Énoncés posés en juin 2011

Chaque année au mois de juin, se déroule un concours blanc commun aux deux classes de MPSI. Voici une sélection d'exercices qui ont été posés lors des épreuves orales de ce concours blanc. Chaque candidat dispose d'une demi-heure pour préparer sa planche et d'une demi-heure pour l'exposer.

La plupart des planches sont probablement trop longues pour être entièrement traitées en une demi-heure. Cependant, s'il faut y passer une heure entière, c'est que certains points importants du cours n'ont pas été assimilés.

Les planches posées cette année sont constituées d'un assez grand nombre de questions qui demandent souvent de savoir réaliser vite et bien un calcul peu difficile. La maîtrise de ces techniques de base est un prérequis essentiel pour *comprendre* le cours de Spé : on ne peut espérer assimiler des idées fines si on reste bloqué devant le moindre aspect technique.

Prière de signaler toutes les erreurs que vous relèverez (en mentionnant les numéros de planche, d'exercice et de question) à l'adresse suivante

`gregoire.taviot@ac-rouen.fr`

en mentionnant *[Annales MPSI]* comme objet du message.

Planche 1

Exercice 1.1

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Identifier et tracer la conique représentée par

$$x^2 + 2y^2 - x + 6y + 1 = 0.$$

Préciser son excentricité.

Exercice 1.2

Existe-t-il une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

qui soit bornée au voisinage de $+\infty$?

Exercice 1.3

1. Rappeler la définition d'un projecteur.
2. Soient E, un espace vectoriel réel de dimension 3 et $p \in L(E)$, un projecteur de rang 2. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 1.4

Résoudre l'équation différentielle

$$xy'(x) + (x^2 - 1)y(x) = x^2 - 1$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 1.5

Soit u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Calculer une base du noyau et une base de l'image de u.

Exercice 1.6

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \neq 0, \quad f(x) = \frac{x^2}{\operatorname{ch} x - 1}.$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ au voisinage de 0 ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
2. Quelle valeur donner à $f(0)$ pour prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$? Ce prolongement est-il dérivable sur $\mathbb{R}$?
3. Tracer l'allure du graphe de f au voisinage de l'origine.
4. La fonction f est-elle concave ?

Planche 2

Exercice 2.1

Soient $\mathscr{D}$, une droite du plan Π ; F, un point de Π n'appartenant pas à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$, une conique de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$.
1. Donner (sans démonstration) la forme générale de l'équation polaire de $\mathscr{C}$. Préciser l'origine du repère polaire.
2. Exprimer la distance de F à $\mathscr{D}$ en fonction du paramètre p et de l'excentricité e de cette conique.

Exercice 2.2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, on pose

$$J_n(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^n}\, dt.$$

1. Soit $x \geqslant 1$. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant J_{n+1}(x) \leqslant J_n(x)$$

2. Soit $n \geqslant 1$. Démontrer que

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad J_n(x) \geqslant \frac{e^x - e}{x^n}$$

puis que

$$\forall\, 0 < x \leqslant 1, \quad J_n(x) \leqslant \int_1^x \frac{dt}{t^n}.$$

3. Que vaut la dérivée de J_n ? Quelle est la limite de $J_n(x)$ au voisinage de $+\infty$? au voisinage de 0 ?
4. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre $J_n(x)$ et $J_{n-1}(x)$.

Exercice 2.3

Rappeler la définition d'une matrice orthogonale. Démontrer, en effectuant le moins de calculs possibles, pourquoi les matrices suivantes ne sont pas orthogonales.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.4

Exprimer les solutions paires de l'équation différentielle suivante.

$$y'' - y = 2$$

Exercice 2.5

Soit $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $(x, t) \in U$, on pose

$$f(x, t) = \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que

$$f(x,t) = o\Big(\frac{1}{t^2}\Big) \quad \text{et que} \quad f(x,t) = \mathcal{O}(e^{-t})$$

lorsque t tend vers $+\infty$. Lequel de ces deux ordres de grandeur est-il préférable ?

2. Soit $t > 0$. Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$$

et tracer l'allure du graphe de $[x \mapsto f(x,t)]$.

3. Soit $x > 0$. Calculer le développement limité à l'ordre deux au voisinage de $t = 0$ de $f(x,t)$. Interpréter graphiquement ce développement.

Planche 3

Exercice 3.1

Reconnaître la nature de la conique représentée par

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{7}{4}.$$

Préciser son excentricité et tracer l'allure de son graphe.

Exercice 3.2

Calculer les primitives de

$$f(x) = \frac{(3+\cos x)\sin x}{\cos^2 x + \cos x - 6}.$$

Exercice 3.3

Que signifie le fait que deux sous-espaces vectoriels F et G soient supplémentaires dans E ? Les sous-espaces représentés par

$$x + 2y - 3z = 0 \quad \text{et} \quad 2x - y + 2z = 0$$

sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3.4

Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$y'' + y' = \cos x$$

Existe-t-il des solutions bornées sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3.5

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

1. À l'aide d'opérations de pivot sur les colonnes, montrer que la matrice A_λ a même rang que la matrice

$$B_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1-2\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Le rang de la matrice B_λ peut-il être égal à 0 ? à 1 ?

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que B_λ soit inversible.

4. En étudiant les variations de la fonction

$$\big[t \mapsto t^3 - 3t + 1\big],$$

déterminer le nombre de réels λ tels que le rang de la matrice A_λ soit égal à 2.

Exercice 3.6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$u_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer un équivalent de $u_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer un équivalent de $u_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ainsi qu'un développement limité à l'ordre deux (c'est-à-dire à $o(x^2)$ près) au voisinage de $x = 0$.

Planche 4

Exercice 4.1

Reconnaître la nature de la conique représentée par

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = -\frac{1}{4}.$$

Préciser son excentricité et tracer l'allure de son graphe.

Exercice 4.2

Soit E, un espace euclidien. Rappeler la définition de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E. Démontrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et que

$$F \cap F^\perp = \{0_E\}.$$

Exercice 4.3

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' = y$.

2. En déduire que les fonctions de la forme

$$y(x) = \frac{ae^x + be^{-x}}{x}$$

sont les solutions de l'équation différentielle

$$xy'' + 2y' - xy = 0.$$

Exercice 4.4

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, distinct de $(0, 0, 0)$, et $u \in L(\mathbb{R}^3)$, représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

1. Donner une base de $\operatorname{Im} u$. Quel est le rang de u ?

2. Donner une base de $\operatorname{Ker} u$. Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4.5

On considère les fonctions f et F définies sur $I =]0, 1[$ par

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = \frac{1}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)}$$

et par

$$\forall\, x \in I, \quad F(x) = \int_x^1 f(t)\, dt.$$

1. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et donner sa dérivée.

2. Calculer un développement de la forme

$$f(t) = \frac{a}{t\sqrt{t}} + \frac{b}{t} + \frac{c}{\sqrt{t}} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big)$$

pour $t \in I$ voisin de 0.

3. Pour tout $x \in I$, on pose

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\ell n\, x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{6}.$$

3. a. Calculer un équivalent de G au voisinage de 0.

3. b. Démontrer que $F(x) - G(x)$ reste bornée au voisinage de $x = 0$.

3. c. En déduire un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $x = 0$, ainsi que l'allure du graphe de F.

Planche 5

Exercice 5.1

Reconnaître la nature de la conique représentée en coordonnées polaires par

$$\rho = \frac{1}{2 + \sin\theta}.$$

Préciser sa focale et tracer l'allure de son graphe.

Exercice 5.2

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, impaire, de période 2π et telle que

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad f(x) = x(\pi - x).$$

1. Tracer l'allure du graphe de f. (On vérifiera la compatibilité des hypothèses faites sur f à cette occasion.)

2. La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$? $\mathscr{C}^2$?

Exercice 5.3

Donner différentes méthodes permettant de prouver l'inversibilité d'une matrice carrée. Expliquer pourquoi les matrices suivantes ne sont pas inversibles.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 5.4

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos x.$$

Admet-elle des solutions bornées sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5.5

On considère la matrice suivante.

$$A = \alpha \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & a \\ \sqrt{2} & -1 & b \\ \sqrt{2} & -1 & c \end{bmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de (α, a, b, c), la matrice A est-elle une matrice orthogonale ? une matrice de rotation ?

2. Si A est une matrice de rotation, quel est son axe ?

Exercice 5.6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}.$$

1. Démontrer que $u_n = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. a. Calculer un développement de u_n de la forme

$$u_n = \alpha\sqrt{n} + \frac{\beta}{\sqrt{n}} + \frac{\gamma}{n\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big).$$

2. b. En déduire qu'il existe un couple (a, b) tel que

$$u_n = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big).$$

Planche 6

Exercice 6.1

Reconnaître la nature de la conique représentée par

$$x^2 - y^2 + 3x - 4y + 1 = 0.$$

Préciser son excentricité et tracer l'allure de son graphe.

Exercice 6.2

Calculer les primitives de

$$x\sqrt{1+x^2}.$$

Exercice 6.3

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 220. En déduire le pgcd de 220 et de 473.
2. Énoncer le théorème de Bézout.
3. Pour quelles valeurs de $u \in \mathbb{Z}$ l'équation

$$220x + 473y = u$$

admet-elle des solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$?

Exercice 6.4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \cos kt.$$

Calculer une expression simple de S_n et en déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (en précisant la valeur de sa limite).

Exercice 6.5

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Vérifier qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ et une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad u(x) = \varphi(x) \cdot a.$$

Le couple (a, φ) est-il unique ?
2. Démontrer qu'il existe un réel λ et une projection p tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad u(x) = \lambda \cdot p(x)$$

et que le couple (λ, p) est unique.

Exercice 6.6

1. a. Calculer un développement asymptotique de

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

à $o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ près lorsque n tend vers $+\infty$.
1. b. En déduire un équivalent simple de

$$u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{n/2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.
2. On considère la fonction f définie par

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

2. a. Calculer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.
2. b. Existe-t-il un réel $\alpha < 1$ tel que

$$f(x) = o\left(\frac{1}{(1-x)^\alpha}\right)$$

lorsque x tend vers 1 ?

Planche 7

Exercice 7.1

On considère l'arc paramétré par

$$\forall\, t \in]0, \pi[, \quad \big(x(t), y(t)\big) = \left(\frac{2}{\sin t}, \frac{\sqrt{5}\cos t}{\sin t}\right).$$

1. Démontrer que le support Γ de cet arc est contenu dans une hyperbole de centre $(0, 0)$ et d'axe focal (Ox). Quelles sont les asymptotes de cette hyperbole ?
2. Tracer l'allure de ce support en indiquant le sens de parcours.
3. Calculer l'excentricité de l'hyperbole qui contient Γ.

Exercice 7.2

Exprimer sous forme factorisée la dérivée de

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{(x^2 - 3)}.$$

En déduire le sens de variation de f.

Exercice 7.3

Étudier les asymptotes de l'arc paramétré par

$$\big(x(t), y(t)\big) = \left(\frac{t^2+1}{t}, \frac{t^2+1}{t+1}\right).$$

Exercice 7.4

On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \int_0^x (x-t) f(t)\, dt.$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et calculer sa dérivée seconde.
2. Donner le développement limité à l'ordre deux au voisinage de $x = 0$ de $f(x)$.
3. En déduire une expression simple de f.

Exercice 7.5

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\operatorname{rg} A$?

2. Soient a et b, deux réels. On pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ a & b & 3 \end{bmatrix}.$$

2. a. Condition nécessaire et suffisante pour que le rang de A soit égal à 3 ?

2. b. Condition nécessaire et suffisante pour que le rang de A soit égal à 2 ?

Exercice 7.6

1. Calculer le développement limité à $\mathcal{O}(x^4)$ près de

$$\big[\ell n(1-x)\big]^2$$

au voisinage de $x = 0$.

2. En déduire un développement asymptotique à $\mathcal{O}\big(\frac{1}{n^2}\big)$ près de

$$n^2 \, \ell n^2\Big(\frac{n}{n-1}\Big)$$

puis de

$$\sin\Big[\pi n^2 \, \ell n^2\Big(\frac{n}{n-1}\Big)\Big].$$

Planche 8

Exercice 8.1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, i, j).

Étant donné $c > 0$, on considère les deux points F et F', de coordonnées respectives $(c, 0)$ et $(-c, 0)$.

On fixe $0 < e < 1$ et on suppose que $\mathscr{C}$ est une conique de foyers F et F' et d'excentricité e.

1. Quelle est la nature de $\mathscr{C}$: ellipse, parabole, hyperbole ?

2. Donner une équation de $\mathscr{C}$ relative au repère (O, i, j).

Exercice 8.2

1. Calculer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle suivante.

$$\frac{1}{(1-X^2)(1+2X)}$$

2. Vérifier que l'expression

$$f(x) = \frac{1}{\sin x + \sin 2x}$$

a un sens sur l'intervalle $I = \big]0, \frac{\pi}{2}\big[$.

3. Exprimer les primitives de f sur I.

Exercice 8.3

Soient p et q, deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont deux fonctions de période $T > 0$, toutes deux solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

et que $f(0) = g'(0) = 1$, $f'(0) = g(0) = 0$.

1. Démontrer que la fonction $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad W'(x) + p(x)W(x) = 0.$$

En déduire que la fonction W ne s'annule jamais.

2. Démontrer que

$$\int_0^T p(t)\, dt = 0$$

puis que p est une fonction de période T.

Exercice 8.4

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on considère l'endomorphisme u représenté dans la base canonique par la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1. Qu'est-ce que la *structure euclidienne canonique* de $\mathbb{R}^3$?

2. Démontrer que $\operatorname{Im} u$ est un plan. On donnera une base et une équation cartésienne de ce plan.

3. Donner une base de $\operatorname{Ker} u$.

4. Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont-ils orthogonaux ? Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelle est la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Tracer l'allure du graphe de la fonction

$$\Big[x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\Big],$$

puis de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}.$$

(On précisera en particulier la position du graphe de g au voisinage de l'origine à l'aide d'un développement limité à l'ordre trois.)

3. Démontrer que la fonction g atteint un maximum sur $\mathbb{R}$. Comparer ce maximum avec

$$M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \big|f_n(x)\big|.$$

4. Existe-t-il une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle qui vérifie la propriété suivante ?

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant \varepsilon_n$$

Planche 9

Exercice 9.1

On considère la conique représentée dans un repère orthonormé par l'équation suivante.

$$x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$$

Reconnaître la nature de la conique et calculer les coordonnées de son centre ainsi que sa focale.

Exercice 9.2

1. Calculer un équivalent de

$$f(t) = \ell n\Big(1 + \frac{1}{t^2}\Big)$$

au voisinage de $t = 0$ et au voisinage de $t = +\infty$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer les primitives de f. (On rappelle que $f = 1 \times f$...)
3. Les primitives de f sont-elles bornées sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 9.3

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère les droites

$$\mathscr{D}_1 = A + \mathbb{R} \cdot u \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 = B + \mathbb{R} \cdot v,$$

où $u = (2, -1, 1)$; $v = (1, 2, -1)$ et A et B sont les points de coordonnées respectives $(1, 1, -2)$ et $(2, 0, 1)$.
1. Calculer une équation cartésienne du plan

$$A + \mathrm{Vect}(u, v).$$

Ce plan contient-il le point B ?
2. Le système suivant admet-il une solution $(s, t) \in \mathbb{R}^3$?

$$\begin{cases} 2s + t = 1 \\ -s + 2t = -1 \\ s - 2t = -3 \end{cases}$$

3. Calculer la distance d'un point $M \in \mathscr{D}_1$ à la droite $\mathscr{D}_2$. En quel point cette distance est-elle minimale ?

Exercice 9.4

On suppose que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une solution de l'équation différentielle suivante.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0.$$

1. Quel théorème prouve que f admet un développement limité à l'ordre deux au voisinage de $x = 0$?
2. Dans quelle mesure ce développement limité peut-il être déduit de l'équation différentielle ?
3. En supposant que $f(0) = 1$, tracer l'allure du graphe de f au voisinage de $x = 0$.

Exercice 9.5

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A ne soit pas inversible.
2. On suppose que A n'est pas inversible.
2. a. Démontrer que, dans ce cas, $\mathrm{rg}\, A = 2$.
2. b. Donner une base de Im A et une base de Ker A.

Exercice 9.6

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0 et u_1 pour que $u_n \in \mathbb{Z}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0 et u_1 pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la suite de terme général $u_n x^n$ est-elle bornée ?

Planche 10

Exercice 10.1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Représenter graphiquement la partie du plan caractérisée par

$$0 \leqslant y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant x.$$

Comment cette partie est-elle représentée en coordonnées polaires ?

Exercice 10.2

Pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f(x, t) = \frac{\mathrm{Arctan}(tx)}{1 + t^2}.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer un équivalent de $f(t, x)$ au voisinage de $t = 0$, ainsi qu'au voisinage de $t = +\infty$.
2. Démontrer l'existence d'une constante K_0 telle que

$$\forall\, (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \big|f(x, t)\big| \leqslant \frac{K_0}{1 + t^2}.$$

Étudier ensuite l'existence d'une constante K_1 telle que

$$\forall\, (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\Big| \leqslant \frac{K_1}{1 + t^2}.$$

Exercice 10.3

Tracer le support de l'arc paramétré par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \big(x(t), y(t)\big) = (1 + \cos t,\ -2 + 3 \sin t).$$

Exercice 10.4

1. Soient E, un espace vectoriel de dimension finie et u, un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un scalaire λ tel que $(u - \lambda\, I_E)$ ne soit pas inversible.
1. a. Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in E$, *non nul*, tel que

$$u(x) = \lambda x.$$

1. b. Démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u^k(x) = \lambda^k \cdot x.$$

1. c. On suppose que $u^2 = 4u - 3\,I_E$. Démontrer que $\lambda^2 = 4\lambda - 3$.

2. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. a. Trouver une relation de liaison entre A^2, A et I_3.

2. b. Condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que la matrice $(A - \lambda I_3)$ soit inversible ?

Exercice 10.5

1. Vérifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\,dt.$$

En déduire que

$$\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\int_0^1 t^n \,\ell n(1+t)\,dt = \frac{\ell n\, 2}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

3. Démontrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, 0 < a < 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^a t^n \,\ell n(1+t)\,dt \leqslant K a^n.$$

4. Soit $0 < a < 1$. Calculer un équivalent simple de

$$\int_a^1 t^n \,\ell n(1+t)\,dt$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Planche 11

Exercice 11.1

1. Soient $R_1 = (O, i, j)$ et $R_2 = (O, i', j')$, deux repères orthonormés directs du plan. On note (x, y), les coordonnées d'un point M relatives à R_1 et (X, Y), les coordonnées du même point M relatives à R_2.

1. a. Que dire de la matrice de passage P de (i, j) à (i', j') ?

1. b. Exprimer les coordonnées (X, Y) en fonction de (x, y) et des coefficients de P.

2. On considère la conique Γ représentée par

$$5x^2 + 5y^2 - 2xy - 12 = 0$$

dans le repère R_1.

2. a. Démontrer que, pour un choix convenable de R_2, la conique Γ est représentée par une équation de la forme

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma = 0$$

dans le repère R_2.

2. b. En déduire la nature de Γ, ainsi que son excentricité.

Exercice 11.2

Soit $x > 0$. Calculer un équivalent de

$$v_n(x) = x\,\ell n\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) - \ell n\Big(1 + \frac{x}{n+1}\Big)$$

lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

Exercice 11.3

Soient f et g, deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x^2}\frac{\cos x}{2 + \sin x}.$$

Démontrer que

$$\lim_{x \to \infty} \big[f(x) - g(x)\big] = 0.$$

Exercice 11.4

On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $(A - \lambda I_3)$ soit inversible.

2. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$ pour $\lambda = 0$; pour $\lambda = 1$ et pour $\lambda = 2$.

Exercice 11.5

Pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, on pose

$$f(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}.$$

1. Quelle valeur donner à $f(0)$ pour que f soit continue sur $]-\pi, \pi[$?

2. La condition précédente étant remplie, démontrer que la fonction f est dérivable sur $]-\pi, \pi[$. Comment est placé le graphe de f par rapport à la tangente au point d'abscisse $t = 0$?

3. Calculer un équivalent de $f(t)$ au voisinage de $t = \pi$.

4. Tracer l'allure du graphe de f.

Planche 12

Exercice 12.1

Déterminer la nature et les sommets de la conique représentée par l'équation suivante.

$$x^2 + 4y^2 + 2x + 4y - 2 = 0$$

Exercice 12.2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t > 0$, on pose

$$f_n(t) = \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^{3/2} + t^n}.$$

1. a. Calculer un équivalent de $f_n(t)$ pour t voisin de 0 ; pour t voisin de $+\infty$.
1. b. Calculer la limite de $f_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ l'expression

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

est-elle négligeable devant $\frac{1}{n^\alpha}$?
3. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on pose

$$\varphi(x, t) = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t^2} \sin(xt).$$

3. a. Calculer un équivalent de $\varphi(x, t)$ lorsque t tend vers 0.
3. b. Démontrer que

$$\varphi(x, t) = o(e^{-t}) \quad \text{mais que} \quad \varphi(x, t) \neq o(e^{-2t})$$

lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 12.3

On doit calculer la matrice de la rotation vectorielle d'angle $\pi/5$ autour de la droite dirigée par le vecteur

$$u = (1, -1, 1).$$

1. Donner une méthode pour calculer cette matrice.
2. Comment vérifier que la matrice obtenue avec cette méthode est la bonne ?
3. Sachant que

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

calculer $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{\pi}{5}$.

Exercice 12.4

Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$y'' - y' - 6y = -6x - 1$$

Exercice 12.5

On note (e_1, e_2, e_3, e_4), la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on considère l'endomorphisme u défini par

$$\begin{aligned} u(e_1) &= -e_2 + e_3 - e_4, \\ u(e_2) &= e_1 - e_2 + e_3, \\ u(e_3) &= e_1 + e_4, \\ u(e_4) &= e_2 - e_3 + e_4. \end{aligned}$$

1. Énoncer le théorème qui démontre que l'endomorphisme u est bien défini.
2. Quel est le rang de u ?
3. Reconnaître l'endomorphisme $u \circ u$. Que peut-on en déduire sur $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$?

Exercice 12.6

Tracer l'allure du graphe de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \sqrt{t} e^{-t}.$$