Recherches d'extrema

1. Un **extremum** (maximum ou minimum) est une valeur particulière de la fonction. On distingue deux types d'extrema.
1.1 ✍ *La fonction $f : U \to \mathbb{R}$ atteint un **maximum global**, ou **maximum absolu**, au point $M_0 \in U$ si, et seulement si,*

$$\forall\, M \in U, \quad f(M) \leqslant f(M_0).$$

1.2 ✍ *La fonction $f : U \to \mathbb{R}$ atteint un **maximum local**, ou **maximum relatif**, au point $M_0 \in U$ si, et seulement si,*

$$\exists\, V \in \mathscr{V}_U(M_0),\ \forall\, M \in V, \quad f(M) \leqslant f(M_0).$$

1.3 Tout extremum absolu est en particulier un extremum local.
1.4 Il ne faut pas confondre un extremum de f, qui est une valeur réelle de f, avec les points de U, parfois appelés **extrémants** de f, où la fonction f prend cette valeur particulière.
Si f atteint un maximum global, cette valeur maximale est unique. Il est atteint en un point au moins de U, mais peut être atteint en plusieurs points de U (éventuellement en une infinité de points de U).
Une fonction peut atteindre plusieurs maxima relatifs différents sans atteindre de maximum absolu.

2. Les extrema d'une fonction numérique f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ peuvent se déduire des variations de f.
Pour une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$, l'étude des variations n'a plus de sens et la recherche des extrema est un problème difficile en général.

I

Existence d'extrema

3. Toute fonction bornée $f : U \to \mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure, mais cela ne prouve pas qu'elle atteint effectivement un maximum ou un minimum.

4. Parties compactes de $\mathbb{R}^d$
La notion de **partie compacte** généralise la notion de **segment** sur $\mathbb{R}$ et l'étend aux espaces vectoriels de dimension finie.
4.1 Une partie K de $\mathbb{R}^d$ est **fermée** lorsqu'elle est stable par passage à la limite : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs appartenant à K qui converge vers le vecteur ℓ, alors le vecteur ℓ appartient encore à K.
Cette notion ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^d$.
4.2 Une partie K de $\mathbb{R}^d$ est **compacte** lorsqu'elle est simultanément fermée et bornée. Cette notion ne dépend pas non plus de la norme choisie sur $\mathbb{R}^d$.
4.3 Tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est donc compact, mais une partie compacte de $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement un segment : l'union de deux segments est une partie compacte de $\mathbb{R}$.
4.4 L'*ensemble triadique* K_C de Cantor est une partie compacte contenue dans $[0,1]$ qui possède des propriétés étonnantes.
– Comme $\mathbb{Q}$, il est totalement discontinu : entre deux points de K_C, il existe un réel qui n'appartient pas à K_C.
– Comme $\mathbb{Q}$, tout voisinage d'un point de K_C contient une infinité de points de K_C.
– Comme $\mathbb{Q}$, il est de mesure nulle : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-intervalles de $[0,1]$ dont l'union contient K_C et dont la somme des longueurs est inférieure à ε.
– Comme $\mathbb{R}$ et contrairement à $\mathbb{Q}$, il n'est pas dénombrable.
4.5 ➔ *Soit f, une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. La restriction de f à une partie compacte $K \subset \mathbb{R}^d$ est bornée et atteint ses bornes.*
4.6 Le théorème [**4.5**] prouve l'*existence* d'extrema absolus (maximum et minimum), mais ne permet pas d'*estimer* la valeur de ces extrema puisqu'il ne donne aucune indication sur les points de K où ces extrema sont atteints.
En outre, l'existence d'éventuels extrema *relatifs* distincts des extrema absolus ne peut être prouvée de cette manière.

5. Exemples
5.1 La fonction f définie sur $D = [x^2 + y^2 \leqslant 2]$ par

$$\forall\, (x,y) \in D, \quad f(x,y) = xy|x^2 + y^2 - 1|$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur D.
5.2 La fonction f définie sur $D = [x^2 + y^2 \leqslant 1]$ par

$$\forall\, (x,y) \in D, \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur D.
5.3 La fonction f définie sur $D = [x^2 + y^2 \leqslant 16]$ par

$$\forall\, (x,y) \in D, \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + x^2 - y^2$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur D.
5.4 Soit $K = [x \geqslant 0] \cap [y \geqslant 0] \cap [x + y \leqslant 1] \subset \mathbb{R}^2$.
La fonction $f : K \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, (x,y) \in K, \quad f(x,y) = xy(1 - x - y)$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur K. →[**20**]

6. Extrema d'une forme affine
On étudie une **forme affine** f sur $\mathbb{R}^d$, définie par

$$\forall\, M \in \mathbb{R}^d, \quad f(M) = f(O) + \varphi(\boldsymbol{OM})$$

où $\varphi \in \mathrm{L}(E,\mathbb{R})$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^d$.
6.1 En général, la fonction f n'a pas de point critique.
6.2 Quelle que soit la partie fermée et bornée $K \subset \mathbb{R}^d$, la fonction f atteint un maximum et un minimum sur K.
6.3 Si $\mathbb{R}^d$ est muni de sa structure euclidienne canonique, alors

$$\forall\, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d, f(A + \boldsymbol{u}) = f(A) + \left\langle \nabla f(A) \,\middle|\, \boldsymbol{u} \right\rangle$$

quel que soit le point $A \in \mathbb{R}^d$.
6.4 Si le compact K est la boule fermée ce centre A et de rayon r :

$$A = \big[\|\boldsymbol{AM}\|^2 = r^2\big],$$

alors f atteint respectivement son maximum strict et son minimum strict aux points M_+ et M_- définis par

$$M_+ = A + r \cdot \frac{\nabla f(A)}{\|\nabla f(A)\|}, \qquad M_- = A - r \cdot \frac{\nabla f(A)}{\|\nabla f(A)\|}.$$

6.5 Si f prend la même valeur (extrémale ou non) en deux points distincts M_1 et M_2, alors la droite (M_1M_2) est orthogonale au gradient de f et

$$\forall\, M \in [M_1, M_2], \quad f(M) = f(M_1) = f(M_2).$$

6.6 En dimension 2, si K est un rectangle :

$$K = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$$

alors f atteint ses valeurs extrêmes en l'un des sommets du rectangle. Il suffit de calculer ces quatre valeurs de f et de les comparer pour obtenir le maximum et le minimum de f.

6.7 Exemples

1. Calculer les extrema de la fonction définie par

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=2x-y+3$$

sur $K=[x^2+y^2+2x-3y\leqslant 5]$.

2. Calculer les extrema de la fonction définie par

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=x+3y+2$$

sur $K=[-1,1]\times[-1,1]$.

3. Calculer les extrema de la fonction définie par

$$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z)=-3x+2y+z-2$$

sur $K=[x^2+y^2+z^2+2y-6z\leqslant 3]$.

4. Calculer les extrema de la fonction définie par

$$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z)=x+2y-z+1$$

sur $K=[-1,1]\times[-2,2]\times[0,2]$.

7. Extrema sur une partie non compacte

Un argument de compacité permet de justifier qualitativement l'existence d'un extremum, en n'effectuant que les calculs nécessaires pour appliquer le théorème **[4.5]**.

7.1 Fonctions propres

Si $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ est une fonction continue qui tend vers $+\infty$ au voisinage de de l'infini, alors la fonction f atteint un minimum absolu.

7.2 Si $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ est une fonction positive qui tend vers 0 au voisinage de l'infini, alors elle atteint un maximum absolu.

8. Exemples

8.1 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f=\big[(x,y)\mapsto x^4+y^4-4xy\big]$$

atteint un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$.

8.2 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f=\big[(x,y)\mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2\big]$$

atteint un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$.

8.3 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f=\big[(x,y)\mapsto (x+y)e^{-(x^2+y^2)}\big]$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$.

8.4 Soit $a>0$. Les fonctions définies sur $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_1(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy\qquad f_2(x,y)=\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^2}{y^2}+\frac{xy}{a^2}$$

$$f_3(x,y)=x^2+y^2+\frac{a}{xy}\qquad f_4(x,y)=x+y+\frac{a}{xy}$$

atteignent un minimum absolu sur U.

8.5 La fonction f définie sur $A=[0<x\leqslant a\leqslant b\leqslant y]\subset\mathbb{R}^2$ par

$$\forall\,(x,y)\in A,\quad f(x,y)=\frac{(x+y)^2}{xy}$$

atteint un minimum absolu sur A.

II

Extrema locaux

9. La formule de Taylor peut servir à localiser un extremum. Un développement limité ayant une valeur locale, cette technique ne peut servir qu'à justifier la présence d'un extremum relatif.

En particulier, on pourra peut-être déterminer l'endroit où un extremum global est atteint, ainsi que la valeur de cet extremum, mais les techniques qui vont être présentées maintenant ne peuvent en aucune manière prouver que cet extremum est bien un extremum global.

10. Condition nécessaire d'extremum

10.1 Si $f\in\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ atteint un extremum local au point $M_0\in U$, alors la fonction

$$\varphi_{\boldsymbol{v}}=\big[t\mapsto f(M_0+t\cdot\boldsymbol{v})\big]$$

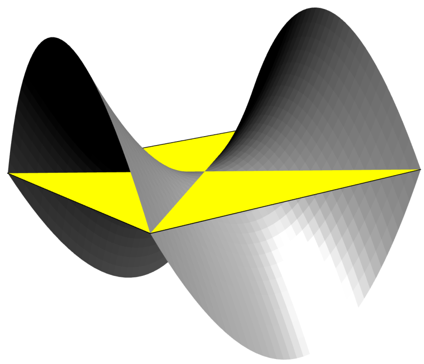
atteint un extremum local en $t=0$, quel que soit $\boldsymbol{v}\in E$.

10.2 ➔ *Si $f\in\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ atteint un extremum local en un point M_0 de l'ouvert U, alors M_0 est un point critique de f.*

11. L'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=x^2-y^2$$

admet l'origine pour unique point critique, mais n'atteint ni maximum local, ni minimum local en ce point.



12. Un point critique singulier

1. La fonction f définie par

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=y^2-4x^2y+3x^4$$

admet l'origine O comme seul point critique. La hessienne de f en O est positive, mais pas définie positive.

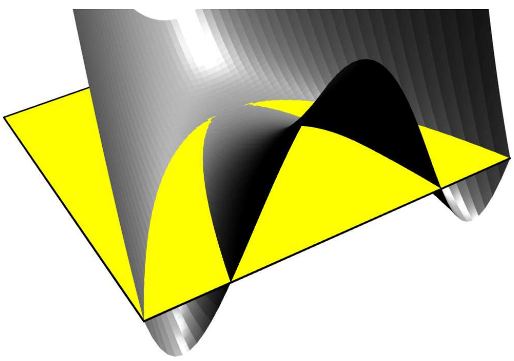
2. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on pose $\boldsymbol{u}_\theta=(\cos\theta,\sin\theta)$.

Un équivalent de $f(t\cdot\boldsymbol{u}_\theta)$ au voisinage de $t=0$ montre que

$$\forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \exists\,\alpha_\theta>0,\ \forall\,0<t<\alpha_\theta,\quad f(t\cdot\boldsymbol{u}_\theta)>f(O).$$

Ainsi, la restriction de f à une droite quelconque passant par O atteint un minimum local strict en O — ce qui ne signifie que pas que f atteint un minimum strict en O.

3. Comme $f(x,y)=(y-3x^2)(y-x^2)$, la fonction f n'atteint pas un minimum strict en O.



Compléments : étude au second ordre

13. Soit U, un ouvert de l'espace $E = \mathbb{R}^d$. On suppose que E est muni de sa structure euclidienne canonique, pour laquelle la base canonique est une base orthonormée et on étudie une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ au voisinage d'un point M_0.

13.1 On sait alors que, pour tout vecteur $\boldsymbol{w} \in E$,

$$f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{w}) = f(M_0) + t \left\langle \nabla f(M_0) \,\middle|\, \boldsymbol{w} \right\rangle + o(t)$$

lorsque t tend vers 0.

13.2 Nous allons préciser ce développement limité en supposant que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

13.3 ✍ *La **hessienne*** de f au point $M_0 \in U$ est l'endomorphisme symétrique de E représenté dans la base canonique par la matrice*

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant d} \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R}).$$

Cet endomorphisme est noté $\nabla^2 f(M_0)$.

13.4 *** Formule de Taylor-Young**

Si la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$, alors

$$\begin{aligned} f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) &+ \left\langle \nabla f(M_0) \,\middle|\, \boldsymbol{h} \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle \boldsymbol{h} \,\middle|\, \nabla^2 f(M_0)(\boldsymbol{h}) \right\rangle + o(\|\boldsymbol{h}\|^2) \end{aligned}$$

lorsque $\boldsymbol{h}$ tend vers $\mathbf{0}$.

14. Si M_0 est un point critique, alors pour tout $\boldsymbol{w} \in E$,

$$f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{w}) = f(M_0) + \frac{t^2}{2} \left\langle \boldsymbol{w} \,\middle|\, \nabla^2 f(M_0)(\boldsymbol{w}) \right\rangle + o(t^2)$$

pour t voisin de 0 et le comportement de f au voisinage de M_0 est décrit par la **forme quadratique*** q associée à la hessienne de f, définie par

$$\forall\, \boldsymbol{w} \in E, \quad q(\boldsymbol{w}) = \left\langle \boldsymbol{w} \,\middle|\, \nabla^2 f(M_0)(\boldsymbol{w}) \right\rangle.$$

15. Deuxième condition nécessaire d'extremum

15.1 Si f atteint un maximum local en M_0, alors la hessienne de f en M_0 est négative :

$$\forall\, \boldsymbol{w} \in E, \quad q(\boldsymbol{w}) \leqslant 0.$$

15.2 Si f atteint un minimum local en M_0, alors la hessienne de f en M_0 est positive :

$$\forall\, \boldsymbol{w} \in E, \quad q(\boldsymbol{w}) \geqslant 0.$$

15.3 Si la hessienne de f en M_0 admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, alors f n'atteint pas un extremum local en M_0.

16. Réduction de la hessienne en dimension 2

On suppose ici pour simplifier que $E = \mathbb{R}^2$. La base canonique de E est notée $\mathscr{B}_0 = (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$.

16.1 La décomposition d'un vecteur $\boldsymbol{h} \in E$ dans cette base orthonormée

$$\boldsymbol{h} = h_x \cdot \boldsymbol{e}_x + h_y \cdot \boldsymbol{e}_y$$

permet de calculer sa norme :

$$\|\boldsymbol{h}\|^2 = h_x^2 + h_y^2.$$

16.2 La matrice de $\nabla^2 f(M_0)$ dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) \end{pmatrix}$$

et le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage du point critique peut aussi s'écrire

$$f(M_0 + \boldsymbol{h} = f(M_0) + \frac{1}{2} q(\boldsymbol{h}) + o(\|\boldsymbol{h}\|^2)$$

avec

$$q(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\, h_x^2 + 2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)\, h_x h_y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)\, h_y^2.$$

16.3 Il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de vecteurs propres de $\nabla^2 f(M_0)$.

1. La décomposition du vecteur $\boldsymbol{h}$ dans cette base

$$\boldsymbol{h} = h_u \cdot \boldsymbol{u} + h_v \cdot \boldsymbol{v}$$

donne

$$\|\boldsymbol{h}\|^2 = h_x^2 + h_y^2 = h_u^2 + h_v^2.$$

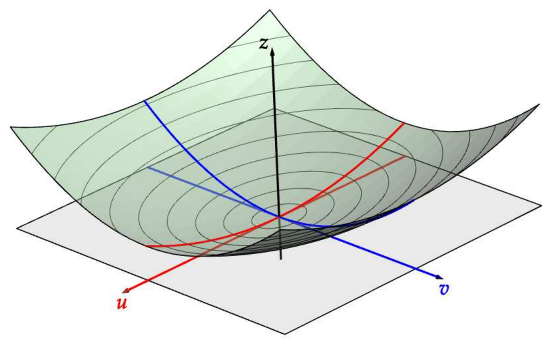
2. En notant λ et μ, les valeurs propres de $\nabla^2 f(M_0)$ respectivement associées à $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$,

$$\forall\, \boldsymbol{h} \in E, \qquad q(\boldsymbol{h}) = \lambda h_u^2 + \mu h_v^2.$$

3. Si $0 < \lambda \leqslant \mu$, alors $q(\boldsymbol{h}) \geqslant \lambda \|\boldsymbol{h}\|^2$ et

$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) > f(M_0)$$

pour tout vecteur non nul $\boldsymbol{h}$ assez petit.



4. Si $\lambda \leqslant \mu < 0$, alors $q(\boldsymbol{h}) \leqslant \mu \|\boldsymbol{h}\|^2$ et

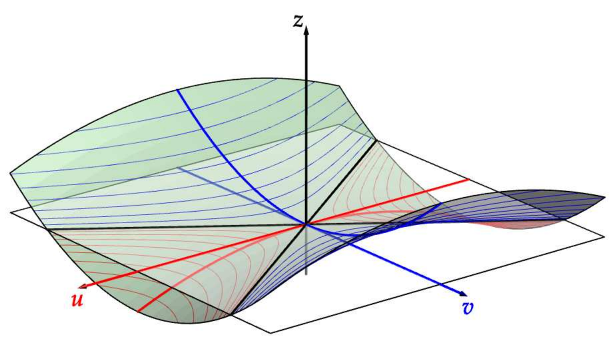
$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) < f(M_0)$$

pour tout vecteur non nul $\boldsymbol{h}$ assez petit.

5. Si $\lambda < 0 < \mu$, alors **[15.3]**

$$f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{u}) < f(M_0) < f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{v})$$

pour tout scalaire $t \neq 0$ assez petit. →**[11]**

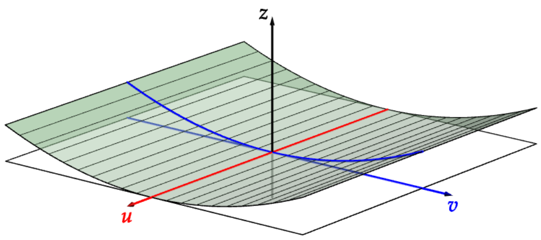


6. Si le vecteur propre $\boldsymbol{u}$ est associé à la valeur propre $\lambda = 0$, alors

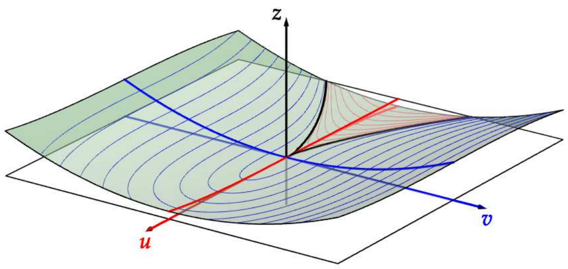
$$f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{u}) - f(M_0) = o(t^2)$$

pour t voisin de 0 et le signe de cette différence ne peut être déduit de la formule de Taylor-Young à l'ordre deux.

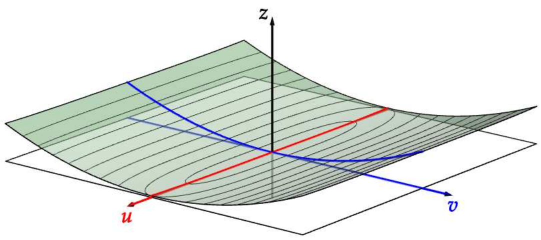
6.a Pour $f(M_0 + \boldsymbol{h}) = h_v^2$, la fonction f passe par un minimum en M_0, mais ce minimum n'est pas strict.



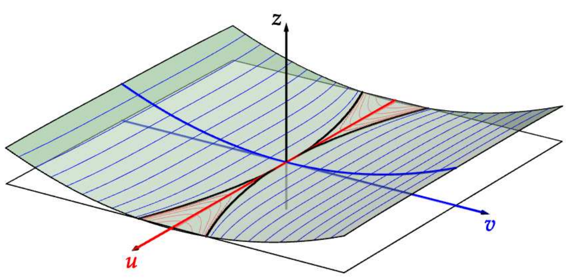
6.b Pour $f(\boldsymbol{h}) = h_v^2 + h_u^3$, la fonction f ne passe pas par un minimum en M_0, mais l'allure du graphe (une *fronce*) n'est pas celle d'un col pour autant.



6.c Pour $f(\boldsymbol{h}) = h_v^2 + h_u^4$, la fonction f passe par un minimum local strict en M_0, comme dans le cas où les deux valeurs propres de la hessienne sont strictement positives.



6.d Pour $f(\boldsymbol{h}) = h_v^2 - h_u^4$, la fonction f passe par un col en M_0, comme dans le cas où la hessienne possède une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. →[11]



16.4 Les **notations de Monge*** sont :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0).$$

16.5 * *Soit $M_0 \in U$, un point critique de $f \in \mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$.*

1. *Si $rt - s^2 > 0$, alors f atteint un extremum local strict en M_0. Il s'agit d'un minimum pour $r > 0$ et d'un maximum pour $r < 0$.*

2. *Si $rt - s^2 < 0$, alors la fonction f ne passe pas par un extremum local en M_0.*

17. Exemples

17.1 La fonction $[(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy]$ n'est ni majorée, ni minorée sur $\mathbb{R}^2$. Elle admet deux points critiques : $M_0 = (0, 0)$ et $M_1 = (1, 1)$. Elle atteint un minimum local strict en M_1. La valeur en M_0 n'est pas un extremum local.

17.2 *Suite de* **[8.1]** – La fonction f admet trois points critiques : $M_{-1} = (-1, -1)$, $M_0 = (0, 0)$ et $M_1 = (1, 1)$. Elle atteint son minimum global en M_{-1} et en M_1. La valeur $f(M_0)$ n'est pas un extremum local.

17.3 La fonction $f = [(x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y]$ admet $M_0 = (-2, 2)$ pour seul point critique. Elle atteint son minimum absolu en M_0. →[40]

17.4 *Suite de* **[8.2]** – La fonction f admet trois points critiques : $M_0 = (0, 0)$, $M_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $M_1' = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. La valeur $f(M_0)$ n'est pas un extremum local. La fonction f atteint son minimum absolu en M_1 et en M_1'.

17.5 La fonction $f = [(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x^3]$ n'est ni majorée, ni minorée sur $\mathbb{R}^2$. Elle admet deux points critiques : $M_0 = (0, 0)$ et $M_1 = (2/3, 0)$. Elle passe par un minimum local strict en M_0 ; la valeur $f(M_1)$ n'est pas un extremum local.

Entraînement

18. *Suite de* **[8.4]** –

1. La fonction f_1 admet le point $(1, 1)$ pour unique point critique et atteint son minimum absolu en ce point.

2. La fonction f_4 admet le point $(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$ pour unique point critique.

3. Les fonctions f_2 et f_3 admettent chacune un unique point critique, situé sur la droite $[y = x]$.

19. La fonction $f = [(x, y) \mapsto xy - x^2y + xy^2]$ n'est ni majoré, ni minorée sur $\mathbb{R}^2$. Elle admet quatre points critiques :

$$M_0 = (0, 0), \quad M_1 = (0, -1), \quad M_2 = (1, 0), \quad M_3 = (1/3, -1/3).$$

La fonction f passe par un minimum local strict en M_3. Elle ne passe pas par un extremum local aux autres points critiques.

20. *Suite de* **[5.4]** – Quels que soient $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$, la fonction g définie par

$$\forall (x, y) \in K, \quad g(x, y) = x^a y^b (1 - x - y)^c$$

atteint un maximum absolu sur K au point

$$(x, y) = \Big(\frac{a}{a + b + c}, \frac{b}{a + b + c} \Big)$$

et atteint son minimum absolu en chaque point du bord de K.

21. La fonction f définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = xyz + xy + yz$$

n'atteint aucun extremum sur $\mathbb{R}^3$ car la trace de sa hessienne est nulle en tout point.

III

Extrema globaux

III.1 Extremum d'un polynôme quadratique

22. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - y.$$

1. Il existe une matrice symétrique et inversible $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et une matrice colonne $B \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall\, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f(x,y) = \frac{1}{2}{}^tXSX - {}^tBX.$$

2. Quelles que soient X_0 et H dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + ({}^tX_0S - {}^tB)H + \frac{1}{2}{}^tHSH.$$

On choisit $X_0 = S^{-1}B$. Pourquoi ?

3. Soit $\Delta = \mathrm{Diag}(3,1)$. Il existe une matrice orthogonale $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPSP = \Delta$.
4. Pour tout $H \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul,

$${}^tHSH = {}^tHP\Delta{}^tPH \geqslant {}^tHP{}^tPH = {}^tHH > 0.$$

5. La fonction f atteint son minimum global strict en X_0 et n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^2$. $\to$**[40]**

III.2 Fonctions convexes

23. Alors que l'étude au second ordre est une étude *locale*, la convexité permet d'établir des inégalités *globales*.

24. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors

$$f\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

quels que soient les réels $x_1, \ldots, x_n$ dans I.

25. Cas d'égalité

25.1 Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et s'il existe $0 < t_0 < 1$ tel que

$$f\big((1-t_0)x + t_0y\big) = (1-t_0)f(x) + t_0f(y),$$

alors

$$\forall\, 0 < t < 1, \quad f\big((1-t)x + ty\big) = (1-t)f(x) + tf(y).$$

En particulier, si $x \neq y$, alors la restriction de f à $[x \leftrightarrow y]$ est affine.

25.2 ✍ *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **strictement convexe** lorsque, quels que soient x et y dans I,*

$$\forall\, 0 < t < 1, \quad f\big((1-t)x + ty\big) < (1-t)f(x) + tf(y).$$

25.3 Si $f \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ et si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement convexe.

25.4 Soit f, une fonction strictement convexe. Pour tout entier $n \geqslant 2$ et toute famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ d'éléments de I, s'il existe des réels strictement positifs $t_1, \ldots, t_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = 1 \quad \text{et} \quad f\Big(\sum_{k=1}^{n} t_kx_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} t_kf(x_k),$$

alors $x_1 = \cdots = x_n$.

Applications

26. L'expression définie sur $]0,1[^n \cap [x_1 + \cdots + x_n = 1]$ par

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - x_k}$$

atteint son minimum absolu en $x_1 = \cdots = x_n = 1/n$.

27. Soient a, b et c, les longueurs des côtés d'un triangle. Alors

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3$$

avec égalité si, et seulement si, le triangle est équilatéral.

28. Entropie d'une variable aléatoire discrète
Soit $(p_1, \ldots, p_n)$, une famille de réels strictement positifs dont la somme est égale à 1. L'**entropie** de cette famille, définie par

$$H(p_1, \ldots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \,\ell\mathrm{n}\, p_k,$$

est maximale pour $p_1 = \cdots = p_n = 1/n$.

29. Inégalité arithmético-géométrique

29.1 La fonction $-\ell\mathrm{n}$ est strictement convexe sur $]0, +\infty[$.

29.2 * *Quels que soient les réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$,*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

avec égalité si, et seulement si, $x_1 = \cdots = x_n$.

29.3 La fonction définie par $g(x,y,z) = (xyz)^3$ sur le compact $K = (\mathbb{R}_+)^3 \cap [x + y + z = 1]$ admet 0 pour minimum et atteint son maximum en $x = y = z = 1/3$.

29.4 La fonction définie par $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sur le fermé $[x^2y^2z^2 = 1]$ n'est pas majorée. Elle atteint son minimum aux points (x,y,z) tels que $x^2 = y^2 = z^2 = 1$.

29.5 Soit $(p_1, \ldots, p_n) \in (]0,1[)^n$, des réels dont le produit est égal à 2^{-n}. Les sommes

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{1 - p_k}$$

sont minimales pour $p_1 = \cdots = p_n = 1/2$.

III.3 Méthode des crêtes

30. La méthode des crêtes ramène la recherche des extrema globaux d'une fonction de 2 variables à l'étude des extrema de 2 fonctions d'une variable.

30.1 Soit $K = [a,b] \times [c,d]$. Si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue, alors les fonctions m et M définies par

$$m(x) = \min_{c \leqslant y \leqslant d} f(x,y) \quad \text{et} \quad M(x) = \max_{c \leqslant y \leqslant d} f(x,y)$$

sont continues sur $[a,b]$ et

$$\min_{(x,y) \in K} f(x,y) = \min_{a \leqslant x \leqslant b} m(x) \quad \text{et} \quad \max_{(x,y) \in K} f(x,y) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} M(x).$$

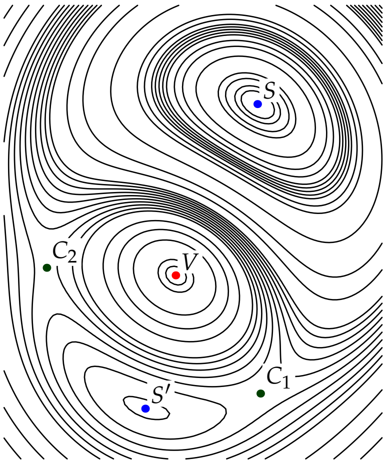
30.2 Si Ω est l'image de $[a,b] \times [c,d]$ par une fonction φ, alors

$$\min_{M \in \Omega} f(M) = \min_{\substack{a \leqslant u \leqslant b \\ c \leqslant v \leqslant d}} (f \circ \varphi)(u,v)$$

$$\max_{M \in \Omega} f(M) = \max_{\substack{a \leqslant u \leqslant b \\ c \leqslant v \leqslant d}} (f \circ \varphi)(u,v)$$

et la méthode des crêtes peut s'appliquer à la fonction $(f \circ \varphi)$.

31. On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un rectangle $U =]a, b[\times]c, d[$.

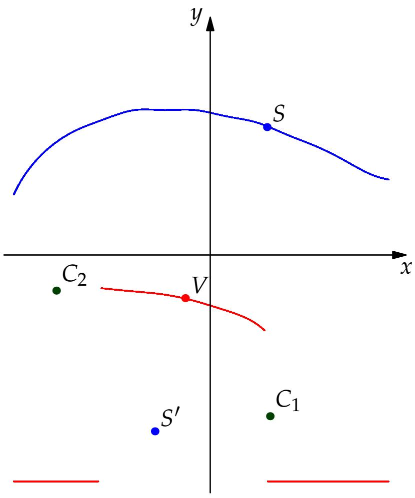


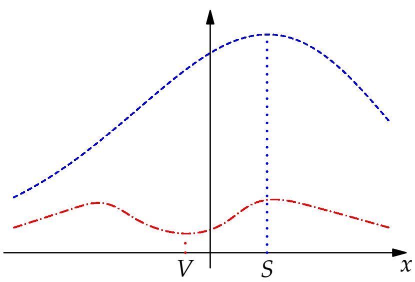
On voit sur ses courbes de niveau que cette fonction admet cinq points critiques :
- Elle atteint son maximum global en S.
- Elle passe par un maximum local en S'.
- Elle atteint son minimum global en V.
- En deux autres points critiques C_1 et C_2, elle n'atteint ni maximum local, ni minimum local.

31.1 Pour chaque valeur de $x_0 \in]a, b[$, on cherche les valeurs extrêmes de la fonction

$$[y \mapsto f(x_0, y)]$$

sur $]c, d[$. Le minimum est atteint en $y_m = \varphi_m(x_0)$ (courbe rouge) et le maximum en $y_M = \varphi_M(x_0)$ (courbe bleue).





En étudiant f le long de ces deux courbes, c'est-à-dire en étudiant

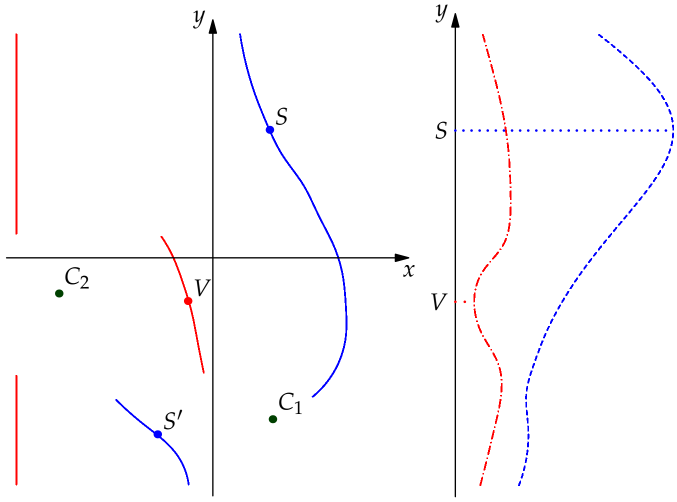
$$[x \mapsto f(x, \varphi_m(x))] \quad \text{et} \quad [x \mapsto f(x, \varphi_M(x))]$$

on peut situer les abscisses des points S (*maximum maximorum*) et V (*minimum minimorum*).

31.2 De manière analogue, on peut aussi, pour chaque valeur de $y_0 \in]c, d[$, chercher les valeurs extrêmes de la fonction

$$[x \mapsto f(x, y_0)]$$

sur $]a, b[$. Le minimum est atteint en $x_m = \psi_m(y_0)$ (courbe rouge) et le maximum en $x_M = \psi_M(y_0)$ (courbe bleue).



En étudiant f le long de ces deux courbes, c'est-à-dire en étudiant

$$[y \mapsto f(\psi_m(y), y)] \quad \text{et} \quad [y \mapsto f(\psi_M(y), y)]$$

on peut situer les ordonnées des points S et V.

32. Exemples

32.1 La fonction f définie par

$$\forall\ (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \quad f(x, y) = x^4 y^2 + \ell n(1 + y^4)$$

est bornée et atteint ses bornes.
Le seul point critique de f est $(0, 0)$.
Pour tout $y \in [-1, 1]$, elle atteint son minimum en $x = 0$ et son maximum en $x = \pm 1$.

$$\min_{x \in [-1,1]} f(x, y) = \ell n(1 + y^4)$$

$$\max_{x \in [-1,1]} f(x, y) = y^2 + \ell n(1 + y^4)$$

Le minimum de f est donc 0, valeur prise en $(0, 0)$. Son maximum est égal à $1 + \ell n\, 2$, valeur prise en $(\pm 1, 1)$.

32.2 On étudie la fonction f définie par

$$\forall\ (x, y) \in T, \quad f(x, y) = xy\sqrt{1 - x - y}$$

où $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \ :\ 1 - x - y \geqslant 0\}$.

1. La fonction f est positive sur T et nulle sur le bord de T.
2. La fonction f atteint son maximum en un point critique de l'intérieur de T.

L'unique point critique de f situé à l'intérieur de T a pour coordonnées $(2/5, 2/5)$ et le maximum de f est égal à $4\sqrt{5}/125$.

3. Pour chaque $x \in [0, 1]$, en restriction à $[0, 1 - x]$, la fonction $[y \mapsto f(x, y)]$ passe par un maximum en

$$\varphi_M(x) = \frac{2}{3}(1 - x).$$

Sur $[0, 1]$, la fonction g définie par

$$g(x) = f(x, \varphi_M(x)) = \frac{2}{3\sqrt{3}} x (1 - x)^{3/2}$$

atteint son maximum en $x = 2/5$.

Applications

33.1 La fonction f définie sur $[0,1]\times\mathbb{R}$ par

$$f = \left[(x,y)\mapsto 2xy^2+\ell\mathrm{n}(4+y^2)\right]$$

atteint un minimum absolu en $(0,0)$.

33.2 *Suite de* [**8.5**] – Le minimum absolu de f sur A est atteint en $(x,y)=(a,b)$.

33.3 *Suite de* [**8.4**] – La méthode des crêtes s'applique aux fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

34. Utilisation des coordonnées polaires

34.1 La fonction f définie par

$$f(x,y)=y^2+\sqrt{x^2+y^2}-1$$

est bornée sur $D=[x^2+y^2\leqslant 9]$ et atteint ses bornes. Son maximum est égal à 11.

34.2 *Suite de* [**8.3**] – Le maximum absolu de f est égal à $1/\sqrt{e}$. Le minimum absolu s'en déduit par symétrie.

34.3 *Suite de* [**5.2**] – Le maximum absolu de f est égal à 2 ; le minimum absolu est nul.

34.4 *Suite de* [**5.3**] – Le maximum absolu de f est égal à 20 ; le minimum absolu est égal à -12.

34.5 *Suite de* [**5.1**] – Le maximum absolu de f est égal à 1 ; le minimum absolu s'en déduit par symétrie.

35. Autres changements de variables

35.1 On peut trouver les extrema de $e^{x+t}-2(x+t)+(x-t)^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant $u=x+t$ et $v=x-t$.

35.2 L'étude de $x^2-2xy+2y^2+e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$ conduit naturellement à poser $u=y-x/2$ et $v=x$.

35.3 Étudier les extrema de $f(x,y)=(xy)^\alpha+\beta xy$ en fonction de $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

36. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* [**2**] – Pourquoi ne peut-on définir le sens de variation d'une fonction $f : U\to\mathbb{R}$?
2. On suppose que $f : \Omega\to\mathbb{R}$ atteint un extremum en un point $M_0\in\Omega$ qui n'est pas un point critique de f. Que peut-on en déduire ?
3. Soit f, une fonction continue sur un compact K. Condition pour que les extrema soient atteints sur la frontière de K.
4. *Suite de* [**16.5**] – Exemple d'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $rt-s^2=0$ et :
   4.a admettant un maximum local en M_0 ?
   4.b admettant un minimum local en M_0 ?
   4.c n'admettant pas d'extremum local en M_0 ?
5. *Suite de* [**25.1**] – Interpréter graphiquement le résultat.

37. Étudier les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction définie par

$$f(x,y)=x^2+(y^2-y)^2.$$

Approfondissement

38. Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{R}^d$ est muni de sa structure euclidienne canonique et, pour tout vecteur x, on note Ax, l'image de x par l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

38.1 Pour tout $x\in E$, on pose

$$\varphi(x)=\langle\, x\mid {}^tAAx\,\rangle.$$

Restreinte à la sphère unité $[\|x\|=1]$, l'application φ atteint un maximum en un vecteur x_0 qui est un vecteur propre de ${}^tAA$:

$${}^tAAx_0=\|Ax_0\|^2\,x_0.$$

38.2 On suppose que $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et, pour tout $x\in E$, on pose

$$\psi(x)=\langle\, x\mid Ax\,\rangle.$$

Restreinte à la sphère unité, l'application ψ atteint un maximum en un vecteur x_0 qui est un vecteur propre de A : →[**18.26.1**]

$$Ax_0=\langle\, Ax_0\mid x_0\,\rangle\,x_0.$$

39. Fonction de Leibniz

Soient n points $A_1,\dots,A_n$ d'un espace euclidien et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, une famille de réels. On pose $\sigma=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$.

1. Si $\sigma\neq 0$, la fonction f définie par

$$\forall\, M\in E,\quad f(M)=\sum_{k=1}^n \alpha_k\|\boldsymbol{A_kM}\|^2$$

atteint un extremum global au point $G=\alpha_1A_1+\cdots+\alpha_nA_n$.

2. Étudier le cas $\sigma=0$.

40. Théorème de Lax-Milgram

On suppose que E est un espace euclidien.
On choisit un vecteur $\boldsymbol{u}\in E$ et un endomorphisme $f\in\mathcal{S}(E)$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

40.1 L'application g définie par

$$\forall\,\boldsymbol{x}\in E,\quad g(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\langle\, f(\boldsymbol{x})\mid\boldsymbol{x}\,\rangle-\langle\,\boldsymbol{u}\mid\boldsymbol{x}\,\rangle$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur E et pour tout $\boldsymbol{x}_0\in E$,

$$\nabla g(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{u}\quad\text{et}\quad\nabla^2(g)(\boldsymbol{x}_0)=f.$$

L'unique point critique de g est $\boldsymbol{x}_0=f^{-1}(\boldsymbol{u})$.

40.2 Pour tout vecteur $\boldsymbol{h}\in E$ non nul,

$$g(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})=g(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}\langle\, f(\boldsymbol{h})\mid\boldsymbol{h}\,\rangle>g(\boldsymbol{x}_0)$$

donc $g(\boldsymbol{x}_0)$ est un minimum global strict.

41. La fonction f définie par

$$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z)=(x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$$

admet $M_0=(-1,0,0)$ pour seul point critique. Elle atteint son minimum absolu en ce point.

42. Polynômes de Hermite

Si la fonction f définie sur l'ouvert

$$U=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1<x_2<\cdots<x_n\}$$

par

$$f(x)=\sum_{k=1}^n x_k^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\ell\mathrm{n}\,|x_i-x_j|.$$

atteint un minimum local au point $x_0=(r_1,\dots,r_n)\in U$, alors on pose

$$H_n(t)=\prod_{i=1}^n(t-r_i).$$

Comme $H_n''(r_i)-2r_iH_n'(r_i)=0$ pour tout $1\leqslant i\leqslant n$, la fonction H_n est une solution de l'équation différentielle

$$\forall\,t\in\mathbb{R},\quad x''(t)-2tx'(t)+2nx(t)=0.$$

43. Soit $K=[0,1]\times[0,1]$.

1. Étudier la continuité de la fonction $f : K\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\left|\begin{array}{ll} x(1-y) & \text{si } 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ y(1-x) & \text{si } 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1.\end{array}\right.$$

Peut-on en conclure à l'existence d'un maximum et d'un minimum de f ?

2. Calculer le minimum et le maximum de f à l'aide de la méthode des crêtes. Comment trouver les extrema de f en cherchant ses points critiques ?