Énoncés posés en juin 2012

Chaque année au mois de juin, se déroule un concours blanc commun aux deux classes de MPSI. Voici une sélection d'exercices qui ont été posés lors des épreuves orales de ce concours blanc. Chaque candidat dispose d'une demi-heure pour préparer sa planche et d'une demi-heure pour l'exposer.

La plupart des planches sont probablement trop longues pour être entièrement traitées en une demi-heure. Cependant, s'il faut y passer une heure entière, c'est que certains points importants du cours n'ont pas été assimilés.

Les planches posées cette année sont constituées d'un assez grand nombre de questions qui demandent souvent de savoir réaliser vite et bien un calcul peu difficile. La maîtrise de ces techniques de base est un prérequis essentiel pour *comprendre* le cours de Spé : on ne peut espérer assimiler des idées fines si on reste bloqué devant le moindre aspect technique.

Prière de signaler toutes les erreurs que vous relèverez (en mentionnant les numéros de planche, d'exercice et de question) à l'adresse suivante

`gregoire.taviot@ac-rouen.fr`

en mentionnant *[Annales MPSI]* comme objet du message.

Planche 1

Exercice 1.1

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f = [x \mapsto \ell n(\operatorname{th} x)] .$$

2. Calculer un équivalent simple de $f(x)$ pour x voisin de 0. En déduire que

$$f(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

lorsque x tend vers 0.

3. Calculer un équivalent simple de $f(x)$ pour x voisin de $+\infty$. En déduire qu'il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\forall\, x \geqslant \alpha, \quad \left|f(x)\right| \leqslant e^{-x}.$$

Exercice 1.2

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, représenté dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$ par la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang des matrices $A+2I_2$; $A-I_2$ et $A+5I_2$.

2. On considère les vecteurs $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (2,1)$. Calculer $f(u_1)$ et $f(u_2)$.

3. Démontrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et expliciter la matrice $P^{-1}AP$.

Exercice 1.3

Quel est le plus grand intervalle contenant 1 sur lequel la fonction

$$f = \left[x \mapsto \frac{1}{\sin x \sin 2x}\right]$$

admet des primitives ? Expliciter ces primitives au moyen du changement de variable $u = \sin x$.

Exercice 1.4

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Calculer la matrice relative à la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équation

$$2x + y - z = 0.$$

Planche 2

Exercice 2.1

1. Sur quel intervalle la fonction Arccos est-elle définie ? Sur quel intervalle est-elle continue ? Sur quel intervalle est-elle dérivable ? La fonction Arccos admet-elle un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 1 ?

2. Soient $0 < \varepsilon < x \leqslant 1$. Démontrer que

$$\text{Arccos}(1-x) - \text{Arccos}(1-\varepsilon) = \int_\varepsilon^x \frac{du}{\sqrt{2-u}\,\sqrt{u}}.$$

En déduire que

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}} \leqslant \text{Arccos}(1-x) \leqslant \sqrt{2x}.$$

3. Donner un équivalent simple de $\text{Arccos}(1-x)$ pour x voisin de 0 et traduire graphiquement cet équivalent.

Exercice 2.2

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

et on note f, l'endomorphisme représenté par la matrice M dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$.

1. Démontrer qu'il existe une droite vectorielle D telle que

$$E = \text{Ker}\, f \oplus D$$

et qu'il existe une base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de E telle que $u_1 \in \text{Ker}\, f$, $u_2 \in \text{Ker}\, f$ et $u_3 \in D$.

2. Les sous-espaces $\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont-ils supplémentaires dans E ? En déduire que la matrice de f relative à la base $\mathscr{B}$ est de la forme suivante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Avec le moins de calculs possibles, démontrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.3

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Tracer la conique Γ représentée dans le repère canonique par l'équation

$$x^2 + 2x + 4y^2 - 8y + 1 = 0.$$

Calculer son excentricité et la pente des tangentes à Γ aux points d'intersection de Γ avec l'axe des ordonnées.

Exercice 2.4

Étudier le support de l'arc paramétré par

$$\big(x(t), y(t)\big) = (t\cos t - \sin t,\ 1 + \cos t)$$

au voisinage du point $M_0 = \big(x(0), y(0)\big)$.

Planche 3

Exercice 3.1

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\text{Arccos}\, x$. Interpréter graphiquement chaque terme de ce développement limité.

2. Calculer le développement de

$$u_n = \text{Arccos}\,\frac{1}{n} - \text{Arccos}\,\frac{1}{n^2}$$

à $o(1/n^2)$ près.

Exercice 3.2

Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{C}$ la suite de terme général

$$u_n = x^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

est-elle bornée ?

Exercice 3.3

Soit f, un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe une base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de E telle que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Condition sur α et β pour que $\text{rg}\, f = 2$?

2. Démontrer que l'image de f et le noyau de f sont supplémentaires dans E.

3. Démontrer que $\text{Im}\, f^n = \text{Im}\, f$ et $\text{Ker}\, f^n = \text{Ker}\, f$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.4

Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$y'' + 6y' + 9y = \text{ch}(2x) + \cos x$$

Exercice 3.5

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère la conique d'équation

$$2x^2 - y^2 + 12x + 4y + 13 = 0.$$

Reconnaître la natude de cette conique. Préciser son centre de symétrie et son excentricité.

Planche 4

Exercice 4.1

Calculer un équivalent de

$$v_n = \cos\Big(\pi n^4 \,\ell n^3 \,\frac{n}{n-1}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{C}$ la suite de terme général $v_n x^n$ est-elle bornée ?

Exercice 4.2

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f = \left[x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\right].$$

2. Comment choisir $f(0)$ pour que la fonction f soit continue sur $[-1, 1]$?

3. Déterminer la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 0$, ainsi que la position du graphe de f par rapport à cette tangente.

4. La fonction f est-elle dérivable en $x = 1$?

Exercice 4.3

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A.

2. Vérifier que les matrices

$$P_4 = \frac{1}{2}A - I_3 \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{-1}{2}A + 2I_3$$

sont des matrices de projection. Préciser leur rang.

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, expliciter deux réels a_n et b_n tels que le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-2)(X-4)$ soit égal à $a_n X + b_n$.

4. En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 2^n P_2 + 4^n P_4.$$

Exercice 4.4

Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

Planche 5

Exercice 5.1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n!}{n^n}.$$

1. Démontrer que

$$u_n = o\Big(\frac{1}{n^p}\Big)$$

pour tout entier $p \geqslant 2$.

2. Calculer la limite de u_{n+1}/u_n. En déduire qu'il existe un rang n_0 tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$$

puis que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_{n_0+k} \leqslant \frac{u_{n_0}}{2^k}.$$

Exercice 5.2

Pour $k \in \mathbb{R}^*$, on considère la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & -k & -k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de A_k ?

2. Calculer $(A_k + I_3)^2$. Démontrer que

$$\mathrm{Ker}(A_k + I_3) = \mathrm{Im}(A_k + I_3)^2$$

et que

$$\mathrm{Im}(A_k + I_3) = \mathrm{Ker}(A_k + I_3)^2.$$

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^n = (X+1)^3 Q_n + \frac{n(n-1)}{2}(X+1)^2 + n(X+1) + 1.$$

En déduire la matrice A^n.

Exercice 5.3

Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on pose

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

1. Quelle valeur donner à $f(0, 0)$ pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}^2$?

2. Calculer alors les valeurs de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \text{et de} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Exercice 5.4

Soit $k > 0$. Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$xy' + (k+1)y = \sin x$$

On cherchera une expression intégrale des solutions et on calculera explicitement cette intégrale pour $k = 1$ et $k = 2$.

Planche 6

Exercice 6.1

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f = \left[x \mapsto \frac{1}{\ell n(1+x)} - \frac{1}{x}\right].$$

2. Vérifier que f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0. Interpréter graphiquement ce développement.

Exercice 6.2

On considère la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(A)$ et ${}^tAA$. Que peut-on en déduire ?

2. Démontrer qu'il existe un vecteur colonne X_0 non nul tel que $AX_0 = X_0$.

3. En déduire que le rang de $(A - {}^tA)$ est égal à 2, puis un moyen simple d'expliciter un vecteur colonne $X_0 \neq 0$ tel que $AX_0 = X_0$.

Exercice 6.3

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - \frac{x}{x^2-1}y = 2x$$

sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$.

Exercice 6.4

Étudier les branches infinies de l'arc paramétré par

$$\big(x(t), y(t)\big) = \Big(\frac{t-1}{t}, \frac{t^2-t}{t-1}\Big).$$

Exercice 6.5

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, t > 0,\ \forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(tx, ty, tz) = t^a f(x, y, z).$$

1. Que dire de f si $a = 0$?

2. Démontrer que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = af(x, y, z)$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Planche 7

Exercice 7.1

1. Calculer un développement asymptotique de

$$\sqrt{n^2+n+1}$$

à $o(1/n)$ près lorsque n tend vers $+\infty$.

2. En déduire un équivalent de

$$\cos\big(\pi\sqrt{n^2+n+1}\big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7.2

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels réels λ la matrice $(A - \lambda I_3)$ est-elle inversible ?

2. Calculer le rang de $(A - I_3)$ et celui de $(A - I_3)^2$.

3. Démontrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et, en faisant le moins de calculs possible, expliciter la matrice $P^{-1}AP$.

Exercice 7.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction de période 2π telle que

$$\forall\, 0 \leqslant x < 2\pi, \quad f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

1. Que vaut $f(2\pi)$? La fonction f est-elle continue en 2π ?

2. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-10, 10]$.

3. Calculer l'intégrale

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.4

Soient f, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et A, la matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et qu'il existe un réel λ tel que

$${}^tA\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Démontrer que le plan $[ax + by + cz = 0]$ est stable par f.

Exercice 7.5

On considère l'arc paramétré par

$$\big(x(t), y(t)\big) = \Big(\frac{t^2}{1+2t-3t^2}, \ell n(1+t^2)\Big).$$

1. Cet arc a-t-il des points doubles ?

2. Étudier les branches infinies.

Planche 8

Exercice 8.1

1. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'expression

$$u_n = \left(\frac{1}{\ell n\, n}\right)^{\ell n\, n}$$

est-elle définie ?

2. Démontrer que

$$u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{C}$ la suite de terme général $u_n x^n$ est-elle bornée ?

Exercice 8.2

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice suivante.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & -1 \\ 1 & 2a-1 & 1 \\ 2 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - a\,I)$ et compléter cette base pour obtenir une base de $\operatorname{Ker}(f - a\,I)^2$.

2. On pose $u_3 = (1, 1, 0)$. Calculer $f(u_3)$ et $f^2(u_3)$. En déduire une base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.3

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période 2π telle que

$$\forall\, x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = \cos\frac{x}{2}.$$

1. Tracer l'allure du graphe de f sur l'intervalle $[0, 10]$. La fonction f est-elle continue en π ? Est-elle dérivable en π ?

2. Calculer l'intégrale

$$b_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Calculer l'intégrale

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8.4

1. Étudier les variations de la fonction

$$f = \left[x \mapsto e^{-x^2}\right]$$

et tracer l'allure de son graphe.

2. Pourquoi la fonction f admet-elle des primitives sur $\mathbb{R}$? Vérifier que les primitives de la fonction

$$g = \left[x \mapsto e^{-|x|}\right]$$

sont bornées sur $\mathbb{R}$. En déduire que les primitives de f sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Planche 9

Exercice 9.1

On pose

$$f_\alpha(x) = (x + \sin x)^\alpha - x^\alpha.$$

1. Démontrer que, pour tout $\alpha > 0$, la fonction f_α est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Calculer un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0 ; lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 9.2

1. On considère deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+1} = 2\beta_n \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} = \alpha_n + \beta_n.$$

Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \beta_{n+2} = \beta_{n+1} + 2\beta_n$$

et en déduire l'expression de α_n et de β_n en fonction de α_0, β_0 et n.

2. On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expliciter deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2.$$

Exercice 9.3

On considère l'arc paramétré par

$$M(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \big(\cos^2 t + \ell n \sin t,\ \sin t \cos t\big)$$

pour tout $t \in]0, \pi[$.

1. Comparer les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$. Que peut-on en déduire ?

2. Étudier le support de l'arc lorsque le paramètre t est voisin de $\pi/2$.

3. Étudier le support de l'arc lorsque le paramètre t est voisin de 0.

4. Quels sont les points stationnaires de cet arc ? (On étudiera d'abord l'équation $y'(t) = 0$.)

5. Pour quelles valeurs de $t \in]0, \pi[$ la norme du vecteur vitesse $\big(x'(t), y'(t)\big)$ est-elle égale à

$$\frac{1 - 2\cos^2 t}{\sin t} \quad ?$$

Exercice 9.4

L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La base canonique est notée

$$\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

et on considère le plan H engendré par les vecteurs

$$a = e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad b = e_1 - e_4.$$

1. Construire une base orthonormée du plan H.
2. Calculer la matrice relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$ de la projection orthogonale sur H.

Planche 10

Exercice 10.1

Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ l'expression

$$f_x(t) = \ell n\, t\ \ell n(1 - t^x)$$

est-elle définie pour tout $t \in]0, 1[$? Calculer, en fonction de x, un équivalent de $f_x(t)$ pour t voisin de 0 ; pour t voisin de 1.

Exercice 10.2

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui est représenté dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ par la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que $\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $u_1 = (1, -1, 1)$.
2. Exhiber un antécédent u_2 de u_1 par f.
3. Calculer $\det(f - \lambda I)$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $(f - \lambda I)$ est-il inversible ?
4. On pose $u_3 = (5, 11, -3)$. Calculer $f(u_3)$ et en déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Démontrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$ et en déduire qu'il n'existe pas de base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.3

Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{x}.$$

1. Vérifier que

$$\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad f\big(f(x)\big) > 1$$

pour tout $x > 0$.
2. Démontrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$. En déduire qu'il existe un, et un seul, réel $\ell > 1$ tel que $f(\ell) = \ell$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 10.4

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ell n\, t}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et expliciter sa dérivée.
2. Démontrer que

$$\forall\, x > 1, \quad f(x) = \int_{\ell n\, x}^{2\,\ell n\, x} \frac{\exp t}{t}\, dt.$$

En déduire que

$$\forall\, x > 1, \quad x\,\ell n\, 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2\,\ell n\, 2.$$

Quelle est la limite de f au voisinage de 1 ? au voisinage de $+\infty$?

Planche 11

Exercice 11.1

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}.$$

1. Comment choisir $f(0)$ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$? Dans ce cas, la fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
2. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque, notée g, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. On admet que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de g.

Exercice 11.2

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base d'un espace vectoriel E. On pose

$$e_0 = \sum_{k=1}^{n} e_k$$

et

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad u_k = e_0 - e_k.$$

Démontrer que $\mathscr{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E et donner les matrices de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

Exercice 11.3

1. Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$(1+u^2)g'(u) + 2ug(u) = u$$

2. On suppose que z est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$$

et qu'il existe une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, (x,y) \in \Omega, \quad z(x,y) = f\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Déterminer z.

Exercice 11.4

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Que valent $\det A$ et $\det B$?
2. Calculer A^2 et B^2.
3. Existe-t-il une matrice inversible P telle que

$$B = P^{-1}AP \quad ?$$

Exercice 11.5

Calculer un équivalent de

$$u_n = \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)^{\sqrt{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Planche 12

Exercice 12.1

1. Justifier l'existence de

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, dt$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. En intégrant par parties l'expression $(n+1)u_n$, démontrer que

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{C}$ la suite $(u_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

Exercice 12.2

Démontrer que le graphe de la fonction

$$f = \left[x \mapsto \frac{x^2-1}{2x} - x^2 \ln \frac{1+x}{x}\right]$$

admet une asymptote au voisinage de $+\infty$. Étudier la position du graphe de f par rapport à son asymptote.

Exercice 12.3

On considère l'espace vectoriel E engendré par les trois fonctions suivantes :

$$e_0 = \big[x \mapsto e^{2x}\big], \quad e_1 = \big[x \mapsto xe^{2x}\big], \quad e_2 = \big[x \mapsto x^2e^{2x}\big].$$

1. Démontrer que la dimension de E est égale à 3 et que la dérivation $[f \mapsto f']$ est un endomorphisme de E.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la matrice A^n où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(On justifiera l'application de la formule du binôme.)
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\frac{d^n[x^2e^{2x}]}{dx^n} = P_n(x)e^{2x}.$$

Expliciter P_n à l'aide de la matrice A^n.

Exercice 12.4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$$

1. Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0).$$

2. Comparer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Que peut-on en déduire ?

Exercice 12.5

On considère l'équation différentielle suivante.

$$xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{E}$$

1. Calculer les solutions de (E) sur l'intervalle $]0, 1[$. Existe-t-il une solution bornée au voisinage de 0 ?

2. Démontrer que l'équation (E) admet une, et une seule, solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-1, 1[$.