probabilité pour qu'un individu retourne un as en tirant une carte dans un jeu de 52 cartes est égale à $(1+12p)/13$, où p est la proportion de tricheurs dans la population.

2. Sachant qu'un individu a retourné un as, la probabilité pour qu'il soit un tricheur est égale à $13p/(12p+1)$.

45. Une boîte contient neuf pièces : deux pièces normales, trois pièces truquées avec deux côtés Face et quatre pièces truquées avec deux côtés Pile.
Si on tire une pièce au hasard et qu'on la lance (sans l'examiner), on obtient Face avec probabilité $4/9$.

46. Un électeur indécis vote tantôt à gauche, tantôt à droite. Pour chaque scrutin, la probabilité pour qu'il vote comme au scrutin précédent est égale à $2/3$.

1. Au premier scrutin, il effectue son choix en tirant à Pile ou Face. Quelle est la probabilité pour qu'il vote à gauche lors des deux premiers scrutins et à droite lors des deux scrutins suivants ?

2. Au premier scrutin, il effectue son choix en tirant dans une urne qui contient une boule rouge (pour voter à gauche) et trois boules bleues (pour voter à droite). Quelle est la probabilité pour qu'il vote à droite au deuxième scrutin ?

47. Dans une usine, les machines M_1, M_2 et M_3 réalisent respectivement 20%, 30% et 50% de la production de ziglotrons à coulisse. Les taux de ziglotrons non conformes produits par ces machines sont respectivement 1%, 2% et 3%.

1. Un ziglotron prélevé dans l'ensemble de la production se révèle défectueux.

1.a Il y a environ 1 chance sur 4 pour qu'il ait été produit par la machine M_2.

1.b Pour quelles valeurs de $1 \leqslant k \leqslant 3$ la probabilité *a posteriori* $\mathsf{P}(M_k \mid D)$ pour que le ziglotron ait été produit par la machine M_k est-elle plus grande que la probabilité *a priori* $\mathsf{P}(M_k)$ pour que le ziglotron ait été produit par la machine M_k ?

2. Un ziglotron prélevé dans l'ensemble de la production se révèle conforme. Il y a environ 3 chances sur 10 pour qu'il ait été construit par la machine M_2. Expliquer.

48. Une particule émise par un matériau radioactif atteint une cible donnée avec une probabilité $p = 1\%$. On modélise ce phénomène aléatoire par une famille $(A_n)_{n\geqslant 1}$ d'événements indépendants tels que $\mathsf{P}(A_n) = p$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. On attend que 10 particules soient émises. Quelle est la probabilité pour qu'au moins l'une d'elles atteignent la cible ?

2. Pour quelle valeur de $N \in \mathbb{N}$ la probabilité qu'au moins l'une des N premières particules émises atteigne la cible est-elle supérieure à 80% ?

49.1 Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$, une suite d'événements indépendants, de même probabilité p.

1. Pour tout entier $k \geqslant 1$, la probabilité de

$$B_k = A_1^c \cdots A_{2k-1}^c A_{2k}$$

est égale à $(1-p)^{2k-1}p$.

2. La probabilité de

$$B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k$$

est égale à $(1-p)/(2-p)$.

49.2 Deux joueurs lancent deux dés à tour de rôle jusqu'à ce que le total des points soit égal à 7.

3. On peut utiliser le modèle précédent avec $p = 1/6$ pour décrire ce jeu.

4. L'événement B correspond au fait que le second joueur gagne.

5. Donner un argument combinatoire prouvant que

$$\mathsf{P}(B) = (1-p)p + (1-p)^2\,\mathsf{P}(B)$$

et retrouver cette relation par le calcul.

50. Des personnes se transmettent une information : ou bien l'information est transmise fidèlement (avec probabilité p), ou bien elle est transformée en son contraire (avec probabilité $(1-p)$). On note p_n, la probabilité pour que la n-ième personne reçoive l'information correcte.

1.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = (2p-1)p_n + (1-p)$$

2.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \frac{1+(2p-1)^n}{2}$$

3. La limite de p_n est indépendante de p.

51. *Suite de* **[26.4]** – Soient A, B et C, trois événements de probabilité strictement positive.

51.1 Si B favorise A, alors A favorise B et B^c défavorise A.

51.2 Si A favorise B et si B favorise C, alors A ne favorise pas nécessairement C. →**[35.3]**

52. Lemme de Borel-Cantelli (suite)
Soient $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'événements indépendants. Le lemme de Borel-Cantelli énonce une **loi de tout ou rien** sur l'événement : →**[75.4]**

$$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n} A_m \in \mathfrak{A}.$$

52.1

1.

$$\forall\, 0 \leqslant u \leqslant 1, \quad 0 \leqslant 1-u \leqslant \exp(-u)$$

2. Si $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si la série $\sum u_n$ diverge, alors →**[4.106]**

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^{N} (1-u_n) = 0.$$

52.2 Si la série $\sum \mathsf{P}(A_n)$ est convergente, alors l'événement B est négligeable **[23]**.

52.3 Si la série $\sum \mathsf{P}(A_n)$ diverge, alors la famille $(A_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements indépendants et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathsf{P}\Big(\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m^c\Big) = 0,$$

donc l'événement B est presque sûr.

53. Indépendance conditionnelle
L'indépendance de deux événements est relative à la mesure de probabilité considérée sur $\mathfrak{A}$. Cette remarque évidente n'est pas anodine : conditionner par un événement $B \in \mathfrak{A}$, c'est substituer la mesure P_B à la mesure P.

53.1 On dispose de deux urnes : la première urne ne contient que des boules noires, la seconde ne contient que des boules blanches. On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

1. Les événements A : *la boule tirée est noire* et B : *la boule tirée est blanche* ne sont pas indépendants.

2. Cependant, si on sait que l'urne choisie est la première, alors les événements A et B sont indépendants !

53.2 *Suite de* **[35.3]** – Les événements A et C ne sont pas indépendants pour la mesure P_B :

$$\mathsf{P}_B(A \cap C) \neq \mathsf{P}_B(A)\,\mathsf{P}_B(C)$$

alors qu'ils sont indépendants pour la mesure P_{B^c} :

$$\mathsf{P}_{B^c}(A \cap C) = \mathsf{P}_{B^c}(A)\,\mathsf{P}_{B^c}(C).$$

53.3 ✍ *Soient* $(\Omega, , \mathsf{P})$, *un espace probabilisé et* $B \in \mathfrak{A}$, *un événement non négligeable.*
Deux événements A_1 *et* A_2 *sont* ***conditionnellement indépendants sachant*** *B lorsqu'ils sont indépendants pour la mesure* P_B *:*

$$\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \mid B) = \mathsf{P}(A_1 \mid B)\ \mathsf{P}(A_2 \mid B).$$

53.4 Soient A, B et C, trois événements. On suppose que

$$0 < p = \mathsf{P}(C) < 1$$

et que les événements A et B sont conditionnellement indépendants sachant C et conditionnellement indépendants sachant C^c.

1. Si on suppose que

$$\mathsf{P}(A \mid C) = \mathsf{P}(B \mid C^c) = 2/3$$
$$\mathsf{P}(A \mid C^c) = \mathsf{P}(B \mid C) = 1/3,$$

alors A et B ne sont pas indépendants.

2. Si $\mathsf{P}(A \mid C) = \mathsf{P}(A \mid C^c) = \mathsf{P}(B \mid C) = \mathsf{P}(B \mid C^c) = 1/2$, alors A et B sont indépendants quel que soit p.

III

Espaces mesurables discrets

54. Nous allons maintenant approfondir la notion d'espace probabilisable : ici, à l'ensemble *indéterminé* Ω de la théorie probabiliste, on pourra substituer un ensemble *connu* E.

54.1 Cet ensemble E peut être fini comme $\{0,1\}$ ou dénombrable comme $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou **continu** comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

54.2 ✍ *Un **espace mesurable** est un couple $(E, \mathcal{E})$ formé d'un ensemble E et d'une tribu $\mathcal{E}$ sur E.*
*Les éléments de la tribu $\mathcal{E}$ sont alors les **parties mesurables** de E.*

54.3 Techniquement, les notions d'**événements** et de **parties mesurables** sont définies de la même manière : ce sont les éléments d'une σ-algèbre.
Cependant, on réserve le terme d'**événement** au cas où cette σ-algèbre est une tribu sur un ensemble *indéterminé* Ω et le terme de **partie mesurable** au cas où la σ-algèbre est constituée de parties d'un ensemble *connu* E. →**[7]**

55. ✍ *Un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est **discret** lorsque la tribu $\mathcal{E}$ est l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E.* →**[57]**

56. ✍ *Une **(mesure de) probabilité discrète** est une mesure de probabilité μ définie sur un espace mesurable discret $(E, \mathcal{E})$.*
*On dit alors que $(E, \mathcal{E}, \mu)$ est un **espace probabilisé discret**.*

57. Cas d'un espace fini ou dénombrable
Soit $(E, \mathcal{E})$, un espace mesurable où l'ensemble E est fini ou dénombrable.

57.1 La tribu $\mathcal{E}$ contient les singletons :

$$\forall\, x \in E, \qquad \{x\} \in \mathcal{E}$$

si, et seulement si, $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$.

57.2 Convention
Sauf indication contraire, un ensemble fini ou dénombrable E est toujours muni de la tribu discrète $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$.

III.1 Mesures de probabilité discrètes

58. ✍ *Soit E, un ensemble fini ou dénombrable. On appelle **loi (de probabilité) discrète** sur E toute famille sommable $(p_x)_{x\in E}$ de réels positifs telle que*

$$\sum_{x\in E} p_x = 1.$$

59. Exemples de lois discrètes
Les lois discrètes élémentaires servent à dénombrer des quantités aléatoires et dans ce cas, l'ensemble E est égal à $\mathbb{N}$ ou à une partie de $\mathbb{N}$.

59.1

$$\forall\, x \in \{0,1,\dots,7\}, \quad p_x = \frac{(x+1)(x-8)}{120}$$

59.2

$$\forall\, x \in \mathbb{N}^*, \quad p_x = \frac{1}{x(x+1)}$$

59.3

$$\forall\, x \in \mathbb{N}^*, \quad p_x = 2^{-x}$$

59.4

$$\forall\, x \in \mathbb{N}^*, \quad p_x = \frac{6}{\pi^2 x^2}$$

59.5

$$\forall\, x \in \mathbb{N}^*, \quad p_x = \frac{2^{-x}}{x\,\ell n\, 2}$$

60. Caractérisation des mesures de probabilité discrètes
Soit E, un ensemble fini ou dénombrable muni de la tribu discrète $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$ et d'une mesure de probabilité μ.

60.1 Pour toute partie $A \subset E$,

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} \mu(\{x\}).$$

60.2 La famille $\big(\mu(\{x\})\big)_{x\in E}$ est une famille sommable de réels positifs telle que

$$\sum_{x\in E} \mu(\{x\}) = 1.$$

60.3 ➔ *Soit E, un ensemble fini ou dénombrable.*
Pour toute loi de probabilité discrète $(p_x)_{x\in E}$ sur E, il existe une, et une seule, mesure de probabilité discrète μ sur $(E, \mathcal{E})$ telle que

$$\forall\, x \in E, \qquad \mu(\{x\}) = p_x.$$

III.2 Lois usuelles

61. On considère ici des lois de probabilité discrètes $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies sur l'espace mesurable discret $(E, \mathcal{E})$ où $E = \mathbb{N}$.

62. ✍ *Pour tout $k_0 \in \mathbb{N}$, la **loi de Dirac en** k_0 est définie par*

$$p_{k_0} = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \neq k_0, \quad p_k = 0.$$

63. ✍ *Pour tout $0 < p < 1$, la **loi de Bernoulli de paramètre** p est définie par*

$$p_0 = 1 - p, \quad p_1 = p \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 2, \quad p_2 = 0.$$

64. ✍ *Pour toute partie finie $A \subset \mathbb{N}$, la **loi uniforme sur** A est définie par*

$$\forall\, k \in A, \quad p_k = \frac{1}{\#(A)}$$

et $p_k = 0$ pour tout $k \notin A$.

65. ✍ *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$, la **loi binomiale de paramètres** (n, p) est définie par*

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et $p_k = 0$ pour tout $k > n$.

66. ✍ *Pour tout $0 < p < 1$, la **loi géométrique de paramètre** p est définie par*

$$p_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 1, \quad p_k = (1-p)^{k-1} p.$$

67. ✍ *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la **loi de Poisson de paramètre** λ est définie par*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Entraînement

68. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* **[64]** – Peut-on définir une loi uniforme sur un ensemble dénombrable ?

2. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$, un espace probabilisé discret. L'ensemble des $x \in E$ tels que $\mu(\{x\}) > 0$ est au plus dénombrable.

69. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une loi de probabilité discrète sur $\mathbb{N}$. On appelle **mode** de cette loi tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$p_n = \max_{q\in\mathbb{N}} p_q.$$

1. La loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins un mode.
2. Quels sont les modes des lois discrètes usuelles ?
3. Exemples de loi admettant plusieurs modes ?

70. Support d'une loi discrète
Soit μ, une mesure de probabilité sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. On suppose que la tribu $\mathcal{E}$ contient tous les singletons et qu'il existe une partie finie ou dénombrable $E_0 \in \mathcal{E}$ telle que

$$\mu(E_0) = 1.$$

Le **support** d'une telle mesure μ est alors défini par

$$S_\mu = \{x \in E \,:\, \mu(\{x\}) > 0\}.$$

1. Le support de μ est une partie mesurable de E : $S_\mu \in \mathcal{E}$ et $\mu(S_\mu) = 1$.
2. Si A est une partie mesurable telle que $\mu(A) = 1$, alors $S_\mu \subset A$.
3. Il existe une, et une seule, mesure de probabilité discrète μ_0 sur E telle que

$$\forall\, A \in \mathcal{E}, \quad \mu_0(A) = \mu(A).$$

71. Convolée de deux lois discrètes
Soient μ et ν, deux mesures de probabilités discrètes sur $E = \mathbb{Z}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$p_n = \mu(\{n\}) \quad \text{et} \quad q_n = \nu(\{n\}).$$

71.1 La famille $(r_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad r_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k q_{n-k}$$

est une loi de probabilité discrète sur $\mathbb{Z}$.
71.2 On note $\mu \otimes \nu$, l'unique [**60.3**] mesure de probabilité discrète sur $\mathbb{Z}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad (\mu \otimes \nu)(\{n\}) = r_n.$$

Le support [**70**] de $\mu \otimes \nu$ est contenu dans

$$S_\mu + S_\nu = \{x + y\,,\, x \in S_\mu,\, y \in S_\nu\}.$$

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

72. Méthodes
1. Soit $(\Omega, \mathfrak{A})$, un espace probabilisable.
1.a Comment démontrer qu'une partie $A \subset \Omega$ est un événement ($A \in \mathfrak{A}$) ?
1.b Comment définir une mesure de probabilité sur $\mathfrak{A}$?
2. Comment calculer la probabilité de l'intersection :
2.a de deux événements ?
2.b d'un nombre fini d'événements ?
2.c d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements ?
3. Comment calculer la probabilité de l'union :
3.a de deux événements ?
3.b d'un nombre fini d'événements ?
3.c d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements ?

73. Questions pour réfléchir
1. Y a-t-il un intérêt à définir $\mathbf{P}(A \mid B)$ lorsque l'événement B est négligeable ? Si oui, comment définir ce nombre ?
2. Comparer les notions de **partition** et de **système complet d'événements**.
3. Chaque variable aléatoire discrète définit un système complet d'événements.
4. Deux événements indépendants peuvent-ils être incompatibles ?
5. *Suite de* [**37.5**] – Étendre au cas d'une famille dénombrable $(A_k)_{k\in I}$. →[**74**]
6. Relier la notion de loi de probabilité discrète à celle de combinaison convexe.

Approfondissement

74. Produits infinis
Soit $(p_k)_{k\in I}$, une famille dénombrable de réels compris entre 0 et 1. On définit le **produit infini** de cette famille par

$$\prod_{k\in I} p_k = \inf_{J\in\mathfrak{P}_0(I)} \prod_{k\in J} p_k.$$

1. Le produit infini est bien défini et compris entre 0 et 1.
2. Pour toute permutation σ de I,

$$\prod_{k\in I} p_{\sigma(k)} = \prod_{k\in I} p_k.$$

3. Si $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une énumération [**5.6.2**] de I, alors

$$\prod_{k\in I} p_k = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^{N} p_{k_n}.$$

75. Suites d'événements
Soit $(\Omega, \mathfrak{A})$, un espace probabilisable. On cherche à étendre le concept de **limite** aux suites d'événements par analogie avec les suites réelles :
- Le terme général d'une suite réelle appartient à $\mathbb{R}$, qui est (totalement) ordonné par $\leqslant$;
- le terme général d'une suite d'événements appartient à $\mathfrak{A}$, qui est (partiellement) ordonnée par $\subset$.

75.1 ✍ *Soient E, un ensemble ordonné par $\leqslant$ et X, une partie de E.*
1. *L'ensemble $\mathfrak{m}(X)$ des **minorants** de X est défini par*

$$y \in \mathfrak{m}(X) \iff \forall\, x \in X, \quad y \leqslant x.$$

2. *L'ensemble $\mathfrak{M}(X)$ des **majorants** de X est défini par*

$$z \in \mathfrak{M}(X) \iff \forall\, x \in X, \quad x \leqslant z.$$

3. *Un élément y_0 de E est la **borne inférieure** de X lorsque y_0 est un minorant de X :*

$$\forall\, x \in X, \quad y_0 \leqslant x$$

et que y_0 est plus grand que tous les autres minorants de X :

$$\forall\, y \in \mathfrak{m}(X), \quad y \leqslant y_0.$$

4. *Un élément z_0 de E est la **borne supérieure** de X lorsque z_0 est un majorant de X :*

$$\forall\, x \in X, \quad x \leqslant z_0$$

et que z_0 est plus petit que tous les autres majorants de X :

$$\forall\, z \in \mathfrak{M}(X), \quad z_0 \leqslant z.$$

75.2 La tribu $\mathfrak{A}$ est ordonnée par $\subset$.
5. L'événement certain Ω majore tout événement et l'événement impossible $\varnothing$ minore tout événement.
6. Une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet respectivement

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

pour borne supérieure et pour borne inférieure.

75.3 ✍ *Une suite croissante d'événements converge vers sa borne supérieure.*
Une suite décroissante d'événements converge vers sa borne inférieure.
75.4 ✍ **Limite inférieure, limite supérieure**
*La **limite supérieure** de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par*

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m$$

*et sa **limite inférieure** par*

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m.$$

7. La limite inférieure et la limite supérieure de la suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des événements.
8. Un élément $\omega \in \Omega$ appartient à $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ si, et seulement si, il appartient à une infinité d'événements A_n.
9. Un élément $\omega \in \Omega$ appartient à $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$ si, et seulement si, à partir d'un certain rang, il appartient à tous les A_n.
10.
$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$
11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$B_n = \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m = \sup_{m\geqslant n} A_m \quad \text{et} \quad C_n = \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m = \inf_{m\geqslant n} A_m.$$

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad C_n \subset A_n \subset B_n$$
et
$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \lim_{n\to+\infty} B_n, \quad \liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \lim_{n\to+\infty} C_n.$$
12. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements B_n et C_n sont indépendants, alors $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sont indépendants.
75.5 ✍ *Une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** si, et seulement si, sa limite inférieure est égale à sa limite supérieure. Dans ce cas, on pose*
$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$
75.6 Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements qui converge vers A, alors $A \in \mathfrak{A}$ et $\mathsf{P}(A_n)$ tend vers $\mathsf{P}(A)$.

Pour aller plus loin

76. Atomes d'une tribu
Les **atomes** d'une tribu $\mathfrak{A}$ sont les éléments minimaux de cette tribu pour la relation d'ordre $\subset$.
76.1 ✍ *On appelle **atome** de la tribu $\mathfrak{A}$ tout événement $A \in \mathfrak{A}$ distinct de $\varnothing$ et tel que*

$$\forall\, B \in \mathfrak{A}, \qquad B \subset A \implies \left| \begin{array}{l} B = \varnothing \\ B = A \end{array} \right. .$$

76.2 Atomes de la tribu discrète
Si $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$, alors les atomes de $\mathfrak{A}$ sont les singletons.
76.3 Deux atomes distincts de $\mathfrak{A}$ sont disjoints.
76.4 On suppose que la tribu $\mathfrak{A}$ est finie.
1. Quel que soit $\omega \in \Omega$, l'événement

$$A_\omega = \bigcap_{A\in\mathfrak{A}\,:\,\omega\in A} A \in \mathfrak{A}$$

est le plus petit événement qui contienne ω : cet événement est un atome de $\mathfrak{A}$.
2. Tout point $\omega \in \Omega$ appartient à un (et un seul) atome de $\mathfrak{A}$ et l'ensemble des atomes de $\mathfrak{A}$ est un système complet d'événements.

76.5 On suppose que l'ensemble des atomes de $\mathfrak{A}$ est un système complet d'événements de Ω et, pour tout $\omega \in \Omega$, on note A_ω, l'atome de $\mathfrak{A}$ qui contient ω.
3. Soit $A \in \mathfrak{A}$.
3.a Pour tout $\omega \in A$, l'atome A_ω est contenu dans A.
3.b
$$A = \bigcup_{\omega\in A} \{\omega\} = \bigcup_{\omega\in A} A_\omega.$$
4. En notant $(B_k)_{k\in I}$, la famille des atomes,

$$\forall\, A \in \mathfrak{A}, \quad A = \bigsqcup_{k\in I\,:\,A\cap B_k\neq\varnothing} B_k.$$

5. Si la famille des atomes de $\mathfrak{A}$ est un système complet de n événements, alors la cardinal de la tribu $\mathfrak{A}$ est égal à 2^n.
76.6 Quand une tribu compte une infinité non dénombrable d'atomes, la notion d'**atome** perd tout intérêt : expliquer.

Tribu engendrée par une famille de parties

77.1 Soit $\mathfrak{T}$, une famille de tribus sur E. Alors

$$\mathcal{E} = \bigcap_{\mathcal{T}\in\mathfrak{T}} \mathcal{T}$$

est une tribu sur E.
77.2 Soit $\mathcal{F}$, une famille de parties de E.
La tribu discrète $\mathfrak{P}(E)$ est une tribu sur E qui contient $\mathcal{F}$.
L'intersection $\mathcal{E}$ de toutes les tribus sur E qui contiennent $\mathcal{F}$ est une tribu qui contient $\mathcal{F}$. Cette tribu $\mathcal{E}$ est contenue dans toute tribu $\mathcal{T}$ qui contient $\mathcal{F}$.
77.3 ✍ *La **tribu engendrée** par une famille $\mathcal{F}$ de parties de E est la plus petite tribu sur E qui contienne $\mathcal{F}$.*
78. Tribu engendrée par les singletons
La **tribu engendrée par les singletons** est la plus petite tribu $\mathscr{S}$ sur E telle que
$$\forall\, x \in E, \qquad \{x\} \in \mathscr{S}.$$
Une partie A de E appartient à la tribu $\mathscr{S}$ si, et seulement si, cette partie A est finie ou dénombrable ou si son complémentaire A^c est fini ou dénombrable. →[57]
79. Tribu engendrée par un événement
La tribu engendrée par une partie $A \subset \Omega$ est la tribu, notée $\sigma(A)$, égale à $\{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$. →[5.5]
79.1 Pour tout $p \in [0,1]$, il existe une, et une seule, mesure de probabilité P sur $\sigma(A)$ telle que $\mathsf{P}(A) = p$.
79.2 Comparer la tribu $\sigma(A)$ engendrée par l'événement A à la tribu discrète sur $E = \{0,1\}$. Comparer la mesure P à une loi de Bernoulli.
80. Tribu engendrée par un système complet
Soit $(\Omega, \mathfrak{A}_0)$, un espace probabilisable.
On suppose connu un système complet d'événements $(A_k)_{k\in I}$ où I est fini ou dénombrable.
80.1 Si une tribu contient tous les événements A_k, alors elle contient aussi l'événement

$$\bigsqcup_{k\in Q} A_k$$

quelle que soit la partie $Q \subset I$.
80.2 L'ensemble

$$\mathfrak{A} = \Big\{ \bigsqcup_{k\in Q} A_k, \quad Q \in \mathfrak{P}(I) \Big\}$$

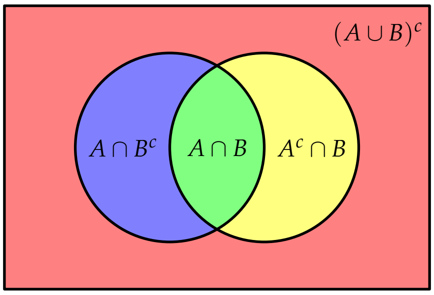
est la tribu engendrée par le système complet $(A_k)_{k\in I}$.
80.3 Pour toute loi discrète $(p_k)_{k\in I}$ sur I, il existe une, et une seule, mesure de probabilité P sur la tribu $\mathfrak{A}$ telle que

$$\forall\, k \in I, \qquad \mathsf{P}(A_k) = p_k.$$

80.4 Si le cardinal de I est égal à n, alors le cardinal de la tribu $\mathfrak{A}$ est égal à 2^n.
Si l'ensemble I est infini, alors la tribu $\mathfrak{A}$ n'est pas dénombrable.
Un tel système complet apparaît naturellement en conditionnant par une variable aléatoire discrète.

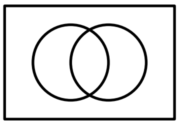
81. Tribu engendrée par deux événements
Soient A et B, deux parties d'un ensemble Ω.
81.1 La tribu $\sigma(A, B)$ engendrée par A et B est la tribu engendrée par le système complet d'événements

$$A \cap B, \quad A^c \cap B, \quad A \cap B^c, \quad (A \cup B)^c.$$



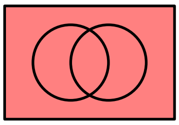
81.2 La tribu $\sigma(A, B)$ est constituée de seize événements :

1. L'événement impossible



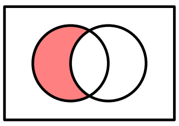
$\varnothing$

et l'événement certain, réunion de tous les atomes

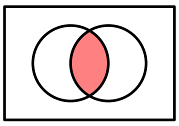


Ω

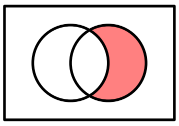
2. Les quatre atomes [76]



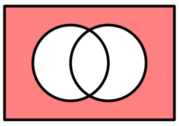
$A \cap B^c$



$A \cap B$

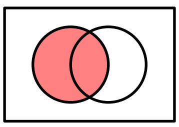


$A^c \cap B$

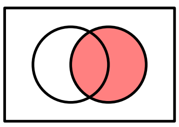


$(A \cup B)^c$

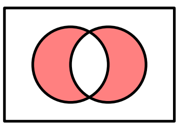
3. Les six événements constitués de deux atomes



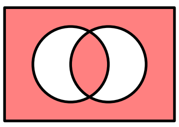
A



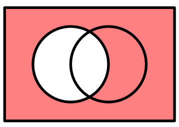
B



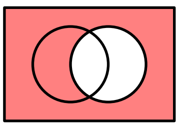
$A \Delta B$



$(A \Delta B)^c$

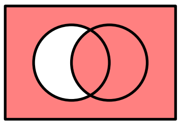


A^c

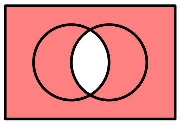


B^c

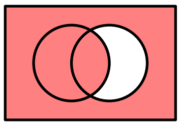
4. Les quatre événements constitués de trois atomes



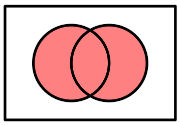
$A^c \cup B$



$(A \cap B)^c$



$A \cup B^c$



$A \cup B$

81.3 L'un des atomes peut-il être vide ? Comment la tribu $\sigma(A, B)$ est-elle modifiée dans ce cas ? Envisager le cas où deux des atomes sont vides.

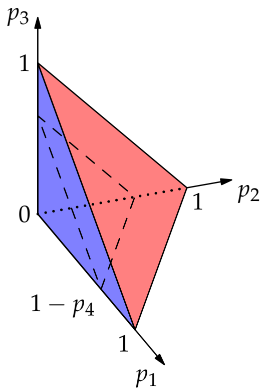
81.4 Caractérisation d'une probabilité sur $\sigma(A, B)$
Une mesure de probabilité $\mathbf{P}$ sur $\sigma(A, B)$ est caractérisée [**80.3**] par la valeur qu'elle attribue aux quatre atomes

$$A \cap B, \quad A^c \cap B, \quad A \cap B^c \quad \text{et} \quad A^c \cap B^c.$$

On peut donc identifier l'ensemble des mesures de probabilité sur $\sigma(A, B)$ à l'ensemble des triplets

$$(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

de réels positifs tels que $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, qui est une partie compacte d'un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et qu'on peut voir aussi comme un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$.



81.5 Autre caractérisation
Comme

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A^c \cap B) &= \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \\
\mathbf{P}(A \cap B^c) &= \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) \\
\mathbf{P}(A^c \cap B^c) &= 1 - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \cap B)
\end{aligned}$$

la connaissance des probabilités $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(A \cap B)$ détermine la mesure de probabilité $\mathbf{P}$ sur la tribu $\sigma(A, B)$.
Réciproquement, si q_1, q_2 et q_3 sont trois réels tels que

$$q_1 \geqslant 0, \quad q_1 \leqslant q_2, \quad q_1 \leqslant q_3 \quad \text{et} \quad q_2 + q_3 \leqslant 1 + q_1$$

alors il existe une, et une seule, mesure de probabilité $\mathbf{P}$ sur la tribu $\sigma(A, B)$ telle que

$$\mathbf{P}(A \cap B) = q_1, \quad \mathbf{P}(A) = q_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(B) = q_3.$$

81.6 Une autre caractérisation repose sur la loi d'un couple de variables aléatoires de Bernoulli. →[**15.11**]

82. Tribu engendrée par n événements

Étant donné un espace probabilisable $(\Omega, \mathfrak{A}_0)$, on note $\mathfrak{A}$, la tribu engendrée par n événements $O_1, \dots, O_n$.
Pour toute partie Q de $\{1, \dots, n\}$, on pose

$$A_Q = \Big(\bigcap_{k \in Q} O_k\Big) \cap \Big(\bigcap_{k \in Q^c} O_k^c\Big) \in \mathfrak{A}.$$

82.1 Si $(O_1, \dots, O_n)$ est un système complet d'événements, alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad A_{\{k\}} = O_k$$

et si $Q \subset \{1, \dots, n\}$ n'est pas un singleton, alors $A_Q = \varnothing$.
Si les événements $O_1, \dots, O_n$ sont deux à deux disjoints, on peut poser

$$O_{n+1} = O_1^c \cap \cdots \cap O_n^c \in \mathfrak{A}$$

de telle sorte que $(O_1, \dots, O_n, O_{n+1})$ soit un système complet d'événements.

82.2 Les événements A_Q constituent un système complet :

$$\bigsqcup_{Q \subset \{1,\dots,n\}} A_Q = \Omega.$$

La tribu $\mathfrak{A}$ est la tribu engendrée par ce système complet d'événements :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad O_k = \bigsqcup_{\substack{Q \subset \{1,\dots,n\} \\ k \in Q}} A_Q.$$

82.3 Les événements A_Q non vides sont les atomes de $\mathfrak{A}$. La tribu $\mathfrak{A}$ compte au plus 2^n atomes et au plus $2^{(2^n)}$ événements.