Règle de la chaîne

Principes généraux

On étudie une grandeur physique A représentée par deux fonctions mathématiques : une fonction f des variables x et y d'une part, une fonction g des variables u et v d'autre part.

$$A = f(x, y) = g(u, v) \tag{1}$$

Les deux règles suivantes s'appliquent à tous les calculs.

Règle 1.— *On applique les opérateurs* $\dfrac{\partial}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial}{\partial y}$ *à une fonction de* x *et de* y *seulement.*

Règle 2.— *On applique les opérateurs* $\dfrac{\partial}{\partial u}$ *et* $\dfrac{\partial}{\partial v}$ *à une fonction de* u *et de* v *seulement.*

Pour chaque calcul, on appliquera une, et une seule, des deux règles suivantes.

Règle 3.— *Les variables considérées sont* x *et* y*. Dans ce cas,* u *et* v *sont des* fonctions *de* x *et* y *:*

$$f = g \circ \varphi \quad \textit{avec} \quad \varphi(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big).$$

Règle 4.— *Les variables considérées sont* u *et* v*. Dans ce cas,* x *et* y *sont des* fonctions *de* u *et* v *:*

$$g = f \circ \psi \quad \textit{avec} \quad \psi(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v)\big).$$

Règle de la chaîne au premier ordre

Avec les notations de Leibniz, les dérivées partielles de A vue comme une fonction de x et y et les dérivées partielles de A vue comme une fonction de u et v sont reliées par les formules suivantes.

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x} = \dfrac{\partial A}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial A}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial A}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial A}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial u} = \dfrac{\partial A}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial A}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial A}{\partial v} = \dfrac{\partial A}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial A}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

Ces formules doivent être connues par cœur.

Interprétation de (2)

On applique ici la règle 3. Par conséquent, la grandeur A est représentée par la fonction $f = g \circ \varphi$ dans le premier membre des équations (règle 1). Dans le second membre, la grandeur A est représentée par la fonction g (règle 2) mais puisque la règle 3 est en vigueur, il faut représenter les dérivées partielles de g comme des fonctions de x et y, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial A}{\partial u}(x, y) = \left[\frac{\partial g}{\partial u} \circ \varphi\right](x, y) \qquad \frac{\partial A}{\partial v}(x, y) = \left[\frac{\partial g}{\partial v} \circ \varphi\right](x, y)$$

La traduction mathématique des relations (2) est donc la suivante.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial [g \circ \varphi]}{\partial x} = \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) \circ \varphi\right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) \circ \varphi\right] \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial [g \circ \varphi]}{\partial y} = \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) \circ \varphi\right] \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) \circ \varphi\right] \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2b}$$

Exercice. Pour vérifier que vous avez bien compris ce qui précède, interprétez de manière analogue les relations (3) *avant* de tourner la page.

Interprétation de (3)

On applique ici la règle 4. Par conséquent, la grandeur A est représentée par la fonction $g = f \circ \psi$ dans le premier membre des équations (règle 2). Dans le second membre, la grandeur A est représentée par la fonction f (règle 1) mais puisque la règle 4 est en vigueur, il faut représenter les dérivées partielles de f comme des fonctions de u et v, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial A}{\partial x}(u,v) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \circ \psi\right](u,v) \qquad \frac{\partial A}{\partial y}(u,v) = \left[\frac{\partial f}{\partial y} \circ \psi\right](u,v)$$

La traduction mathématique des relations (3) est donc la suivante.

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial [f \circ \psi]}{\partial u} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \circ \psi\right] \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \circ \psi\right] \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \tag{3a}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial [f \circ \psi]}{\partial v} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \circ \psi\right] \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \circ \psi\right] \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \tag{3b}$$

Mise en œuvre pratique de (2) et (3)

En général (c'est-à-dire en dehors des changements de variables linéaires), on ne dispose pas des expressions de $\varphi(x,y)$ et $\psi(u,v)$, mais d'une seule d'entre elles.

Cela dit, φ réalise une bijection d'un ouvert Ω sur un ouvert U et ψ est la bijection réciproque, donc

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \psi \circ \varphi(x,y) = (x,y) \quad \text{et} \quad \forall\,(u,v) \in U, \quad \varphi \circ \psi(u,v) = (u,v).$$

On en déduit que les matrices jacobiennes de φ et ψ sont inverses l'une de l'autre.

$$\operatorname{Jac}\psi(u,v) = \left[\operatorname{Jac}\varphi(x,y)\right]^{-1} \qquad \operatorname{Jac}\varphi(x,y) = \left[\operatorname{Jac}\psi(u,v)\right]^{-1} \tag{4}$$

La connaissance d'une jacobienne permet donc de calculer facilement l'autre.

Il faut toutefois prendre soin de savoir quelles sont les variables utilisées (règle 3 ou règle 4), car les relations (4) masquent une composition de fonctions.

Une confusion fréquente

Il faut prendre soin d'appliquer *systématiquement* les règles 1 et 2. Voici quelques exemples de calculs au second ordre.

- Pour les expressions

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial A}{\partial v}\right),$$

on applique deux fois la règle 1 (premier exemple) ou deux fois la règle 2 (deuxième exemple). On doit donc interpréter ces expressions de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial A}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}.$$

- Pour l'expression

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right),$$

on applique d'abord la règle 1, puis la règle 2. Pour pouvoir appliquer la règle 2, il faut aussi appliquer la règle 4 ! On doit donc interpréter cette expression de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \circ \psi\right]$$

Exercice. Vérifiez que vous avez bien compris ce qui précède *avant* de tourner la page :

– Donnez une interprétation analogue de l'expression $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial A}{\partial u}\right)$.

– Commentez les égalités suivantes.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 A}{\partial v \partial u} \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial u} = \frac{\partial^2 A}{\partial u \partial x}$$

- Pour l'expression
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right),$$
on applique d'abord la règle 2, puis la règle 1. Pour pouvoir appliquer la règle 1, il faut aussi appliquer la règle 3 ! On doit donc interpréter cette expression de la manière suivante :
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\circ\varphi\right]$$

- Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, alors (théorème de Schwarz)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, \quad \text{ce qu'on traduit par} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial y\partial x}$$
et de même, si g est de classe $\mathscr{C}^2$,
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}, \quad \text{ce qu'on traduit par} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 A}{\partial v\partial u}.$$

- On appliquant les règles 3 et 4 respectivement, les expressions
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\circ\varphi\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\right)$$
sont des fonctions de (x, y) et de (u, v) respectivement et ne sauraient donc être égales – même si f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$.

On n'écrira donc **jamais** les expressions
$$\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial u} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial u\partial x}$$
afin d'éviter tout risque de confusion.

Règle de la chaîne au second ordre

- On suppose que les fonctions f, g, φ et ψ sont toutes de classe $\mathscr{C}^2$, afin de pouvoir appliquer le théorème de Schwarz.
- En fonction de x et y :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 A}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\\
\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} &= \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 A}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\\
\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial u\partial v}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{\partial^2 A}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned}$$

Comme pour (2), on applique ici la règle 3. La première égalité se traduit donc mathématiquement par
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial[g\circ\varphi]}{\partial x}\right)$$
et conduit à dériver par rapport à x la relation (2a). Il s'agit alors de dériver la somme de deux produits :
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = &\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\circ\varphi\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\circ\varphi\right]\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\\
&+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\circ\varphi\right]\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\circ\varphi\right]\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}.
\end{aligned}$$

On achève ce calcul en substituant $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ à g dans la formule (2a).

Exercice. Pour vérifier que vous avez bien compris, retrouvez les deux autres égalités en combinant (2a) et (2b), puis exprimez $\frac{\partial^2 A}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 A}{\partial v^2}$ et $\frac{\partial^2 A}{\partial u\partial v}$ en fonction de $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}$ à l'aide de (3a) et (3b).

❧ En fonction de u et v :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial v^2} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u \partial v} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right] + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Comme pour (3), on applique ici la règle 4. La première égalité se traduit donc mathématiquement par

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial [f \circ \psi]}{\partial u}\right)$$

et conduit à dériver par rapport à u la relation (3a). Il s'agit alors de dériver la somme de deux produits :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \circ \psi\right] \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \circ \psi\right] \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right\}$$
$$+\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \circ \psi\right] \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \circ \psi\right] \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right\}.$$

On achève ce calcul en substituant $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ à f dans la formule (3a).

❧ Contrairement aux formules (2) et (3) qui doivent être connues par cœur, les formules au second ordre ne méritent pas d'être apprises : il suffit de savoir les retrouver par le calcul (mais il est impératif de savoir les retrouver par le calcul).

Dans le cas d'un passage en coordonnées polaires, on sait que

$$(x, y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \psi(r, \theta)$$

et donc que

$$\operatorname{Jac}\psi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

On oublie volontairement l'expression de la bijection réciproque, trop pénible pour être vraiment utile. D'après (4),

$$\operatorname{Jac}\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \dfrac{-\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \tag{6}$$

où θ et r doivent être traitées comme des fonctions de x et de y (règle 3).

Dérivées partielles secondes

On peut dériver les coefficients de (5) par rapport à r et à θ.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial\theta} = -\sin\theta \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = -r\sin\theta \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial\theta} = \cos\theta \tag{8}$$

Dérivation de fonctions implicites

Les coefficients de la jacobienne de φ sont implicitement des fonctions de x et de y. Cela ne nous empêche pas de calculer leurs dérivées partielles à l'aide de (6).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{\partial[\cos\theta]}{\partial x} = \frac{d[\cos\theta]}{d\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\sin\theta\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\sin^2\theta}{r} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} &= \frac{\partial[\sin\theta]}{\partial y} = \frac{d[\sin\theta]}{d\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} = \cos\theta\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos^2\theta}{r} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial[\cos\theta]}{\partial y} = \frac{d[\cos\theta]}{d\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} = -\sin\theta\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{-\sin\theta\cos\theta}{r} \\ &= \frac{\partial[\sin\theta]}{\partial x} = \frac{d[\sin\theta]}{d\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} = \cos\theta\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} \end{aligned} \tag{9}$$

La règle 3 s'applique encore à (9) : r et θ sont des fonctions de x et y.

Exercice. Pour vérifier que vous avez bien compris, calculez les dérivées partielles secondes de θ considérée comme une fonction de x et y *avant* de tourner la page.

❧ On procède comme pour (9) à partir de (6). La situation est un peu plus compliquée, puisqu'il s'agit cette fois de dériver des produits !

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= -\frac{\partial[\sin\theta/r]}{\partial x} = \frac{-\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\sin\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\sin 2\theta}{r^2}\\
\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} &= \frac{\partial[\cos\theta/r]}{\partial y} = \frac{-\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\cos\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{-\sin 2\theta}{r^2}\\
\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} &= -\frac{\partial[\sin\theta/r]}{\partial y} = \frac{-\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\sin\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{-1}{r^2}
\end{aligned} \tag{10}$$

La règle 3 s'applique à (10) comme à (9) : r et θ doivent être *traitées* comme des fonctions de x et de y – même s'il est hors de question de les *exprimer* comme des fonctions de x et de y.

Règle de la chaîne au premier ordre

On considère une grandeur physique A qu'on sait exprimer aussi bien en coordonnées cartésiennes : $A = f(x, y)$ qu'en coordonnées polaires : $A = g(r, \theta)$.

$$(2')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x} = \cos\theta\cdot\dfrac{\partial A}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial\theta}\\[2mm] \dfrac{\partial A}{\partial y} = \sin\theta\cdot\dfrac{\partial A}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial\theta}\end{cases} \qquad (3')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial r} = \cos\theta\cdot\dfrac{\partial A}{\partial x} + \sin\theta\cdot\dfrac{\partial A}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial A}{\partial\theta} = -r\sin\theta\cdot\dfrac{\partial A}{\partial x} + r\cos\theta\cdot\dfrac{\partial A}{\partial y}\end{cases}$$

❧ Dans les relations (3′), la règle 4 est en vigueur. Ces relations signifient donc que toutes les fonctions dépendent des variables r et θ seulement.

$$\frac{\partial[f\circ\psi]}{\partial r} = \cos\theta\cdot\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\circ\psi\right] + \sin\theta\cdot\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\circ\psi\right] \tag{3'a}$$

$$\frac{\partial[f\circ\psi]}{\partial\theta} = -r\sin\theta\cdot\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\circ\psi\right] + r\cos\theta\cdot\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\circ\psi\right] \tag{3'b}$$

Exercice. Pour vérifier que vous avez bien compris, interprétez mathématiquement les relations (2′) en les exprimant à l'aide de f, g, φ et ψ *avant* de tourner la page.

❧ Dans les relations (2′), la règle 3 est en vigueur, donc toutes les fonctions dépendent des variables x et y seulement. La situation est donc un peu plus compliquée que pour (2′).

$$\frac{\partial[g\circ\varphi]}{\partial x} = \cos[\theta(x,y)]\cdot\left[\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)\circ\varphi\right] - \frac{\sin[\theta(x,y)]}{r(x,y)}\cdot\left[\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\circ\varphi\right] \tag{2′a}$$

$$\frac{\partial[g\circ\varphi]}{\partial y} = \sin[\theta(x,y)]\cdot\left[\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)\circ\varphi\right] + \frac{\cos[\theta(x,y)]}{r(x,y)}\cdot\left[\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\circ\varphi\right] \tag{2′b}$$

Il ne faut surtout pas remplacer $r(x,y)$ par $\sqrt{x^2+y^2}$, ni $\theta(x,y)$ par... C'est inutilement compliqué ! Il est en revanche essentiel de savoir que, dans ce contexte précis, r et θ sont des fonctions de x et de y (pour dériver correctement (2′a) et (2′b) par rapport à x et à y).

Règle de la chaîne au second ordre

❧ On suppose que les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$.

❧ En fonction de x et y (règle 3) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\sin 2\theta}{r^2}\frac{\partial A}{\partial \theta} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial^2 A}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}\\
\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} &= \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\sin 2\theta}{r^2}\frac{\partial A}{\partial \theta} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial^2 A}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}\\
\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y} &= \frac{-\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial A}{\partial \theta} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\cos 2\theta}{r}\frac{\partial^2 A}{\partial r\partial\theta} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}
\end{aligned}$$

❧ En fonction de r et θ (règle 4) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \sin 2\theta\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\\
\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} &= -r\cos\theta\frac{\partial A}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial A}{\partial y} + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - r^2\sin 2\theta\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\\
\frac{\partial^2 A}{\partial r\partial \theta} &= -\sin\theta\frac{\partial A}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial A}{\partial y} - r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + r\cos 2\theta\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y} + r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

❧ Ces relations peuvent être déduites des relations générales (établies plus haut) à l'aide des dérivées partielles premières (5) et (6) et secondes (7), (8), (9) et (10).

Elles peuvent aussi être établies en dérivant (2′) et (3′), en prenant soin d'interpréter correctement ces relations, c'est-à-dire en dérivant (2′a), (2′b), (3′a) et (3′b).

Pour vérifier que vous avez compris le principe général et le cas particulier des coordonnées polaires, vous *devriez* mener ces deux méthodes de calcul jusqu'au bout. Cela fait, vous auriez la certitude qu'*aucun* calcul similaire ne pourrait plus vous résister !