Des nombres au hasard

mais pas n'importe comment

Lycée Pierre Corneille – MP

2016-2017

Loi d'une variable aléatoire

➙ Que sait-on d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$?

Loi d'une variable aléatoire

➙ Que sait-on d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$?

- Pas de graphe !

Loi d'une variable aléatoire

➙ Que sait-on d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$?

- Pas de graphe !
- Pas d'expression de $X(\omega)$ en fonction de ω !

Loi d'une variable aléatoire

→ Que sait-on d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$?

- Pas de graphe !
- Pas d'expression de $X(\omega)$ en fonction de ω !
- Seulement la **loi** de X :

Loi d'une variable aléatoire

→ Que sait-on d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$?

- Pas de graphe !
- Pas d'expression de $X(\omega)$ en fonction de ω !
- Seulement la **loi** de X :
  - **Support** de la loi

Loi d'une variable aléatoire

➞ Que sait-on d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$?

- Pas de graphe !
- Pas d'expression de $X(\omega)$ en fonction de ω !
- Seulement la **loi** de X :
  - **Support** de la loi
  - Lors d'une expérience à venir, **probabilité** *a priori* des événements $[X = x_0]$ et $[\alpha \leqslant X \leqslant \beta]$

Loi d'une variable aléatoire

➙ Que sait-on d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$?

- Pas de graphe !
- Pas d'expression de $X(\omega)$ en fonction de ω !
- Seulement la **loi** de X :
  - **Support** de la loi
  - Lors d'une expérience à venir, **probabilité** *a priori* des événements $[X = x_0]$ et $[\alpha \leqslant X \leqslant \beta]$
  - Après la réalisation d'un grand nombre d'expériences, **fréquence** *a posteriori* des événements $[X = x_0]$ et $[\alpha \leqslant X \leqslant \beta]$

Loi d'une variable aléatoire

→ Que sait-on d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$?

- Pas de graphe !
- Pas d'expression de $X(\omega)$ en fonction de ω !
- Seulement la **loi** de X :
  - **Support** de la loi
  - Lors d'une expérience à venir, **probabilité** *a priori* des événements $[X = x_0]$ et $[\alpha \leqslant X \leqslant \beta]$
  - Après la réalisation d'un grand nombre d'expériences, **fréquence** *a posteriori* des événements $[X = x_0]$ et $[\alpha \leqslant X \leqslant \beta]$ **Loi des grands nombres**

Définition

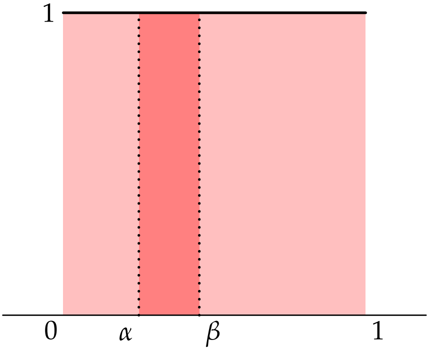
Une variable aléatoire $U : \Omega \to [0, 1]$ suit la **loi uniforme** lorsque

$$\forall\ 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1, \quad \mathbf{P}(\alpha \leqslant U \leqslant \beta) = \beta - \alpha.$$

Définition

Une variable aléatoire $U : \Omega \to [0,1]$ suit la **loi uniforme** lorsque

$$\forall\ 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1, \quad \mathbf{P}(\alpha \leqslant U \leqslant \beta) = \beta - \alpha.$$



Loi de Bernoulli

Variable aléatoire de Bernoulli

Loi de Bernoulli

Variable aléatoire de Bernoulli

- Deux valeurs : 0 ou 1

Loi de Bernoulli

Variable aléatoire de Bernoulli

- Deux valeurs : 0 ou 1
- Paramètre $p = \mathbf{P}(X = 1)$

Loi de Bernoulli

Variable aléatoire de Bernoulli

- Deux valeurs : 0 ou 1
- Paramètre $p = \mathbf{P}(X = 1)$
- $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$

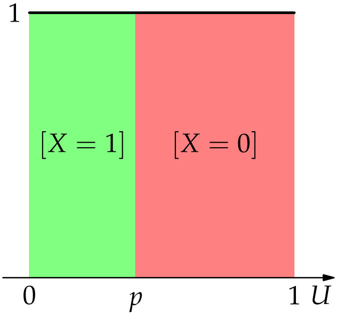
Loi de Bernoulli

Variable aléatoire de Bernoulli

- Deux valeurs : 0 ou 1
- Paramètre $p = \mathbf{P}(X = 1)$
- $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$

Exemple :

$$X = \mathbb{1}_{[0 \leqslant U \leqslant p]}$$



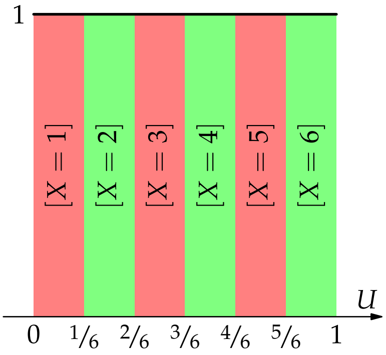
Lancer d'un dé équilibré

Loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$

$$\forall\ 1 \leqslant k \leqslant 6, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{6}$$

Exemple :

$$X = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \mathbb{1}_{[(i-1)/6 \leqslant U < i/6]}$$
$$= \lfloor 6U \rfloor + 1$$



Lancer d'un dé truqué

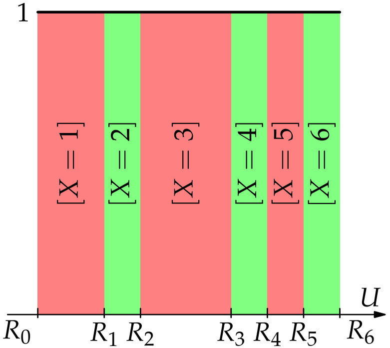
Loi *non* uniforme sur $\{1,\dots,6\}$

$$\forall\ 1 \leqslant k \leqslant 6, \quad \mathbf{P}(X = k) = p_k$$

Exemple :

$$X = \sum_{i=0}^{5} \mathbb{1}_{[U > R_k]}$$

où $R_0 = 0$ et $R_k = p_1 + \dots + p_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant 6$.



Processus i.i.d.

Soit $X \; : \; \Omega \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle.

Processus i.i.d.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle.
On suppose connues :

Processus i.i.d.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle.
On suppose connues :

- une fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ telle que $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} f(U)$ où U suit la loi uniforme sur $[0,1]$;

Processus i.i.d.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle.
On suppose connues :

- une fonction $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ telle que $X \overset{\mathrm{d}}{=} f(U)$ où U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$;
- une suite $(U_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Processus i.i.d.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle.
On suppose connues :

- une fonction $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ telle que $X \overset{\mathrm{d}}{=} f(U)$ où U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$;
- une suite $(U_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Le processus $\big(f(U_n)\big)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X.

Processus i.i.d.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle.
On suppose connues :

- une fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ telle que $X \overset{\mathrm{d}}{=} f(U)$ où U suit la loi uniforme sur $[0,1]$;
- une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

Le processus $\big(f(U_n)\big)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X.

Applications : jeu de Pile ou Face, tirages avec remise...

Marches aléatoires discrètes homogènes

Propriété de Markov

$$\mathsf{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n)$$
$$= \mathsf{P}(X_0 = x_0) \times \prod_{k=0}^{n-1} \mathsf{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k)$$

Marches aléatoires discrètes homogènes

Propriété de Markov homogène

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) \\
&= \mathbf{P}(X_0 = x_0) \times \prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k) \\
&= \mathbf{P}(X_0 = x_0) \times \prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(X_1 = x_{k+1} \mid X_0 = x_k)
\end{aligned}$$

Marches aléatoires discrètes homogènes

Réalisation

$$X_0 = f(U_0)$$
$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = g(X_n, U_{n+1})$$

où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Marches aléatoires discrètes homogènes

Réalisation

$$X_0 = f(U_0)$$
$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = g(X_n, U_{n+1})$$

où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Applications : Processus de Lévy, marches aléatoires...

Objectif

Produire des flottants x_0, x_1,. . ., x_N pour simuler le comportement d'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires

Objectif

Produire des flottants x_0, x_1,. . ., x_N pour simuler le comportement d'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires

- indépendantes

Objectif

Produire des flottants x_0, x_1,. . ., x_N pour simuler le comportement d'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires

- indépendantes
- de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Objectif

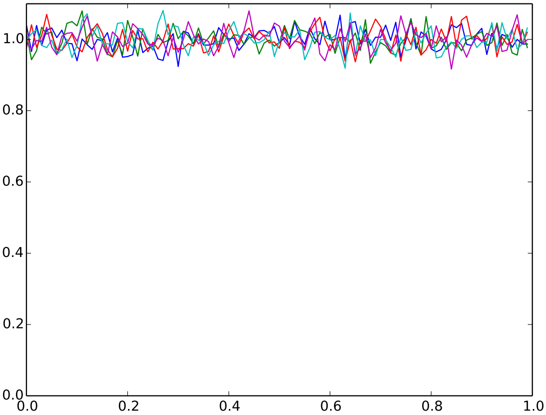
Produire des flottants x_0, $x_1, \ldots$, x_N pour simuler le comportement d'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires

- indépendantes
- de loi uniforme sur $[0,1]$.

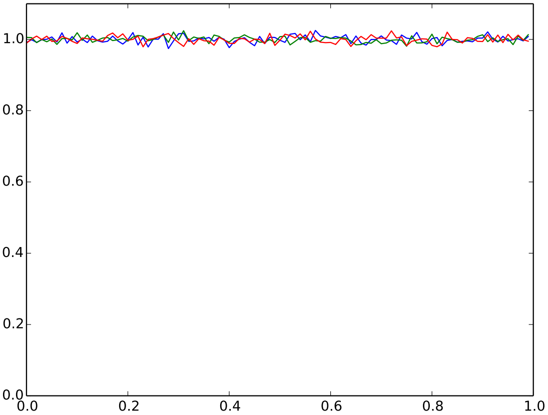
➞ Répartition statistique uniforme des x_n

$$\frac{\#\left\{0 \leqslant k < N \ : \ \alpha \leqslant x_k \leqslant \beta\right\}}{(\beta-\alpha)\cdot N} \approx 1$$

Répartition de $N = 10^5$ flottants (cinq simulations)



Répartition de $N = 10^6$ flottants (trois simulations)



Objectif

Les couples (x_0, x_1), (x_2, x_3),. . ., (x_{2N}, x_{2N+1}),. . .doivent aussi simuler le comportement d'une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires

Objectif

Les couples (x_0, x_1), (x_2, x_3),. . ., (x_{2N}, x_{2N+1}),. . .doivent aussi simuler le comportement d'une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires

- indépendantes

Objectif

Les couples (x_0, x_1), (x_2, x_3),…, (x_{2N}, x_{2N+1}),…doivent aussi simuler le comportement d'une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires

- indépendantes
- de loi uniforme sur $[0,1]\times[0,1]$.

Objectif

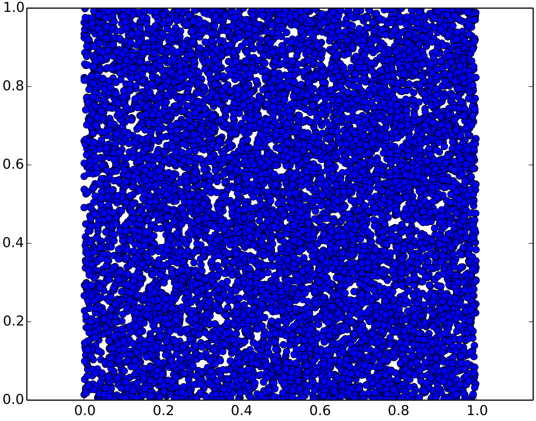
Les couples (x_0, x_1), (x_2, x_3),..., (x_{2N}, x_{2N+1}),...doivent aussi simuler le comportement d'une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires

- indépendantes
- de loi uniforme sur $[0,1]\times[0,1]$.

➞ Répartition statistique uniforme en 2 dimensions

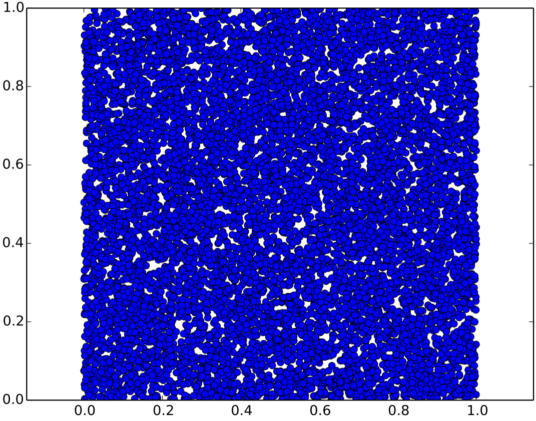
Répartition de $N = 10^5$ points

Première simulation



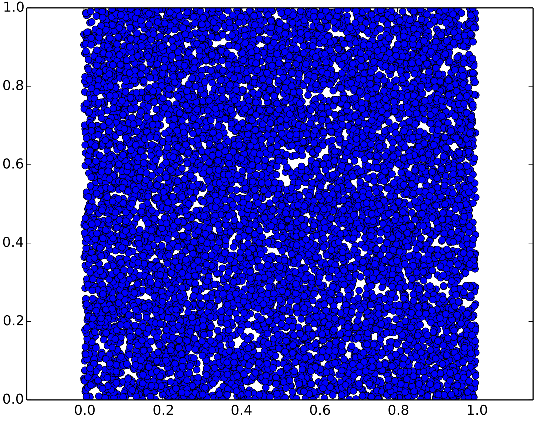
Répartition de $N = 10^5$ points

Deuxième simulation



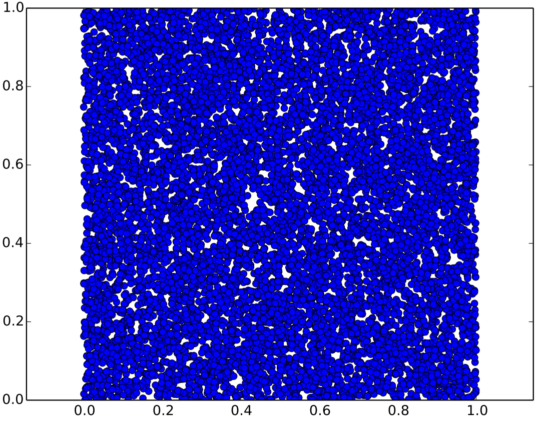
Répartition de $N = 10^5$ points

Troisième simulation



Répartition de $N = 10^5$ points

Quatrième simulation



Répartition de $N = 10^5$ points — Cinquième simulation