# Suites récurrentes

**1. Position du problème**
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $E$, définie par la donnée d'un terme initial $u_0$ et par une relation de récurrence de la forme

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

où $f$ est une fonction définie sur une partie $\Omega$ de $E$ et à valeurs dans $E$.
**1.1** Les exemples les plus simples sont les suites **arithmétiques**, où $f$ est une translation :

$$\forall\, x \in E, \qquad f(x) = x + a$$

pour lesquelles

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n = u_{n_0} + (n - n_0)a$$

et les suites **géométriques**, où $f$ est une homothétie :

$$\forall\, x \in E, \qquad f(x) = qx$$

pour lesquelles

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n = q^{n-n_0} u_{n_0}.$$

**1.2** Nous allons d'abord vérifier qu'une telle suite est bien définie [**2**]. L'étude des fonctions $f$ et $g = [x \mapsto f(x) - x]$ peut ensuite indiquer la limite éventuelle de la suite [**4**] et son sens de variation [**7**] : il importe de raisonner sur une figure faisant apparaître le graphe de $f$ et celui de $g$.
**1.3** Si une telle suite converge, il est important d'estimer sa vitesse de convergence ([**9**], [**11**], [**13**]) : cela permet de savoir combien de termes il faut calculer pour obtenir une valeur approchée de la limite avec une précision donnée.
**2.1** ✍ *Une partie $I$ de $E$ est **stable** par $f$ lorsqu'elle est contenue dans l'ensemble de définition de $f$ et que*

$$\forall\, x \in I, \qquad f(x) \in I.$$

**2.2** Soit $f$, une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le segment $[a, b]$ est stable par $f$ si, et seulement si, le graphe de la restriction de $f$ à $[a, b]$ est contenu dans le carré qui admet $(a, a)$ et $(b, b)$ pour sommets opposés.
**2.3** ➔ *Soit $I$, une partie de $E$ stable par $f$. Pour tout $x \in I$, il existe une, et une seule, suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = x$ et que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

**3. Exemples**
**3.1** On suppose que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - \frac{x^2}{3}.$$

Le segment $[0, 1]$ est stable par $f$. →[**5.1**]
**3.2** On suppose que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad f(x) = \sqrt{3x + 4}.$$

Les intervalles $[0, 4]$ et $[4, +\infty[$ sont stables par $f$. →[**8.2**]
**3.3** On suppose que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + x^2.$$

Les intervalles $[-1, 0]$ et $[0, +\infty[$ sont stables par $f$. →[**5.2**]
**3.4** On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \cos u_n.$$

Il existe un segment $[0, \alpha] \subset [0, \pi/2]$ qui est stable par cos et qui contient $u_2$, quelle que soit la valeur de $u_0$. →[**6.3**]
**3.5** On suppose que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1-x}{2} e^x.$$

Le segment $[0, 1/2]$ est stable par $f$ et contient $u_2$, quelle que soit la valeur de $u_0$. →[**6.4**]
**3.6** On suppose que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ell n(1 + e^{-x}).$$

Le segment $[0, \ell n\, 2]$ est stable par $f$ et contient $u_2$, quelle que soit la valeur de $u_0$. →[**5.3**]
**3.7** On suppose que

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{1}{3}\Big(2x + \frac{a^3}{x^2}\Big)$$

où $a > 0$. Les intervalles $]0, +\infty[$ et $[a, +\infty[$ sont stables par $f$ et $u_1$ appartient à $[a, +\infty[$, quelle que soit la valeur de $u_0$. →[**8.6**]
**3.8** On suppose que

$$\forall\, x \neq -1, \quad f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x + 2}.$$

Les intervalles $]-\infty, -3]$ et $[1, +\infty[$ sont stables par $f$.
Si $u_0 < -1$, alors $u_n \leqslant -3$ pour tout $n \geqslant 1$. →[**8.4**]
Si $u_0 > -1$, alors $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$. →[**8.5**]
**3.9** On suppose que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Le segment $[1/2, 7/8]$ et l'intervalle ouvert $]-\infty, -1-\sqrt{3}[$ sont stables par $f$. →[**5.4**]
**3.10** On suppose que

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad f(x) = -x\, \ell n\, x.$$

L'intervalle $]0, 1/e[$ est stable par $f$ et contient $u_1$, quel que soit $u_0 \in\, ]0, 1[$. →[**8.7**]
**3.11** On suppose que

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \ell n\Big[\frac{e}{2}\Big(x + \frac{1}{x}\Big)\Big].$$

L'intervalle $]1, +\infty[$ est stable par $f$ et contient $u_1$, quel que soit $u_0 > 0$. →[**8.9**]
**4. Condition nécessaire de convergence**
**4.1** ✍ *Un point $x$ est un **point fixe** de $f$ lorsque $f(x) = x$.*
**4.2** ➔ *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ et si $f$ est continue en $\ell$, alors $\ell$ est un point fixe de $f$.*
**5. Exemples**
**5.1** Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle tend vers →[**8.1**]

$$\alpha = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \quad \text{ou vers} \quad \beta = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}.$$

**5.2** *Suite de* [**3.3**] – Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle tend vers 0. →[**8.3**]

**5.3** *Suite de* [**3.6**] – La fonction $f$ admet

$$\ell = \ell\text{n}\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

pour unique point fixe. →[**12.5**]

**5.4** *Suite de* [**3.9**] – Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle tend vers $\alpha = -1-\sqrt{3}$ ou vers $\beta = -1+\sqrt{3}$. →[**8.8**]

**5.5** Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 1$ et la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 - 1}}$$

converge, alors elle tend vers $\sqrt{2}$. Comme $u_{n+2} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette suite converge si, et seulement si, $u_0 = \sqrt{2}$.

**6. Autres exemples**

Lorsqu'on ne peut expliciter les points fixes de $f$, on peut essayer d'appliquer le théorème d'inversion à la fonction

$$g = [t \mapsto f(t) - t]\,.$$

**6.1** ➔ **Théorème d'inversion**

*Si $g$ est une fonction continue et strictement monotone d'un intervalle $I$ dans $\mathbb{R}$, alors elle réalise une bijection de $I$ sur l'intervalle $g_*(I)$.*

**6.2** ▷ *Si $g$ est continue et strictement monotone du segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et si $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes opposés, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une, et une seule, solution dans $[a, b]$.*

**6.3** *Suite de* [**3.4**] – L'équation $\cos x = x$ admet une, et une seule, solution réelle $\ell$. Cette solution appartient à $[0, \alpha]$. →[**12.3**]

**6.4** *Suite de* [**3.5**] – La fonction $f$ admet un unique point fixe $\ell$, qui appartient à $[0, 1/2]$. →[**12.4**]

**7. Sens de variation**

On suppose que $x_0$ est pris dans $I$, intervalle stable par $f$. On considère aussi la fonction $g = [t \mapsto f(t) - t]$.

**7.1** Si $f$ est croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

**7.2** Si $f$ est décroissante, alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et varient en sens contraires.

**7.3** Si $g$ est positive, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

**7.4** Si $g$ est négative, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

**8. Exemples**

**8.1** *Suite de* [**5.1**] – Si $u_0 = 0$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. →[**12.1**]

**8.2** *Suite de* [**3.2**] – Si $u_0 = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers 4. →[**12.2**]

**8.3** *Suite de* [**3.3**] – Quel que soit $u_0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Si $-1 \leqslant u_0 \leqslant 0$, alors [**5.2**] elle tend vers 0. →[**10.1**]
Sinon, elle diverge vers $+\infty$. →[**18**]

**8.4** *Suite de* [**3.8**] – Si $u_0 < -1$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et converge vers $-3$. →[**12.6**]

**8.5** *Suite de* [**3.8**] – Si $u_0 > -1$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 1. →[**12.6**]

**8.6** *Suite de* [**3.7**] – La suite extraite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $a$. →[**12.7**]

**8.7** *Suite de* [**3.10**] – La suite extraite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et tend vers $1/e$. →[**14.1**]

**8.8** *Suite de* [**5.4**] – Si $|u_0| > \alpha$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers $-\infty$.
Sinon, il existe $n_0$ tel que $u_{n_0} \in [1/2, 7/8]$. →[**12.8**]

**8.9** *Suite de* [**3.11**] – La suite extraite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 1. →[**14.2**]

**Estimation asymptotique par le théorème de Cesaro**

**9.** S'il existe $\alpha > 0$ tel que la suite de terme général

$$\frac{1}{(u_{n+1} - \ell)^\alpha} - \frac{1}{(u_n - \ell)^\alpha}$$

converge vers une limite finie non nulle $\lambda$, alors

$$u_n = \ell + \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\lambda n}} + o\Big(\frac{1}{\sqrt[\alpha]{n}}\Big)$$

quand $n$ tend vers $+\infty$. →[**25**]

**10. Exemples**

**10.1** *Suite de* [**8.3**] – Si $-1 < u_0 < 0$, alors $u_n \sim -1/n$.

**10.2** On considère la suite définie par la donnée de $u_0$ et la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Quel que soit $u_0$, la suite extraite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $u_n \sim \sqrt{3/n}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**10.3** La suite définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

tend vers $+\infty$ et $u_n \sim \sqrt{2n}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**10.4** La suite définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$$

tend vers $+\infty$ et $u_n \sim \sqrt{n}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Convergence géométrique**

**11.** On suppose ici que la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe $\ell$ de $f$ tel que

$$\big|f'(\ell)\big| < 1.$$

**11.1** Il existe un voisinage $I_0$ de $\ell$ tel que $u_n \in I_0$ à partir d'un certain rang et il existe $K < 1$ tel que

$$\forall\, t \in I_0, \quad \big|f'(t)\big| \leqslant K$$

donc

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant K|u_n - \ell|$$

pour tout $n$ assez grand.

**11.2** Lorsque $n$ tend vers $+\infty$,

$$u_n = \ell + \mathcal{O}(K^n).$$

**12. Exemples**

**12.1** *Suite de* [**8.1**] – La fonction $f$ est $2/3$-lipschitzienne sur le segment $[0, 1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta$. →[**19**]

**12.2** *Suite de* [**8.2**] – La fonction $f$ est $1/2$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ et la série $\sum(4 - u_n)$ est absolument convergente.

**12.3** *Suite de* [**6.3**] – Il existe $0 < k < 1$ tel que $u_n = \ell + \mathcal{O}(k^n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**12.4** *Suite de* [**6.4**] – Il existe $0 < k < 1$ tel que $u_n = \ell + \mathcal{O}(k^n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**12.5** *Suite de* [**5.3**] – Lorsque $n$ tend vers $+\infty$,

$$u_n = \ell\text{n}\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{2^n}\Big).$$

**12.6** *Suite de* [**3.8**] – Soit $k > 0$.
Si $u_0 < -1$, alors $u_n = -3 + o(k^n)$ par [**8.4**].
Si $u_0 > -1$, alors $u_n = 1 + o(k^n)$ par [**8.5**]. →[**13**]

**12.7** *Suite de* [**8.6**] – Pour tout $k > 0$, →[**13**]

$$u_n = a + o(k^n).$$

**12.8** *Suite de* [**8.8**] – Si $|u_0| < \alpha$, alors

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_n - \beta| \leqslant \Big(\frac{7}{8}\Big)^n |u_{n_0} - \beta|$$

et

$$\frac{u_{n+1} - \beta}{u_n - \beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\beta.$$

**Convergence exponentielle**

**13.** On suppose ici que la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe $\ell$ de $f$ tel que

$$f'(\ell) = 0.$$

**13.1** Par **[11]**, pour tout $q < 0$, la différence $(u_n - \ell)$ est négligeable devant $q^n$. Cette comparaison ne donne pas une bonne idée de l'ordre de grandeur de $(u_n - \ell)$.

**13.2** Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\sup_{t\in[\ell-\alpha,\ell+\alpha]} \left|f''(t)\right| < \frac{2}{\alpha}.$$

et $u_n \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha]$ à partir d'un certain rang $n_0$.

**13.3** Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n_0+k+1} - \ell| \leqslant \sup_{t\in[\ell-\alpha,\ell+\alpha]} \left|f''(t)\right| \frac{|u_{n_0+k} - \ell|^2}{2}.$$

**13.4** Il existe $0 < r < 1$ tel que

$$u_{n_0+k} = \ell + \mathcal{O}(r^{2^k})$$

lorsque $k$ tend vers $+\infty$.

**14. Exemples**

**14.1** *Suite de* **[8.7]** – Il existe $A > 0$ tel que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{1}{e} - u_n \leqslant A(1/e)^{2^n}.$$

**14.2** *Suite de* **[8.9]** – Pour tout $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{(u_n - 1)^2}{2}.$$

Il existe $n_0$ tel que $1 \leqslant u_n < 2$ pour tout $n \geqslant n_0$ et

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_{n_0+p} \leqslant \frac{1}{2}(2u_{n_0})^{2^p}.$$

## Questions, exercices & problèmes

Dans toutes les questions qui suivent, on considère une fonction $f$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

**15. Exemples et contre-exemples**

1. Exemples de parties de $\mathbb{R}$ qui sont stables par exp ; par ℓn ; par sin ; par $[x \mapsto 1/x]$.
2. Exemple de fonction $f$ pour laquelle la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $\ell$ qui n'est pas un point fixe de $f$.
3. Exemple de suite divergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ soient toutes deux convergentes.

**16. Questions pour réfléchir**

1. On suppose que $u_0 = 18$. Combien existe-t-il d'entiers $n$ tels que $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2}$ ?
2. Si $u_0$ est choisi dans un intervalle $I$ qui est stable par $f$ et si $f$ n'a aucun point fixe dans $I$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle divergente ?
3. Si le segment $[a, b]$ est stable par $f$ et si la fonction $f$ est continue, alors l'expression $f(t) - t$ change de signe sur $[a, b]$ et $f$ admet un point fixe dans $[a, b]$.

4.a Si $x_0$ est un point fixe de $f$, alors $x_0$ est aussi un point fixe de $f \circ f$.

4.b Un point fixe de $f \circ f$ est-il un point fixe de $f$ ?

5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite.

6.a On suppose que $|u_n - \ell| \leqslant q^n$ pour tout $n$ assez grand. Pour quelles valeurs de $n$ le réel $u_n$ est-il une valeur approchée de $\ell$ à $10^{-10}$ près lorsque $q = 1/2$ ? $q = 1/3$ ? $q = 1/10$ ?

6.b On suppose que $|u_n - \ell| \leqslant r^{2^n}$ pour tout $n$ assez grand. Pour quelles valeurs de $n$ le réel $u_n$ est-il une valeur approchée de $\ell$ à $10^{-10}$ près lorsque $r = 1/2$ ? $r = 1/3$ ? $r = 1/10$ ?

**17. Suites arithmético-géométriques**

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

avec $a \neq 1$.

**17.1** L'équation $x = ax + b$ possède une seule solution, qu'on note $\ell$.

**17.2** La suite de terme général

$$v_n = u_n - x$$

est une suite géométrique si, et seulement si, $x = \ell$.

**17.3** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a^n u_0 + \frac{1 - a^n}{1 - a} b.$$

**17.4** Ou bien $|a| < 1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ ; ou bien $|a| \geqslant 1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

**18.** *Suite de* **[8.3]** – Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors il existe $n_0$ tel que $u_{n_0} > 1$ et

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad u_{n_0+p} \geqslant u_{n_0}^{(2^p)}.$$

En particulier, le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ est nul.

**19.** *Suite de* **[5.1]** –

1. Si on choisit $|u_0| < |\alpha|$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ à partir d'un certain rang et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta$.
2. Pour quelles valeurs de $u_0$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers $\alpha$ ?
3. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $n! = o(u_n)$.

**20.1**

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \sin\frac{\theta}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k} = \sin\theta$$

**20.2** Quel que soit $u_0 \in \mathbb{C}$, la suite qui vérifie la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + |u_n|}{2}$$

converge vers un réel $\ell$. Pour quelles valeurs de $u_0$ la limite $\ell$ est-elle strictement positive ?

**21.** On pose $\omega = -2 + 2i \in \mathbb{C}$ et on considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+i}{2} z + 2i.$$

1. Interpréter géométriquement la fonction $f$, ainsi que le complexe $\omega$.
2. Quel que soit $u_0 \in \mathbb{C}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers $\omega$.

3. Les séries $\sum(u_n - \omega)$ et $\sum|u_n - u_{n+1}|^2$ convergent absolument.

**22.** On considère la suite des fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par la donnée de

$$f_1 = \left[x \mapsto \sqrt{2+x}\right]$$

et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = \sqrt{2 + f_n(x)}.$$

1.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1], \quad \sqrt{2} \leqslant f_n(0) \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant 2$$

2.

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}} = 2$$

3. Les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(1/f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $[0,1]$.

**23.**

1. La suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$$

converge vers 0.

2. Comme $u_n \sim 1/n$, la série $\sum u_n$ diverge.
3. La série $\sum(-1)^n u_n$ est semi-convergente car

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{3n^4} - \frac{7}{24n^5} + o\Big(\frac{1}{n^5}\Big)$$

lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**24. Point fixe d'une contraction**

Soit $I$, un intervalle stable par une fonction $f$ telle que

$$\exists\, 0 < k < 1,\ \forall\, x, y \in I, \quad \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant k|x-y|.$$

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

avec $u_0 \in I$.

1. La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe de $f$.

**25.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $\alpha > 2$ tels que

$$f(x) = x - ax^2 + o(x^\alpha)$$

au voisinage droit de 0 et on considère la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Si $u_0$ est assez petit, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et tend vers 0.
2. Dans ce cas, $u_n \sim 1/na$.

**26. Méthode de Newton**

La **méthode de Newton** a pour but d'estimer par approximations successives une solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ en confondant localement le graphe de $\varphi$ avec l'une de ses tangentes.

**26.1 Algorithme**

Soit $\varphi$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $I$ dont la dérivée ne s'annule pas sur $I$.

1. Pour tout $x_n \in I$, la tangente au graphe de $\varphi$ au point d'abscisse $x_n$ coupe l'axe des abscisses en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}.$$

2. On considère la fonction $f$ définie par

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}.$$

Les solutions de l'équation $\varphi(x) = 0$ sont des points fixes de $f$ tels que $f'(x) = 0$. →**[13]**

**26.2 Convergence**

On suppose que $\varphi$ est convexe et strictement croissante sur $I$ et que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution $\ell \in I$. Si $u_0 \in I$ est choisi de telle sorte que $\varphi(u_0) > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n - \frac{\varphi(u_n)}{\varphi'(u_n)}$$

est strictement décroissante et tend vers $\ell$.

**26.3 Exemples élémentaires**

La méthode de Newton permet de calculer une valeur approchée arbitrairement précise de l'inverse ou de la racine carrée d'un réel strictement positif par une (brève) suite d'opérations simples (additions et multiplications pour l'inverse ; additions, multiplications et inversions pour la racine carrée).

3. Pour $a \in \mathbb{R}*$, on considère la fonction $\varphi$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad \varphi(x) = a - \frac{1}{x}.$$

Si $0 < au_0 < 2$, alors la suite qui vérifie la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n(2 - au_n)$$

converge vers $1/a$.

4. Pour $a > 0$, on considère la fonction $\varphi$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = x^2 - a.$$

Pour tout $u_0 > 0$, la suite qui vérifie la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a}{u_n}\Big)$$

converge vers $\sqrt{a}$.