Énoncés posés en juin 2010

Chaque année au mois de juin, se déroule un concours blanc commun aux deux classes de MPSI. Voici une sélection d'exercices qui ont été posés lors des épreuves orales de ce concours blanc. Chaque candidat dispose d'une demi-heure pour préparer sa planche et d'une demi-heure pour l'exposer.

La plupart des planches sont probablement trop longues pour être entièrement traitées en une demi-heure. Cependant, s'il faut y passer une heure entière, c'est que certains points importants du cours n'ont pas été assimilés.

Les questions posées dans ces exercices ne demandent pas une grande dextérité calculatoire (et peuvent souvent être traitées sans aucun calcul à condition de maîtriser certains aspects théoriques du cours). La plupart d'entre elles vous obligeront à réfléchir au sens de ce que vous avez fait en cours.

Certaines questions sont assorties d'indications, regroupées à la fin de ce document. Ces indications sont souvent des questions d'ordre général qui portent sur des points théoriques ou techniques importants (par *techniques*, il faut comprendre qu'il s'agit de *méthodes* de calculs). Il peut être intéressant de réfléchir à ces indications indépendamment des exercices dont elles proviennent, car c'est un bon moyen d'approfondir sa compréhension du cours.

Certains exercices sont dépourvus de toute indication. Cela signifie que les techniques à mettre en œuvre sont d'une importance essentielle.

Prière de signaler toutes les erreurs que vous relèverez (en mentionnant les numéros de planche, d'exercice et de question) à l'adresse suivante

`gregoire.taviot@ac-rouen.fr`

en mentionnant *[Annales MPSI]* comme objet du message.

Planche 1

Exercice 1.1

Soit a, un entier relatif. On cherche les conditions sur a pour que le polynôme

$$P_0 = X^4 + aX^2 + 1$$

puisse se factoriser sous la forme

$$(X^2 + a_1 X + b_1)(X^2 + a_2 X + b_2)$$

avec $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$.

1. Démontrer qu'il existe $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$P_0 = (X^2 + a_1 X + b_1)(X^2 + a_2 X + b_2).$$

Comparer a_2 et b_2 à a_1 et b_1 et démontrer que, si a_1 n'est pas nul, alors $b_1 = \pm 1$.

2. En déduire quelles sont les valeurs de $a \in \mathbb{Z}$ pour lesquelles P_0 admet la factorisation voulue.

Exercice 1.2

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, une fonction continue et strictement positive.

1. Démontrer qu'il existe deux réels m et M tels que

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad 0 < m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

2. Calculer

$$I_n = (n+1) \int_0^1 x^n \, dx$$

en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. Expliquer pourquoi la suite de terme général

$$u_n = (n+1) \int_0^1 f(x) x^n \, dx$$

ne peut pas tendre vers $+\infty$, ni vers 0.

Exercice 1.3

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Planche 2

Exercice 2.1

Soient $a \in \mathbb{Z}$, un entier relatif et

$$P_0 = X^4 + aX^2 + 1.$$

1. Tracer l'allure de la fonction $[x \mapsto P_0(x)]$ en discutant sur les valeurs de a.

2. Quelles sont les valeurs de $a \in \mathbb{Z}$ pour lesquelles P_0 a des racines entières ? Factoriser P_0 dans ce cas.

Exercice 2.2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{nx^n}{1 - x^n}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer un équivalent de $u_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Pour quelles valeur de $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général $u_n(x)$ ne tend-elle pas vers 0 ?

3. Pour tout $x \in\,]-1, 1[$, trouver un réel $0 < y < 1$ tel que

$$u_n(x) = o(y^n)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Étudier la limite de $u_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2.3

On considère un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$. On note A, la matrice de u relative à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que $n = 3$ et qu'il existe une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$-A = P^{-1} A P.$$

Démontrer, par un calcul de déterminant, que la matrice A n'est pas inversible.

2. On suppose que $n = 2$ et que

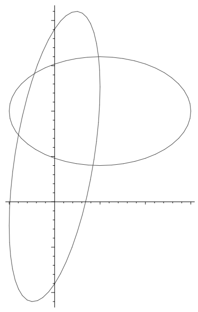
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quel est le rang de A ? La matrice A est-elle inversible ? En notant $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$, les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, démontrer que $\mathscr{B}' = \big(-u(\boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{e}_2\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Quelle est la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'$?

Planche 3

Exercice 3.1

Comparer les excentricités des deux ellipses.



Exercice 3.2

Soit u, une application linéaire de E dans F. Démontrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont des sous-espaces vectoriels.

Exercice 3.3

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

et par

$$\forall\, x < 0, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x} + ax$$

où a est un réel.

1. Pour quelle valeur de $f(0)$ la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? *On suppose que cette condition est vérifiée dans la suite.*

2. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

3. En supposant que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 3.4

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer le rang de A.

2. Trouver les matrices colonnes $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que $AX = Y$.

Planche 4

Exercice 4.1

1. Démontrer qu'un polynôme $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 admet au moins une racine réelle.

2. On suppose que P_0 admet une racine réelle positive et que le produit de ses racines est strictement négatif. Démontrer que P_0 admet trois racines réelles.

3. Démontrer que le polynôme

$$P_0 = X^3 - 3X + 1$$

admet trois racines réelles.

Exercice 4.2

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x \exp \frac{x^2}{1+x^2}.$$

1. Démontrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier f au voisinage de 0 (valeur, tangente, position par rapport à la tangente).

3. Étudier f au voisinage de $+\infty$ (limite, asymptote, position par rapport à l'asymptote).

4. Tracer l'allure du graphe de f.

Exercice 4.3

On note $\mathscr{B}_0 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel $F \subset \mathbb{R}^3$ est **stable par** u lorsque

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in F, \quad u(\boldsymbol{x}) \in F.$$

1. Montrer que la droite dirigée par le vecteur $\boldsymbol{e}_3$:

$$\mathscr{D} = \mathbb{R} \cdot \boldsymbol{e}_3$$

et le plan dirigé par les vecteurs $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$:

$$\mathscr{P} = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$$

sont deux sous-espaces stables par u.

2. Calculer le rang de $A + I_3$ et de $A - 3I_3$.

3. Vérifier que la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est inversible et, *sans calculer* P^{-1}, démontrer que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Planche 5

Exercice 5.1

Le polynôme

$$P_0 = X^2 - 37X + 12$$

admet-il deux racines réelles négatives ? Admet-il une racine réelle négative ?

Exercice 5.2

1. Soient E, un espace vectoriel réel de dimension $d \geqslant 2$ et u, un endomorphisme de E. Démontrer que le **commutant** de u, défini par

$$C(u) = \{v \in L(E) \ :\ u \circ v = v \circ u\}$$

est un sous-espace vectoriel de $L(E)$. Préciser les moments de la démonstration où intervient la linéarité de u.
2. Vérifier que le sous-espace $\mathrm{Vect}(I_E, u)$ de $L(E)$ est contenu dans $C(u)$. En déduire que

$$\dim C(u) \geqslant 2.$$

3. On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et que u est représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Quelle est la dimension du commutant de u ?

Exercice 5.3

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

1. Quelle condition les trois réels a, b et c doivent-ils vérifier pour que

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

au voisinage de $+\infty$?

On suppose dans la suite que cette condition est satisfaite.
2. Démontrer que les primitives de f admettent une limite finie au voisinage de $+\infty$.
3. Comment choisir a, b et c pour que f admette une primitive F telle que

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

au voisinage de $+\infty$ *et que*

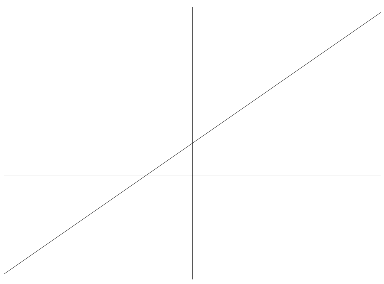
$$F(x) = \mathcal{O}(1)$$

au voisinage de 0 ?

Planche 6

Exercice 6.1

On considère la droite représentée sur la figure suivante.



1. Cette droite peut-elle admettre

$$x + 3y + 1 = 0$$

pour équation ?
2. Peut-elle être représentée par le paramétrage suivant ?

$$x(t) = 2t + 1, \quad y(t) = t - 1, \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Peut-elle admettre

$$y = 5x + 1$$

pour équation ?

Exercice 6.2

On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\sin t}{1 + \sin^2 t}$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

1. Étudier la fonction $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, u \in [0, 1], \quad \varphi(u) = \frac{u}{1 + u^2}$$

et tracer sommairement l'allure de f.
2. Démontrer, par des arguments de symétrie, que la fonction g est paire et périodique, de période 2π.
3. Démontrer que $g(x)$ atteint son maximum en $x = \pi$. Quel est le minimum de g ? Où est-il atteint ?
4. Calculer une expression simple de $g(x)$. En déduire l'allure du graphe de g.

Exercice 6.3

On note $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs

$$u_2 = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad u_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Démontrer qu'il existe un, et un seul, endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\varphi(e_1) = e_1, \quad \varphi(u_2) = e_2 \quad \text{et} \quad \varphi(u_3) = e_3.$$

2. Écrire la matrice A de φ relative à la base $\mathscr{B}_0$.
3. La matrice A est-elle inversible ?

Planche 7

Exercice 7.1

On suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère la droite $\mathscr{D}$ qui passe par les points $A(2,-1)$ et $B(-1,1)$.

1. Donner un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

2. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

3. La distance de $\mathscr{D}$ à l'origine est-elle supérieure ou inférieure à 2 ?

Exercice 7.2

On considère la suite de terme général

$$u_n(x) = n^2 x^n$$

où $x \in \mathbb{R}$, ainsi que la suite de terme général

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

1. Pour quelles valeurs de x la suite de terme général $u_n(x)$ tend-elle vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$? Que peut-on remarquer sur $u_n(x)$ pour les autres valeurs de x ?

On suppose dans la suite que $0 \leqslant x < 1$.

2. Démontrer que la suite $\big(S_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Démontrer que

$$\forall\, 0 \leqslant x < y < 1, \quad n^2 x^n = \mathcal{O}(y^n)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

En remarquant que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} y^k \leqslant \frac{1}{1-y},$$

en déduire que la suite $\big(S_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4. Pour tout $x \in [0,1[$, on pose alors

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x).$$

Démontrer que la fonction S ainsi définie admet une limite, finie ou infinie, au voisinage de 1. (On pourra comparer $S_n(x)$ et $S_n(y)$ en supposant que $0 < x < y < 1$.)

Exercice 7.3

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Exprimer AX_1 en fonction de X_1.

2. Caractériser les vecteurs qui appartiennent à l'image d'un projecteur. La matrice A est-elle la matrice d'un projecteur ?

3. Calculer le rang de $A - 4I_3$ et trouver une matrice colonne $X_2 \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $AX_2 = 4X_2$.

Planche 8

Exercice 8.1

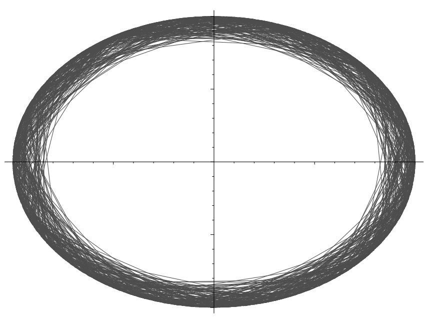
Pour étudier l'arc paramétré par

$$x(t) = \cos(t^2), \quad y(t) = \sin(t^2), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

on a utilisé Maple en exécutant les instructions suivantes :

```
x:=cos(t**2);
y:=sin(t**2);
plot([x,y,t=0..30]);
```

et on a obtenu la figure suivante.



Expliquer. (Il n'y a pas d'erreur de syntaxe.)

Exercice 8.2

Pour tout $\beta \in]-\beta, \beta[$, on pose

$$I(\beta) = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \beta\cos t}\,dt.$$

1. Comparer les valeurs de $\cos t$ et de $\cos(\pi - t)$.

2. Démontrer que

$$I(\beta) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\beta\cos t} + \sqrt{1-\beta\cos t}\,dt.$$

3. Démontrer par un argument de convexité que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2} \leqslant 1.$$

4. En déduire le maximum de $I(\beta)$ et pour quelle valeur de β ce maximum est atteint.

Exercice 8.3

On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer, en fonction de $x \in \mathbb{R}$, le déterminant de

$$P(x) = A - xI_3.$$

2. Quelles sont les racines de P ?

3. Comparer les sous-espaces $\operatorname{Ker}(A - 3I_3)$ et $\operatorname{Im} A$. En déduire que $A^2 - 3A = 0$. Que peut-on en déduire sur $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im}(A - 3I_3)$?

Planche 9

Exercice 9.1

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$\forall\, x \in [0,1], \quad u_{n,p}(x) = x^n(1-x)^p$$

et

$$m_{n,p} = \int_0^1 u_{n,p}(x)\,dx.$$

1. Démontrer que

$$\forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad m_{n,p} > 0.$$

2. Comparer $u_{n,p}(x)$ et $u_{p,n}(1-x)$.

3. On suppose que $n \geqslant p$. Démontrer que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad 0 \leqslant u_{n,p}(x) \leqslant \frac{x^{n-p}}{4^p}.$$

4. L'une des expressions suivantes est la bonne valeur de $m_{n,p}$. Déduire laquelle est-ce des questions précédentes.

$$\frac{(n+p)!}{n!p!} \qquad \frac{(n+1)!(p-1)!}{(n+p)!} \qquad \frac{n!p!}{(n+p)!}$$

5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \int_0^1 e^{-x} u_{n,2n}(x)\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-x} u_{2n,n}(x)\,dx.$$

(On pourra effectuer le changement de variable $y = 1-x$.)

Exercice 9.2

On identifie ici les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ aux matrices colonnes qui les représentent dans la base canonique :

$$(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

1. Qu'est-ce que *la structure euclidienne canonique de* $\mathbb{R}^2$?

2. On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vérifier que P est une matrice orthogonale et calculer ${}^tPAP$.

3. Vérifier que l'application définie par

$$\forall\,(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \varphi(X,Y) = {}^tXAY$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. (On pourra considérer $\varphi({}^tPX, {}^tPX)$.)

4. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est-elle une base orthogonale pour φ ?

5. Vérifier que la base de $\mathbb{R}^2$ formée par les deux vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = (1,1) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_2 = (-1,1)$$

est une base orthogonale pour φ et pour le produit scalaire canonique.

6. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ qui soit orthonormée à la fois pour le produit scalaire canonique et pour le produit scalaire φ ?

Planche 10

Exercice 10.1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \int_0^x t^n e^t\,dt.$$

1. Démontrer que f_n est une fonction positive, croissante et convexe sur $\mathbb{R}_+$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre $f_n(x)$ et $f_{n-1}(x)$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) \leqslant x^k(e^x - 1).$$

En déduire que

$$f_n(x) \sim x^n e^x$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Tracer l'allure du graphe de f_1. (On précisera la tangente à l'origine.)

Exercice 10.2

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \det(A + xI_3).$$

1. Quel est le rang de A ?

2. Calculer $f(x)$ et en déduire $f'(0)$.

3. Démontrer qu'il existe un réel M tel que, pour tout $x \geqslant M$, la matrice $A + xI_3$ est inversible.

Exercice 10.3

1. Calculer une équation cartésienne de la droite issue du point $M(1,2)$ et dirigée par le vecteur $\mathbf{u} = (2,-1)$.

2. La distance de cette droite à l'origine est-elle, ou non, supérieure à 3 ?

Planche 11

Exercice 11.1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$A(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & g_1(x) \\ f_2(x) & g_2(x) \end{bmatrix}$$

où f_1, f_2, g_1 et g_2 sont des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = \det A(x)$$

ne s'annule jamais.

1. Démontrer qu'il existe quatre applications h_1, h_2, h_3 et h_4, indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad [A(x)]^{-1} = \begin{bmatrix} h_1(x) & h_2(x) \\ h_3(x) & h_4(x) \end{bmatrix}.$$

2. On suppose que $f_2 = f_1'$ et $g_2 = g_1'$. Calculer $W'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On suppose en outre que $f_1(x) = e^{-x}$.

Démontrer qu'il existe une fonction $\lambda \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_1(x) = \lambda(x)e^{-x},$$

puis que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda''(x) - 2\lambda'(x) = W'(x).$$

Exercice 11.2

On veut calculer l'intégrale suivante.

$$I = \int_0^\pi \sin^3 t \, dt$$

1. Pourquoi doit-on s'attendre à trouver

$$0 \leqslant I \leqslant \pi \quad ?$$

2. Calculer la valeur exacte de I.

Exercice 11.3

Les trois points

$$A(1, 2, 1), \quad B(-2, 1, 3) \quad \text{et} \quad C(-7, 6, 13)$$

sont-ils alignés ? Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 11.4

On sait qu'une conique n'est pas bornée, mais qu'elle est contenue dans un demi-plan. De quel type de conique s'agit-il ?

Planche 12

Exercice 12.1

1. Reconnaître la partie A de $\mathbb{R}^3$ caractérisée par le système suivant.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

2. La partie A est-elle contenue dans le plan qui passe par les points $M_0(0, 0, 0)$, $M_1(1, 2, -1)$ et $M_2(2, 1, 3)$?

Exercice 12.2

On considère la suite de terme général

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Démontrer que la suite $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

2. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad q_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^2}.$$

3. En déduire que la suite $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

4. La limite de cette suite peut-elle être égale à $\frac{\pi^2}{2}$? à $\frac{\pi^2}{6}$? à $\frac{\pi^2}{8}$?

Exercice 12.3

1. Que dire des solutions de l'équation différentielle suivante ?

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

2. Démontrer que l'équation différentielle

$$y'' + 5y' + 6y = \cos 2x$$

admet au plus une solution périodique.

3. Calculer la solution périodique de l'équation

$$y'' + 5y' + 6y = \cos 2x$$

et préciser sa période.

Planche 13

Exercice 13.1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Pour tout réel $a > 0$, on considère l'ellipse $\mathscr{E}_a$ représentée par l'équation suivante.

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$$

1. Représenter graphiquement l'ellipse $\mathscr{E}_a$ (en discutant éventuellement sur la valeur de a).
2. Quelle est l'aire $A(a)$ de $\mathscr{E}_a$?
3. Démontrer que le périmètre $P(a)$ de $\mathscr{E}_a$ est égal à

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt.$$

4. En déduire que le quotient $P(a)/A(a)$ est une fonction décroissante de a.
5. Démontrer que

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant |x| + |y|.$$

En déduire une constante $K > 0$ telle que

$$\frac{P(a)}{A(a)} \sim \frac{K}{a}$$

lorsque a tend vers 0, ainsi que la limite de $P(a)/A(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 13.2

Soient P_1, P_2 et P_3, trois matrices de projections de rang 1 telles que

$$\forall\, i \neq j, \quad P_i P_j = 0.$$

Étant donnés trois réels distincts a, b et c, on considère la matrice

$$A = aP_1 + bP_2 + cP_3 \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R}).$$

1. Calculer A^2, A^3 puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On suppose que la matrice A est inversible. En calculant les produits AP_i, démontrer que a, b et c sont tous différents de 0.
3. Réciproquement, on suppose que a, b et c sont tous différents de 0. La matrice A est-elle nécessairement inversible ?

Exercice 13.3

On considère les deux applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = e^{2x}.$$

1. Trouver une équation différentielle linéaire, homogène, du second ordre, à coefficients constants, admettant f et g pour solutions.
2. En déduire une équation différentielle du second ordre, à coefficients constants, vérifiée par les deux fonctions suivantes.

$$\left[x \mapsto e^x + 2e^{2x} + \cos x\right]$$
$$\left[x \mapsto 2e^x - e^{2x} + \cos x\right]$$

Énoncés posés en juin 2010 (Indications)

Indication 1.1

1. L'existence de la factorisation est assurée (sans calcul) par un théorème : lequel ?

Indication 1.2

3. Les u_n sont des moyennes de f.

Indication 1.3

Donner une condition nécessaire sur la taille d'une matrice pour qu'elle soit inversible.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice triangulaire soit inversible.

Dans le cas d'une matrice qui n'est pas triangulaire, quelles sont les différentes méthodes de calcul qui permettent de prouver qu'elle est inversible ? Parmi ces méthodes, quelles sont les plus efficaces ? les moins efficaces ?

Indication 2.1

1. Peut-on déduire l'allure du graphe de $[x \mapsto f(x^2)]$ du graphe de f ?

2. Qui dit nombres entiers, dit raisonnement d'arithmétique. Si $x_0 \in \mathbb{Z}$ est une racine d'un polynôme P à coefficients entiers, alors x_0 divise le coefficient constant de P : pourquoi ?

Indication 3.1

L'excentricité d'une ellipse mesure son aplatissement. Cette propriété peut être précisée en exprimant l'excentricité d'une ellipse en fonction du rapport grand axe/petit axe mais aussi en interprétant l'excentricité comme le sinus d'un angle : lequel ?

Indication 3.3

Si une fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable en 0, alors elle est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pourquoi ? (Revoir le cours sur les accroissements finis.)

2. La dérivabilité d'une fonction est définie comme l'existence d'une limite pour son taux d'accroissement. On pourrait en donner deux autres définitions : l'une de type géométrique, l'autre avec la notion de développement limité. Préciser.

3. Si une fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et si elle est deux fois dérivable en 0, alors elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Pourquoi ? Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet en particulier un développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0. Pourquoi ? (Revoir le cours sur les formules de Taylor.)

Indication 3.4

1. Quelles sont les valeurs possibles pour une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$? Est-il facile de reconnaître une matrice de rang 0 ? de rang 1 ? de rang supérieur à 2 ?

2. L'image d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est défini comme l'ensemble des matrices colonnes $AX \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ lorsque X parcourt l'espace $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes. Les colonnes de A appartiennent à l'image de A : donner un antécédent de chacune d'elles.

Indication 4.1

1. Les racines d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ sont aussi les zéros de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $[x \mapsto P(x)]$. Quel théorème assure que l'équation $f(x) = 0$ admet *au moins* une solution sur un intervalle I ? Quel théorème assure que l'équation $f(x) = 0$ admet *exactement* une solution sur I ?

2. Que dire des racines complexes d'un polynôme à coefficients réels ?

Indication 4.2

1. Une application lipschitzienne est-elle dérivable ?

Comment caractériser les applications lipschitziennes dérivables ? (Revoir le cours sur les accroissements finis.) Parmi les fonctions usuelles, lesquelles sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$? Donner des exemples d'applications lipschitziennes sur $[0, 1]$ ou sur $[-1, 1]$. À l'aide des fonctions usuelles, donner des exemples d'applications qui ne sont pas lipschitziennes sur un segment.

2. Un développement limité à l'ordre deux suffit-il pour connaître la position d'une courbe par rapport à sa tangente ?

Indication 4.3

1. Le sous-espace $V = \text{Vect}(\boldsymbol{e}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$ est stable par u si, et seulement si, $u(\boldsymbol{e}_i) \in V$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

3. Les matrices A et $P^{-1}AP$ représentent le même endomorphisme u dans deux bases $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. Comment exprimer les vecteurs $\mathbf{f}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, en fonction des vecteurs de $\mathscr{B}_0$? Comment calculer $u(\mathbf{f}_i)$?

Indication 5.1

Que vaut la somme des racines complexes d'un polynôme de degré deux ? Que vaut leur produit ?

Indication 5.2

2. Condition nécessaire et suffisante pour que $\text{Vect}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ soit un espace vectoriel de dimension deux ?

Si u est une homothétie ($u = \lambda\, I_E$), quels sont les endomorphismes v qui commutent à u ($v \circ u = u \circ v$) ?

Indication 6.2

2. Les primitives d'une fonction impaire sont-elles paires ?

Les primitives d'une fonction paire sont-elles impaires ? (Que vaut une fonction impaire en 0 ?)

Les primitives d'une fonction périodique sont-elles périodiques ? (Penser à la notion de valeur moyenne d'une fonction périodique.)

Indication 6.3

1. L'existence et l'unicité de φ sont assurées par un théorème : lequel ? Ce théorème est au fondement du calcul matriciel : pourquoi ?

Indication 7.1

3. Il existe une formule pour calculer la distance d'un point à un hyperplan dont on connaît une équation cartésienne : laquelle ?

Mais, par définition, la distance d'un point à un hyperplan est d'abord une borne inférieure : comment prouver qu'une borne inférieure est supérieure à un réel x_0 donné ?

Indication 7.2

1. Si la suite de terme général S_n est convergente, que peut-on dire de la différence $S_{n+1} - S_n$?

Toute suite convergente est bornée. Que dire des suites divergentes ? (Penser au théorème de Bolzano-Weierstrass.)

4. La continuité assure l'existence d'une limite finie. Quelle propriété assure-t-elle l'existence d'une limite finie ou infinie ?

Indication 7.3

1. Une matrice colonne X appartient à l'image d'une matrice A lorsqu'il existe une matrice colonne X_0 telle que $X = AX_0$. Dans la situation précise de cet exercice, on peut trouver deux antécédents distincts de la matrice colonne X_1 : l'un en calculant AX_1 ; l'autre sans aucun calcul. Que peut-on déduire de ces deux antécédents ?

2. Si P est la matrice d'un projecteur, alors une matrice colonne X appartient à l'image de P si, et seulement si, $PX = X$. (Pourquoi ?)

Indication 8.1

À quelle condition le support de l'arc paramétré $\big(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)\big)$, $t \in I$, est-il le cercle unité ?

Comment Maple, qui ne peut effectuer qu'un nombre *fini* de calculs, peut-il donner l'illusion de tracer une courbe continue (qui contient un nombre infini de points) ?

Indication 8.2

3. L'inégalité typique de convexité s'écrit

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \leqslant f(\lambda_1 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n)$$

où f est une fonction convexe ; x_1, ..., x_n des points de son ensemble de définition et λ_1, ..., λ_n, des réels positifs dont la somme est égale à 1. Chercher d'abord la valeur de n, puis les valeurs des λ_i et des x_i et enfin la fonction convexe f.

Lorsque f'' est strictement positive (on dit que f est **strictement convexe**), dans quel cas l'inégalité de convexité devient-elle une égalité ?

Indication 8.3

3. Comparer des sous-espaces vectoriels, c'est chercher si l'un est inclus dans l'autre (la relation $\subset$ est une relation d'ordre sur les sous-espaces d'un espace vectoriel donné).

Si f et g sont deux applications linéaires telles que $f \circ g = 0$, que peut-on dire des sous-espaces Ker f et Im g ? Étudier aussi la réciproque.

Indication 9.1

4. Une seule des trois valeurs proposées est compatible avec la propriété de symétrie du **2.** et l'encadrement du **3.**

On peut calculer la valeur exacte de $m_{n,p}$ en cherchant une relation de récurrence entre $m_{n,p}$ et $mn + 1, p - 1$ avec une intégration par parties.

5. Cette dernière question revient à comparer deux valeurs moyennes d'une même fonction $[x \mapsto e^{-x}]$ avec deux pondérations distinctes. Expliquer. Justifier aussi comment la comparaison des deux pondérations permettrait de conclure.

Indication 9.2

3. Quelle est la taille de la matrice ${}^tXAY$? En déduire qu'elle est symétrique et exprimer sa transposée par un produit matriciel.

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice carrée. À quelle condition sur M la colonne MX est-elle nulle si, et seulement si, la colonne X est nulle ?

6. Expliquer pourquoi un produit scalaire, qui n'est pas une application linéaire, est caractérisé par son action sur une base. Et si une base est orthonormée pour deux produits scalaires φ et ψ, alors...

Indication 10.1

1. Si φ est une fonction continue et positive, alors $\int_a^b \varphi(t)\,dt$ est du signe de $(b - a)$.

Revoir l'énoncé du théorème fondamental qui exprime les primitives d'une fonction continue à l'aide d'intégrales. Revoir en particulier l'expression des dérivées des expressions suivantes.

$$\int_a^x \varphi(t)\,dt \qquad \int_x^b \varphi(t)\,dt \qquad \int_{a(x)}^{b(x)} \varphi(t)\,dt$$

3. Exprimer $e^x - 1$ sous la forme $\int_0^x \ldots$.

Indication 10.2

2. Comme f est un polynôme, la formule de Taylor donne la valeur de $f'(0)$ sans calcul.

Indication 11.1

1. Les formules de Cramer (avec la matrice des cofacteurs) donne une expression théorique de l'inverse d'une matrice. Et pour une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, c'est la méthode la plus efficace pour calculer son inverse.

3. Il faut se rendre compte que $\lambda(x)$ est solution d'une équation du premier degré, ce qui prouve son existence et son unicité.

Indication 11.2

1. Une intégrale peut toujours être interprétée comme une valeur moyenne.

Indication 11.3

Calculer l'aire du triangle passe par le calcul de sa hauteur et donc par le sinus de l'angle formé par deux côtés. Comment calculer le sinus d'un angle ?

Indication 12.1

2. Dire que les solutions d'un système de deux équations (E_1, E_2) sont aussi des solutions d'une équation (E_3) revient à dire que le système de trois équations (E_1, E_2, E_3) admet une infinité de solutions. Comment prévoir cela sans résoudre explicitement ce système de trois équations ?

Indication 12.2

4. Il faut savoir que $9 < \pi^2 < 10$. Quel encadrement de la limite de $(q_n)_{n\geqslant 1}$ peut-on déduire des questions précédentes ?

Indication 12.3

1. Comme le coefficient de y' est strictement positif, les solutions sont amorties. Autrement dit...

2. Si une équation différentielle linéaire admet deux solutions périodiques de même période, que dire de la différence de ces deux solutions ?

Indication 13.2

3. Que dire du rang de A ?

Indication 13.3

1. Quelles doivent être les racines de l'équation caractéristique d'une telle équation différentielle ?

2. Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants ?