Énoncés posés en juin 2009

Chaque année au mois de juin, se déroule un concours blanc commun aux deux classes de MPSI. Voici une sélection d'exercices qui ont été posés lors des épreuves orales de ce concours blanc. Chaque candidat dispose d'une demi-heure pour préparer sa planche et d'une demi-heure pour l'exposer.

La plupart des planches sont probablement trop longues pour être entièrement traitées en une demi-heure. Cependant, s'il faut y passer une heure entière, c'est que certains points importants du cours n'ont pas été assimilés.

Les questions posées dans ces exercices ne demandent pas une grande dextérité calculatoire (et peuvent souvent être traitées sans aucun calcul à condition de maîtriser certains aspects théoriques du cours). La plupart d'entre elles vous obligeront à réfléchir au sens de ce que vous avez fait en cours.

Certaines questions sont assorties d'indications, regroupées à la fin de ce document. Ces indications sont souvent des questions d'ordre général qui portent sur des points théoriques ou techniques importants (par *techniques*, il faut comprendre qu'il s'agit de *méthodes* de calculs). Il peut être intéressant de réfléchir à ces indications indépendamment des exercices dont elles proviennent, car c'est un bon moyen d'approfondir sa compréhension du cours.

Certains exercices sont dépourvus de toute indication. Cela signifie que les techniques à mettre en œuvre sont d'une importance essentielle.

Prière de signaler toutes les erreurs que vous relèverez (en mentionnant les numéros de planche, d'exercice et de question) à l'adresse suivante

`gregoire.taviot@ac-rouen.fr`

en mentionnant *[Annales MPSI]* comme objet du message.

Planche 1

Exercice 1.1

1. Factoriser le polynôme $X^2 - 4X + 3$.

2. Déterminer l'ensemble de définition et étudier les variations de la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2 - 1}{t^2 - 4t + 3}\,dt.$$

3. Calculer un développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de $f(x)$. En déduire l'allure du graphe de f au voisinage de l'origine.

4. Calculer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\frac{X^2 - 1}{X^2 - 4X + 3}$$

et en déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 1.2

On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

On note u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer le rang puis le déterminant de la matrice A.

2. La matrice A est-elle inversible ? orthogonale ?

3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.

4. Démontrer que les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(0, 1, 2)$ appartiennent à $\operatorname{Im} u$.

5. Résoudre l'équation suivante.

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Planche 2

Exercice 2.1

1. Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0.$$

2. En déduire que l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = \cos t \qquad (\star)$$

admet une, et une seule, solution périodique f_0.

3. Soit f, une solution de $(\star)$.

Calculer la limite de $f(t) - f_0(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Quelle propriété de f_0 peut-on en déduire ?

Exercice 2.2

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on considère la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On note u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Exprimer la matrice A^2 en fonction de A.

2. La matrice A est-elle inversible ? orthogonale ?

3. Si deux vecteurs x et y sont représentés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par les matrices-colonnes X et Y, comment peut-on exprimer le produit scalaire $\langle\, x \,|\, y \,\rangle$?

4. Vérifier que les vecteurs

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1, 1, 1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (1, -1, 0) \\ \text{et} \quad \boldsymbol{v}_3 &= (1, 0, -1) \end{aligned}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$. Cette base est-elle orthonormée ? Calculer le produit scalaire $\big\langle\, v_i \,\big|\, u(v_j) \,\big\rangle$ pour tout couple (i, j) tel que $1 \leqslant i, j \leqslant 3$.

Planche 3

Exercice 3.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \quad \text{et} \quad u_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n e^{-x}\,dx.$$

1. Décrire, en discutant sur $q \in \mathbb{C}$, le comportement d'une suite géométrique de raison q.

2. Décrire, en discutant sur $q \in \mathbb{C}$, le comportement de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive. Calculer la limite de cette suite.

Exercice 3.2

1. Soient F et G, deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Rappeler la définition de la projection π sur F parallèlement à G. En déduire que l'application $\pi + I_E$ est injective.

2. On considère la droite vectorielle $\mathscr{D}$, dirigée par le vecteur $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1)$ et le plan vectoriel $\mathscr{P}$, d'équation $2x - z = 0$. Démontrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3. On note p, la projection sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$ et A, la matrice de p relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que $p(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$.

4. Expliquer pourquoi la matrice A est différente de la

matrice
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
(en considérant le noyau de A_1).

Expliquer pourquoi la matrice A est différente de la matrice
$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
(en considérant le rang de A_2).

Expliquer pourquoi la matrice A est différente de la matrice
$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Planche 4

Exercice 4.1

1. Rappeler le développement limité à l'ordre trois au voisinage de 0 de l'expression $\ln(1+x)$.

2. En déduire la valeur des limites suivantes.
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n^2}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\ln n}$$

Exercice 4.2

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = xe^y - ye^x.$$

1. Démontrer que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer les dérivées partielles de f.

3. On suppose que le point M de coordonnées (x_0, y_0) est un point critique de f. Vérifier que $e^{y_0-x_0} = y_0$ et que $e^{x_0-y_0} = x_0$. En déduire que $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ et que $y_0 = 1/x_0$.

4. Étudier rapidement le sens de variation de la fonction définie par
$$\forall\, t \geqslant 1, \quad g(t) = \exp\Big(t - \frac{1}{t}\Big) - t.$$
Que peut-on en conclure sur f ?

Exercice 4.3

Existe-t-il des valeurs réelles de α pour lesquelles la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
est inversible ? Donner une base du noyau de A lorsqu'elle n'est pas inversible.

Planche 5

Exercice 5.1

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que
$$\forall\, x > 0, \quad \frac{x+3}{x(x^2-2x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2-2x+2}.$$

2. Calculer les primitives de la fonction définie par
$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{x+3}{x(x^2-2x+2)}$$
et étudier les limites de ces primitives au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5.2

On considère la fonction f définie de la manière suivante.
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$$

1. Démontrer que f admet un prolongement g, qui est continu sur $\mathbb{R}$. Que vaut $g(0)$?

2. Démontrer que le prolongement g est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de g. En déduire l'allure du graphe de g au voisinage du point d'abscisse 0.

Exercice 5.3

On considère la matrice suivante.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. La matrice A est-elle inversible ?

2. Calculer A^2 et A^3. En déduire une relation de liaison entre les matrices A, A^2 et A^3.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 2$, la matrice A^n est une combinaison linéaire des matrices A et A^2.

4. Pour tout $n \geqslant 2$, calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X(X-1)(X-2)$. Que peut-on en déduire ?

Planche 6

Exercice 6.1

1. Soit $n \geqslant 1$. On suppose que T_n et V_n sont deux polynômes tels que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = V_n(\cos\theta).$$

Démontrer que $T_n = V_n$.

2. Démontrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2\cos\theta \sin(n+1)\theta = \sin(n+2)\theta + \sin n\theta.$$

3. Pour $n = 1$ et $n = 2$, déterminer les deux polynômes T_1 et T_2 tels que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin\theta\, T_1(\cos\theta) = \sin\theta$$
$$\text{et} \quad \sin\theta\, T_2(\cos\theta) = \sin 2\theta.$$

Exercice 6.2

1. Factoriser le polynôme $1 - X + 2X^2$.

2. Calculer le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de l'expression

$$f(x) = \ell n(1 - x + 2x^2).$$

3. En déduire l'allure du graphe de la fonction f au voisinage de l'origine.

Exercice 6.3

On considère les matrices suivantes.

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Démontrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse. La matrice A est-elle inversible ? (On ne demande pas de calculer son inverse.)

2. Calculer P^{-1}, puis $P^{-1}AP$.

3. En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On fait tendre n vers $+\infty$. On définit la matrice B dont les coefficients sont les limites quand n tend vers $+\infty$ des coefficients de A^n. Calculer B^2 et commenter le résultat obtenu.

Planche 7

Exercice 7.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \,dt.$$

1. Démontrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

2. Exprimer en fonction de W_n les intégrales suivantes.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t \,dt$$
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n t \,dt$$
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n t \,dt$$

3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2} t \,dt = -(n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n t \sin^2 t \,dt$$

et en déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

4. Vérifier que la suite de terme général

$$u_n = (n+1) W_n W_{n+1}$$

est constante. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7.2

1. On considère la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculer J^2, puis J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On pose $A = \frac{1}{4}(I_3 + J)$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On considère trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.

Exercice 7.3

Résoudre l'équation suivante

$$z^{2009} = 1 + i$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Planche 8

Exercice 8.1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les deux premiers termes $u_0 = u_1 = 1$ et la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Démontrer par récurrence que $u_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer une expression de u_n et en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8.2

Étudier la conique représentée dans un repère orthonormé par l'équation suivante.

$$2x^2 + y^2 + 3x - y + 1 = 0$$

On précisera en particulier sa nature, ses axes de symétrie (et éventuellement son centre), sa focale et son excentricité.

Exercice 8.3

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Factoriser l'expression $\det(A - xI_3)$.
2. Déterminer une base du noyau de $A - I_3$ et une base de l'image de $A - I_3$. En déduire,sans autre calcul, que $(A - I_3)^2 = 0$.
3. Démontrer que la matrice P est inversible et vérifier que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Planche 9

Exercice 9.1

On considère les deux fonctions définies par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 1/2$ et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Démontrer que la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$. On notera en particulier α, l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$. Préciser le signe de $g(1/2)$.
2. Démontrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant |u_n - \alpha|.$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_0.
3. Démontrer qu'il existe une constante $0 < K < 1$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant K|u_n - \alpha|.$$

En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant K^n$$

et conclure.

Exercice 9.2

Vérifier que la conique représentée par l'équation suivante dans un repère orthonormé est une hyperbole.

$$2x^2 - y^2 + 3x + 4y + 1 = 0$$

Déterminer les asymptotes, le centre et les axes de symétrie de cette hyperbole. Calculer également sa focale et son excentricité.

Exercice 9.3

Parmi les matrices suivantes, lesquelles ne sont pas inversibles ?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Planche 10

Exercice 10.1

1. Étudier le sens de variation sur $\mathbb{R}_+^*$ et les limites (en 0 et en $+\infty$) de la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}.$$

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale suivante.

$$I_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2}$$

3. Démontrer que

$$I_n \sim 1/n^2$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10.2

1. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble de définition de la fonction suivante.

$$f(x, y) = \ell n(1 + x \cos y)$$

2. Démontrer que l'ensemble

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < \frac{1}{2} \right\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

3. Calculer les dérivées partielles de f en un point de Ω.

Exercice 10.3

On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. Calculer $\det(A - \lambda I_3)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_3$ est-elle inversible ? Dans le cas contraire, préciser une base du noyau de $A - \lambda I_3$.

Planche 11

Exercice 11.1

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
1. Donner un exemple de base orthonormée.
2. Quelle est la dimension du sous-espace F représenté par l'équation suivante ?

$$2x + y - z = 0$$

Donner une base du sous-espace $F^\perp$.
3. Calculer la matrice de la projection orthogonale sur F.

Exercice 11.2

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + n^2}.$$

1. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\pi/4$.

Exercice 11.3

1. Démontrer que les solutions de l'équation

$$12x + 7y = 0$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ sont les couples $(7k, -12k)$, le paramètre k parcourant $\mathbb{Z}$.
2. Démontrer que l'équation

$$12x + 7y = 1$$

admet une solution $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$. En calculer une et en déduire une solution de l'équation

$$12x + 7y = 2.$$

3. Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation

$$12x + 7y = 2.$$

Planche 12

Exercice 12.1

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique.
1. Soit $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$, une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, représentée dans la base canonique par la matrice P (les colonnes de P sont constituées des coordonnées relatives à la base canonique des vecteurs de la famille $\mathscr{B}$).

Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice P pour que la famille $\mathscr{B}$ soit une base orthonormée directe.
2. Soient u et v, deux vecteurs orthogonaux et unitaires de $\mathbb{R}^3$. Expliciter un vecteur w tel que (u, v, w) soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice relative à cette base de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\big[x \mapsto \langle x \,|\, u \rangle \cdot u + \cos\theta \cdot (x - \langle x \,|\, u \rangle \cdot u)v \\ + \sin\theta \cdot (u \wedge x)\big].$$

En déduire la nature géométrique de f.
3. Écrire la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'angle $\pi/6$ autour de la droite vectorielle dirigée et orientée par le vecteur $n = (1, 2, -1)$.

Exercice 12.2

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et la fonction φ définie par

$$\forall\, x \neq 0, \qquad \varphi(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

1. Pourquoi la fonction φ est-elle bien définie sur $\mathbb{R}^*$? Calculer sa dérivée et sa dérivée seconde.
2. Démontrer que $\varphi'(x)$ tend vers $f'(0)$ lorsque x tend vers 0. Calculer la limite de $\varphi''(x)$ lorsque x tend vers 0.
3. Démontrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, t \in [-1, 1], \quad \big|f(t) - f(0) - tf'(0)\big| \leqslant Kt^2.$$

4. Démontrer que φ admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser la tangente au graphe de φ au point d'abscisse nulle.

Planche 13

Exercice 13.1

On étudie la courbe plane Γ représentée en coordonnées polaires par la relation suivante.

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \qquad \rho(\theta) = 2 + \sin\theta.$$

1. Vérifier que la courbe Γ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
2. La courbe présente-t-elle un point singulier ?
3. Calculer une équation de la tangente et la courbure au point de Γ représenté par $\theta = 0$.
4. Exprimer, sous la forme d'une intégrale, la longueur de la courbe comprise entre les points représentés par $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Exercice 13.2

On considère la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et de la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$$

1. Représenter graphiquement le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et qu'elle tend vers $+\infty$.
3. Pour quel réel α la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ admet-elle une limite finie non nulle ?
4. En *admettant* que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^\alpha}{n} = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha,$$

que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 13.3

1. Décomposer en éléments simples la fraction suivante.

$$\frac{1}{X^2 + 4X + 3}$$

2. En déduire une expression simplifiée, puis la limite lorsque n tend vers $+\infty$, de la quantité suivante.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 4k + 3}$$

Planche 14

Exercice 14.1

1. Factoriser le polynôme $X^2 + 4X + 3$.
2. Déterminer l'ensemble de définition et étudier les variations de la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2+1}{t^2+4t+3}\,dt.$$

3. Calculer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\frac{X^2+1}{X^2+4X+3}$$

et en déduire une expression simplifiée de $f(x)$.
4. Vérifier que le graphe de f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$. Déterminer une équation de cette asymptote et préciser la position du graphe de f par rapport à l'asymptote.

Exercice 14.2

1. Reconnaître la courbe plane Γ représentée dans un repère orthonormé par le paramétrage suivant.

$$\big(x(t),\ y(t)\big) = (1 + 2\sin t,\ -2 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

2. Calculer une équation cartésienne représentant la courbe Γ.
3. Vérifier que le point A de coordonnées $(1, -1)$ appartient à la courbe Γ et calculer une équation cartésienne de la tangente à Γ au point A.
4. Donner une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ centré à l'origine et passant par le point A, ainsi qu'une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
5. Exprimer la longueur de la courbe Γ sous la forme d'une intégrale.

Planche 15

Exercice 15.1

1. Factoriser le polynôme $1 - X - 2X^2$.
2. Calculer le développement limité à l'ordre trois au voisinage de 0 de l'expression

$$f(x) = \ell n(1 - x - 2x^2).$$

3. En déduire l'allure du graphe de la fonction f au voisinage de l'origine.

Exercice 15.2

1. Démontrer la continuité de la fonction

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$?

2. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

3. La fonction f admet-elle des points critiques ?

4. Déterminer le minimum de la fonction f.

Exercice 15.3

On considère la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et l'ensemble

$$E = \{aI_3 + bJ_3,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ? Vérifier que E est aussi un sous-anneau de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant que a et b, pour que la matrice $aI_3 + bJ_3$ soit inversible dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Est-elle alors inversible dans l'anneau E ?

Planche 16

Exercice 16.1

On considère la courbe plane Γ représentée par le paramétrage suivant.

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{1}{1+t+t^2}, \quad y(t) = \frac{t}{1+t+t^2}.$$

1. Démontrer que la courbe Γ est bornée.

2. Les applications $[t \mapsto x(t)]$ et $[t \mapsto y(t)]$ sont-elles injectives ? Démontrer que la courbe Γ n'a pas de point double (autrement dit, l'application $[t \mapsto (x(t), y(t))]$ est injective).

3. À l'aide d'un développement limité à l'ordre deux, préciser l'allure de la courbe au voisinage du point M_0 représenté par le paramètre $t = 0$ (position, tangente, position par rapport à la tangente et courbure en ce point).

4. En remarquant que $t = y(t)/x(t)$, déterminer une équation cartésienne vérifiée par la courbe Γ. Commenter.

Exercice 16.2

Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose

$$f(x,y) = \int_x^y \frac{\ell n\, t}{1+t^2}\, dt.$$

1. Pourquoi la fonction f est-elle bien définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$? Étudier le signe de f.

2. Démontrer que l'application

$$[y \mapsto f(1,y)]$$

admet une limite, finie ou infinie, au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

3. Démontrer que

$$\forall\, 0 < y \leqslant 1, \qquad |f(1,y)| \leqslant \int_1^y \ell n\, t\, dt.$$

Que peut-on en déduire sur f au voisinage de 0 ?

4. À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, comparer les expressions $f(1,y)$ et $f(1,1/y)$. Que peut-on en déduire ?

Planche 17

Exercice 17.1

1. Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,t) = \cos x\, e^{-ct}$$

(où $c \in \mathbb{R}_+^*$) est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les points critiques de f.

3. Vérifier que la fonction f est une solution de l'équation suivante.

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Exercice 17.2

1. Développer l'expression suivante.

$$q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad A = \begin{bmatrix} 14 & 18 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, exprimer $q(\cos\theta, \sin\theta)$ en fonction de $u = \tan\theta$.

3. Démontrer que la fonction définie par

$$\varphi(u) = -1 + \frac{36u + 15}{u^2 + 1}$$

atteint un maximum (en un point qu'on notera u_1) et un minimum (en un point qu'on notera u_2).

4. Vérifier qu'il existe deux scalaires λ_1 et λ_2, qu'on calculera, tels que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

5. Vérifier que la conique d'équation

$$14x^2 - y^2 + 36xy = 1$$

est une hyperbole. Préciser son centre, ses axes de symétrie et ses asymptotes.

Planche 18

Exercice 18.1

L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ étant donné, résoudre le système suivant, d'inconnue $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} 2u + \ \ v = x \\ -u + 2v = y \end{cases}$$

2. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (f_1, f_2)$ de $\mathbb{R}^2$, et une seule, telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) = \frac{2x - y}{5} \cdot f_1 + \frac{x + 2y}{5} \cdot f_2.$$

On notera P, la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$.

3. La base $\mathscr{B}$ est-elle orthogonale ? orthonormée ? La base canonique et la base $\mathscr{B}$ ont-elle la même orientation ?

4. On considère la conique Γ, représentée par l'équation cartésienne

$$7x^2 + 13y^2 + 8xy = 25$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Par quelle équation cartésienne cette conique est-elle représentée dans la base $\mathscr{B}$?

5. En déduire la nature de la conique Γ et préciser son excentricité.

Exercice 18.2

1. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, la solution de l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y''(t) + 2y'(t) + (t - 1)y(t) = \sin t$$

qui vérifie la condition initiale

$$\{f(0) = 0,\ f'(0) = 1\}.$$

Que vaut $f''(0)$?

2. En déduire l'allure du graphe de f au voisinage de $t = 0$.

Exercice 18.3

1. Déterminer les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation

$$4x + 7y = 0.$$

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation

$$4x + 7y = 3.$$

3. L'équation $4x+7y = 3$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{N}^2$?

Planche 19

Exercice 19.1

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = x^{1+1/x}.$$

1. Calculer un équivalent de f au voisinage de 0. Traduire géométriquement le résultat obtenu.

2. Calculer un équivalent de $f(x) - x$ au voisinage de $+\infty$. Traduire géométriquement le résultat obtenu.

3. On pose $x = 1 + h$. Démontrer que

$$f(x) = 1 + 2h - \frac{1}{2}h^3 + o(h^3)$$

pour h voisin de 0. En déduire l'allure du graphe de f au voisinage de $x = 1$.

Exercice 19.2

On considère l'ensemble E des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

1. Démontrer que E est un espace vectoriel et donner sa dimension.

2. Démontrer que

$$\forall M \in E, \quad M^3 = 0.$$

3. On pose

$$\forall M \in E, \qquad \exp(M) = I + M + \frac{1}{2}M^2$$
$$\text{et} \quad \ell n(I + M) = M - \frac{1}{2}M^2.$$

Vérifier que les matrices $\exp(M) - I$ et $\ell n(I + M)$ appartiennent toutes deux à E, puis que

$$\ell n\big(\exp(M)\big) = M \quad \text{et} \quad \exp\big(\ell n(I + M)\big) = M.$$

4. Démontrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \exp(kM) = \big[\exp(M)\big]^k.$$

Démontrer que $\exp(M)$ est inversible et que son inverse est $\exp(-M)$.

5. À quelle condition a-t-on

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) \quad ?$$

Planche 20

Exercice 20.1

1. Calculer le développement limité à l'ordre trois au voisinage de 0 de l'expression

$$\ln \frac{1-u}{1+u}.$$

2. On considère, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x > 0, \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, exprimer f_n' en fonction de f_n et de f_{n-1}. En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, l'expression de f_n'' en fonction de f_n, f_{n-1} et f_{n-2}.

3. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $f_n''(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n telles que $0 < u_n < v_n$.

4. On pose alors $a_n = f_n(u_n)$ et $b_n = f_n(v_n)$. Calculer la limite du rapport a_n/b_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 20.2

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. On note $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$ et $\mathbf{u}_3 = (0,0,1,1)$. Calculer $f(\mathbf{u}_1)$ et $f(\mathbf{u}_3)$.

2. Déterminer deux vecteurs $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_4$ de $\mathbb{R}^4$ tels que $f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1$ et $f(\mathbf{u}_4) = \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4$ et tels que la famille

$$\mathscr{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$$

soit une base de $\mathbb{R}^4$.

3. Écrire la matrice B qui représente f dans la base $\mathscr{B}$. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Planche 21

Exercice 21.1

1. Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x > 0, \qquad f(x) = x + \ln x$$

réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera x_n l'unique solution de l'équation $f(x) = n$.

2. En vérifiant que $\ln x < x$ pour tout $x > 0$, démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n.$$

3. Vérifier que $\ln(x_n)/n$ tend vers 0 et démontrer que $x_n \sim n$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire que

$$\ln \frac{x_n}{n} \sim \frac{x_n - n}{n}$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 1.$$

4. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \frac{n - x_n}{\ln n}.$$

Vérifier que $u_n - 1$ tend vers 0 et en déduire que

$$1 - u_n \sim \frac{1}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Démontrer enfin que

$$x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Exercice 21.2

On considère les matrices suivantes.

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$I = I_3 \qquad P_1 = \frac{1}{3}J \qquad P_2 = I - \frac{1}{3}J.$$

1. Vérifier que P_1 et P_2 sont des matrices de projection, que $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ et que $P_1 + P_2 = I$.

2. On suppose que X est une matrice-colonne telle que $P_1X = 0$. Que vaut P_2X ?

3. Démontrer que

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \qquad M - \lambda I = (1-\lambda)P_1 + \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)P_2$$

et en déduire par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad M^n = P_1 + \frac{1}{2^n}P_2.$$

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que X est une matrice-colonne non nulle telle que $MX = \lambda X$.

En considérant les matrices colonnes $P_1(M - \lambda I)X$ et $P_2(M - \lambda I)X$, démontrer que

$$(1-\lambda)P_1X = 0$$

ou que

$$(1-2\lambda)P_2X = 0.$$

En déduire que

- ou bien $\lambda = 1$, $P_1X = X$ et $P_2X = 0$;
- ou bien $\lambda = 1/2$, $P_1X = 0$ et $P_2X = X$.

Planche 22

Exercice 22.1

1. Factoriser le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2$ en remarquant qu'il admet une racine réelle évidente.

2. Étudier les variations de la fonction

$$f :]0, 9[\to \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall\, 0 < x < 9, \qquad f(x) = \frac{2}{3 - \sqrt{x}}.$$

Représenter graphiquement la fonction f.

3. Étudier le signe de $f(x) - x$ et compléter la figure précédente en traçant la droite d'équation $y = x$.

Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions : la solution évidente 1 et une autre solution $\lambda_1 > 1$.

4. Soit $0 < x \leqslant \lambda_1$. Démontrer que $f(x)$ existe bien et que $0 < f(x) \leqslant \lambda_1$.

Pour tout réel $0 < \alpha \leqslant \lambda_1$, il existe donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme

$$u_0 = \alpha$$

et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et calculer sa limite.

Exercice 22.2

1. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme et $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, une matrice triangulaire supérieure. On note a_1, a_2 et a_3, les coefficients diagonaux de A. Exprimer les coefficients diagonaux de $P(A)$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante simple sur le réel m pour que la matrice

$$A(m) = \begin{bmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{bmatrix}$$

soit inversible.

3. Soit $P_m \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme tel que $P_m\big[A(m)\big]$ soit la matrice nulle. Que peut-on dire des racines de P ?

Déterminer deux réels $a(m)$ et $b(m)$ tels que

$$A(m)^2 = a(m)A(m) + b(m)I$$

et en déduire, lorsque $m \neq 0$, une expression de $A(m)^{-1}$ comme combinaison linéaire de $A(m)$ et de I.

4. On considère les matrices suivantes.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = I - J.$$

Vérifier que J et P sont des matrices de projections, que $PJ = JP = 0$ et que $J + P = P + J = I$. Démontrer par récurrence que

$$\forall\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big[A(m)\big]^n = P + (1-m)^n J.$$

Indication 1.1

2. Soient $\alpha < \beta$, deux réels. À quelle condition nécessaire et suffisante sur $x \in \mathbb{R}$ le segment $[0 \leftrightarrow x]$ ne contient-il ni α, ni β ?
3. À quel ordre faut-il limiter le développement d'une fonction φ pour obtenir un développement limité à l'ordre deux des primitives de φ ?

Interprétation géométrique d'un développement limité à l'ordre deux ? Que se passe-t-il lorsque le terme du second ordre est nul ?

Indication 1.2

1. Dans quel cas la connaissance du rang d'une matrice permet-elle de connaître son déterminant sans calcul ? Dans quel cas la connaissance du déterminant d'une matrice permet-elle de connaître son rang sans calcul ?
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A et sur la colonne y pour que l'équation linéaire $Ax = y$ admette au moins (resp. au plus) une solution.

Indication 2.1

3. Quelle est la propriété fondamentale des équations différentielles linéaires ? Quelles sont les conséquences techniques de cette propriété fondamentale ? Interpréter physiquement ces conséquences.

Indication 3.2

1. Deux sous-espaces F et G de E sont supplémentaires dans E si, et seulement si, l'équation $x+y = 0_E$ d'inconnue $(x, y) \in F \times G$ admet $(x, y) = (0_E, 0_E)$ pour seule solution.
2. Condition nécessaire et suffisante pour que deux droites vectorielles soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$? pour qu'une droite et un plan vectoriels soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? Interprétation géométrique ?

Indication 5.2

2. Pour démontrer que le prolongement g est dérivable sur $\mathbb{R}$, un développement limité suffit. Pourquoi ?

Pour démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut invoquer un théorème : lequel ? pourquoi est-ce le moyen le plus efficace ?

Indication 6.3

2. Le moyen le plus efficace pour calculer l'inverse d'une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est d'appliquer les formules de Cramer. (Cela vaut aussi pour la résolution d'un système de deux équations en deux inconnues.)
3. Il faut savoir que $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que, si la matrice A est inversible, cette identité vaut en fait pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Indication 7.3

Les équations non linéaires qu'on sait résoudre dans $\mathbb{C}$ sont peu nombreuses. Il s'agit de $z^2 = u+iv$; de $z^n = \rho e^{i\theta}$ (avec les racines n-ièmes de l'unité) ; de $\exp(z) = \rho e^{i\theta}$ et de toutes celles qui s'y ramènent. C'est tout !

Indication 8.3

2. Quel que soit l'endomorphisme $f \in L(E)$, les propriétés $f \circ f = 0$ et $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ sont équivalentes. (Pourquoi ?)
3. Quelles sont les différentes méthodes pour démontrer qu'une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible ? Dans quel cas le calcul du déterminant est-il une méthode efficace ?

Si A représente un endomorphisme $u \in L(\mathbb{R}^3)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$, alors $P^{-1}AP$ représente le même endomorphisme u dans une autre base $\mathscr{B}$. Comment connaître les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}$ relatives à la base canonique $\mathscr{B}_0$? Comment en déduire l'image par u des vecteurs de $\mathscr{B}$? Comment en déduire la matrice $P^{-1}AP$ sans calculer la matrice P^{-1} ?

Indication 9.1

Représenter $y = f(x)$ et $y = x$ sur une même figure. Quelle information doit apporter l'étude de g ?
3. Exemples d'applications lipschitziennes ? Comment l'inégalité des accroissements finis permet-elle de caractériser les applications lipschitziennes et dérivables ?

Indication 9.3

Quelles sont les valeurs possibles pour le rang d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$? Que dire d'une matrice de rang nul ? Est-il facile de reconnaître une matrice de rang 1 ? une matrice dont le rang est supérieur à 2 ? une matrice dont le rang est inférieur à 2 ?

Indication 11.1

2. Comment trouver sans calcul un vecteur normal à un hyperplan dont on connaît une représentation cartésienne ? Quelle hypothèse doit-on faire sur la base dans laquelle la représentation est donnée ?
3. La projection orthogonale p sur un plan $\mathscr{P}$ et la projection orthogonale q sur la droite $\mathscr{D} = \mathscr{P}^\perp$ sont liées par une relation très simple : laquelle ?

Comment s'exprime la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R} \cdot \mathbf{u}$? Comment cette expression se simplifie-t-elle lorsque le vecteur $\mathbf{u}$ n'est pas unitaire ?

Indication 11.2

1. Une moyenne est toujours comprise entre la plus grande valeur et la plus petite valeur. Comment relier u_n à une moyenne ?

Indication 12.1

Par définition, pour la structure euclidienne orientée canonique, la base canonique est une base orthonormée directe. Que dire d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel la base canonique est orthonormée ?

Indication 12.2

3. Comparer l'inégalité de Taylor-Lagrange et l'inégalité des accroissements finis.

Indication 14.2

3. Comment déterminer une équation cartésienne et un vecteur directeur de la tangente à une conique dont on connaît un paramétrage cartésien ? un paramétrage polaire ? une équation cartésienne ?

Indication 15.3

2. Un élément x d'un anneau A est inversible dans A lorsqu'il existe y, *élément de* A, tel que $xy = yx = 1_A$. L'entier 2 est-il inversible dans l'anneau $(\mathbb{Q}, +, \times)$? et dans le sous-anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$? Quels sont les éléments inversibles de $(\mathbb{Q}, +, \times)$? et ceux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$?

Indication 16.1

1. Le couple $\big(x(t), y(t)\big)$ est borné si, et seulement si, les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont bornées.

Indication 16.2

1. Si f est une fonction continue et positive, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est du signe de $(b - a)$.

Indication 18.1

2. On peut définir une base $\mathscr{B}$ en exprimant ses vecteurs dans une base donnée $\mathscr{B}_0$ (ce qui revient à donner les colonnes de la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$) ou en exprimant les coordonnées relatives à $\mathscr{B}$ en fonction des coordonnées relatives à $\mathscr{B}$: traduire cette situation à l'aide de la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$.

Indication 18.3

Comparer la résolution d'une équation du type $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$ (fondée sur le théorème de Bézout) et la résolution de cette équation dans $\mathbb{R}^2$ (fondée sur l'algorithme de Gauss) : solutions de l'équation homogène, solution particulière, principe de superposition.

Indication 22.1

1. Comment calcule-t-on la somme et le produit des racines d'un polynôme sans calculer ses racines ? (Préciser les hypothèses nécessaires à ce calcul.)

3. Quel théorème permet de justifier qu'une équation de la forme $f(x) = 0$ admet *au moins* une solution sur un intervalle I ? Comment ce théorème permet-il de justifier que cette équation n'a pas de solution sur I ?

Quel théorème permet de justifier que cette équation admet *exactement* une solution sur un intervalle I ? Comment justifier que cette équation admet *exactement* n solutions sur l'intervalle I (où n est un entier naturel supérieur à 2) ?