Concours blanc MPSI – Juin 2016

Planche 1

Exercice 1.1

Simplifier

$$x = \left(\frac{2^2 \cdot 10^{-5}}{(20 \cdot 5^2)^3}\right)^{-2} \cdot \frac{((2^3)^4)^{-2} \cdot 5^3}{25^{-1} \cdot 1\,250}.$$

Donner une valeur approchée de x de la forme 10^n, sachant que $\ell n\, 2 \approx 0,693$ et $\ell n\, 5 \approx 1,609$. Préciser s'il s'agit d'une valeur approchée par excés ou par défaut.

Exercice 1.2

On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n^3 + 3n + 1}{4n^4 + n^2 + 1}.$$

1. Calculer un équivalent de u_n. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

2. On pose $v_0 = 0$ et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad v_n = u_n - \frac{1}{2n}.$$

La série $\sum v_n$ est-elle convergente ?

3. On *admet* que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ell n\, n$$

lorsque n tend vers $+\infty$. Démontrer qu'il existe un réel A tel que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\ell n\, n + A + o(1).$$

Quel est le signe de A ?

Exercice 1.3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ -14 & 28 & -20 \\ -18 & 36 & -26 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier l'existence d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ tel que A soit la matrice de u relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$.

2. Justifier l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$.

3. Calculer les produits matriciels suivants.

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En déduire la matrice $P^{-1}AP$.

4. Donner un vecteur directeur de $\operatorname{Ker} u$.

5. Quel est le rang de u ? Donner une équation cartésienne de $\operatorname{Im} u$.

Exercice 1.4

Pour tout $t > 0$, on pose

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}}.$$

1. Simplifier l'expression

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

2. Étudier les variations de $F(x)$ pour $x > 0$. Préciser les limites éventuelles de $F(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Tracer l'allure du graphe de F.

Planche 2

Exercice 2.1

Soit $a \in \mathbb{C}$. Simplifier la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^3 + a^3 - (aX^2 + a^2X)}{(X - a)(X^2 + 2aX + a^2)}.$$

Exercice 2.2

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sqrt{n^2 + n} - n.$$

1. Calculer un équivalent simple de u_n (équivalent qu'on notera v_n), puis un équivalent simple de $u_n - v_n$.

2. a. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

2. b. La série $\sum (u_n - v_n)$ est-elle convergente ?

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n x^n$?

Exercice 2.3

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 6 \\ 6 & 7 & -6 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer qu'il existe un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$ est la matrice A.

2. Calculer le déterminant de u. Que peut-on en déduire ?
3. Démontrer que le sous-espace $\operatorname{Ker}(u - I)$ est un plan. Donner une équation cartésienne de ce plan (relativement à la base canonique).
4. Calculer le produit

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire que les sous-espaces $\operatorname{Ker}(u - I)$ et $\operatorname{Ker}(u + 2I)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
5. Démontrer que A^2 est une combinaison linéaire de A et de I_3.

Exercice 2.4

Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, qui vérifie l'équation différentielle :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 4y''(t) + 8y'(t) + 3y(t) = 0$$

et telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.
1. Démontrer que, quand t tend vers $+\infty$, le produit $t^2 f(t)$ tend vers 0 mais que $f(t)$ n'est n'est pas négligeable devant e^{-t}.
2. Tracer l'allure du graphe de f au voisinage de $t = 0$. On précisera la tangente au graphe de f, ainsi que la position (locale) du graphe par rapport à cette tangente.

Planche 3

Exercice 3.1

Simplifier

$$\frac{(-42^2)(-70)^2 \cdot 14^3}{(-49^2)(-50)^4}.$$

Exercice 3.2

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n \in \{0, 1\}.$$

1. Démontrer que la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n x^n$$

est définie au moins pour $x \in [0, 1[$ et que

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \quad 0 \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

2. On suppose que la somme $S(x)$ est définie (dans $\mathbb{R}$) pour $x = 1$.
2. a. Que peut-on en déduire sur la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. b. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}_+$ la somme $S(x)$ est-elle définie ?
3. On suppose que la somme $S(x)$ n'est pas définie (dans $\mathbb{R}$) pour $x = 1$.
3. a. Démontrer que la fonction $S = [x \mapsto S(x)]$ est croissante sur $[0, 1[$.
3. b. Soit $N \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe une fonction polynomiale f telle que $f(1) = N$ et que

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant S(x).$$

3. c. Conclure.

Exercice 3.3

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -2 & -4 & 4 \\ -4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer l'existence d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique.
2. Quel est le rang de u ? Donner une base de $\operatorname{Im} u$.
3. Donner une équation cartésienne et une base de $\operatorname{Ker} u$.
4. Vérifier que $2u$ est un projecteur.
5. En déduire que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.4

Tracer l'allure du graphe de la fonction

$$f = \left[x \mapsto |x^2 - 2x - 3|\right]$$

et calculer

$$\int_{-6}^{4} f(x)\, dx.$$

Planche 4

Exercice 4.1

Soit $a \in \mathbb{C}$. Simplifier la fraction rationnelle

$$F = \frac{X}{X-a} + \frac{X}{X+a} + \frac{2X^2}{X^2+a^2} + \frac{4a^2X^2}{X^4-a^4}.$$

Exercice 4.2

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. Démontrer que $(2I_3 - A)$ est une matrice de projection. Donner une base de son image et une représentation

cartésienne de son noyau.

3. En déduire une base du noyau de $(A - I_3)$. On pourra remarquer que

$$A - I_3 = I_3 - (2I_3 - A).$$

4. Démontrer que la matrice $(2I_3 - A)$ est semblable aux matrices suivantes.

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice suivante.

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Pourquoi la matrice A n'est-elle semblable à aucune des matrices suivantes ?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.3

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

1. Démontrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une, et une seule, solution x_n et que, pour tout entier $n \geqslant 2$, cette solution vérifie

$$0 < x_n < 1.$$

2. Comparer $P_n(x_n)$, $P_{n+1}(x_n)$ et $P_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers un réel ℓ compris entre 0 et x_2.

3. On pose

$$\forall\, x \in [0,1[\,, \quad f(x) = \frac{2x-1}{1-x}.$$

3. a. Démontrer que

$$\forall\, x \in [0, x_2], \quad 0 \leqslant f(x) - P_n(x) \leqslant \frac{x_2^{n+1}}{1-x_2}.$$

3. b. En déduire que $\ell = 1/2$.

Planche 5

Exercice 5.1

Simplifier l'expression

$$x = \sqrt{7-\sqrt{13}} - \sqrt{7+\sqrt{13}}.$$

(On commencera par calculer x^2.)

Exercice 5.2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sqrt{n+2}.$$

1. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

2. On suppose que $x > 1$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n x^n$?

3. On suppose que $0 < x < 1$.

3. a. Justifier l'existence d'un réel y tel que $x < y < 1$.

3. b. Comparer (avec $\mathcal{O}$, o ou $\sim$) les suites de termes généraux $u_n x^n$ et y^n.

3. c. En déduire la nature de la série $\sum u_n x^n$.

Exercice 5.3

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 8 \\ 11 & 14 & -12 \\ 7 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

et le vecteur $x_0 = (3, 0, 2)$.

1. Calculer les vecteurs $x_1 = u(x_0)$ et $x_2 = u^2(x_0)$.

2. Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (x_0, x_1, x_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$? Comment obtenir la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique ? (On ne demande pas d'expliciter cette seconde matrice.)

3. On *admet* que $u^3(x_0) = -6x_0 + 7x_1$.

3. a. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. b. Calculer $\det u$ et $\operatorname{tr} u$.

4. Expliquer pourquoi la matrice A n'est semblable à aucune des matrices suivantes.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.4

Justifier l'existence de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1+e^x}{(x+e^x)^3}\,dx$$

et calculer sa valeur.

Planche 6

Exercice 6.1

Comparer les réels

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad y = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}.$$

Exercice 6.2

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n \in \{0, 1\}.$$

1. Démontrer que la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n x^n$$

est définie pour tout $x \in [0, 1[$.

2. On suppose que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

2. a. Que dire de la différence

$$S(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad ?$$

2. b. En déduire que

$$S(x) \sim \frac{1}{1-x}$$

lorsque x tend vers 1.

Exercice 6.3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 6 \\ -10 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On pourra noter u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique.

1. a. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de passage de la base canonique à cette base $\mathscr{B}_1$.

1. b. Exprimer les vecteurs $u(\varepsilon_1)$, $u(\varepsilon_2)$ et $u(\varepsilon_3)$ en fonction des vecteurs de la base $\mathscr{B}_1$.

1. c. En déduire que

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(-1, 1, 2).$$

2. Calculer $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$.

3. Donner une base de $\mathrm{Im}\, u$.

4. On pose $x_0 = (0, -3, 2)$.

4. a. Calculer $x_1 = u(x_0)$ et $x_2 = u^2(x_0)$.

4. b. Vérifier que $\mathscr{B}_2 = (x_0, x_1, x_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. c. On connaît sans aucun calcul supplémentaire *huit* des neuf coefficients de la matrice de u relative à la base $\mathscr{B}_2$: lesquels ?

Exercice 6.4

Pour tout $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^{\ell n\, t}}{t(1+t^2)}\, dt.$$

Étudier les variations de la fonction F ainsi définie et démontrer en particulier qu'elle admet des limites finies aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

Planche 7

Exercice 7.1

Simplifier

$$x = \frac{(-2)^5(-25)^3 \cdot 7^8}{(-10^4) \cdot 35^5}.$$

En utilisant la formule du binôme, trouver l'entier le plus proche de x. Préciser s'il s'agit d'une valeur approchée par excés ou par défaut.

Exercice 7.2

Pour tout entier $n \geqslant 5$, on pose

$$u_n = \ell n \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n-4}}.$$

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$u_n = \frac{a}{\sqrt{n}} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

2. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 7.3

On considère l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

1. Donner un vecteur directeur de $F = \mathrm{Ker}(s - I)$ et une équation cartésienne de $G = \mathrm{Ker}(s + I)$.

2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Expliciter une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$.

4. Interpréter géométriquement l'endomorphisme s.

5. Calculer la matrice (relative à la base canonique) de la projection p sur F parallèlement à G.

Exercice 7.4

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 + x\ln x}.$$

1. Démontrer que l'équation

$$x + \ln x = 0$$

admet une, et une seule, solution. On notera W_1, cette solution.

2. Quel est l'ensemble de définition de f ? La fonction f est-elle continue ?

3. Étudier le signe de f.

4. Pour quelles valeurs de x l'intégrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

a-t-elle un sens ?

5. Calculer explicitement $F(x)$.

Planche 8

Exercice 8.1

Simplifier

$$x = \frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}}.$$

Exercice 8.2

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -7 & -4 & 11 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs

$$\varepsilon_1 = (-1, 3, 1), \quad \varepsilon_2 = (-2, 5, 1), \quad \varepsilon_3 = (2, -4, -1).$$

1. Démontrer que la famille $\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Préciser la matrice de passage, qu'on notera P, de la base canonique à cette nouvelle base $\mathscr{B}_1$.

2. Exprimer $u(\varepsilon_1)$, $u(\varepsilon_2)$ et $u(\varepsilon_3)$ en fonction des vecteurs de $\mathscr{B}_1$. On pourra calculer $u(\varepsilon_3) - \varepsilon_3$.

3. En déduire la matrice $P^{-1}AP$ (*sans* calculer P^{-1}).

4. On considère les vecteurs

$$v_0 = (-1, 4, 1), \quad v_1 = u(v_0), \quad v_2 = u^2(v_0).$$

4. a. Démontrer que $\mathscr{B}_1 = (v_0, v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On notera Q, la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base $\mathscr{B}_1$.

4. b. Vérifier que

$$u(v_2) = 2 \cdot v_0 - 5 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2$$

et en déduire (*sans* calculer Q^{-1}) la matrice $Q^{-1}AQ$.

5. Démontrer que la famille (I, u, u^2) est une famille libre dans $L(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 8.3

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{\pi/4} e^{-x^2/\cos^2 t}\,dt.$$

1. Démontrer que les intégrales $f(x)$ et $g(x)$ sont bien définies pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

2. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

3. On *admet* que

$$\forall\, u \geqslant 0, \quad 1 - u \leqslant e^{-u} \leqslant 1 - u + \frac{u^2}{2}.$$

3. a. Représenter graphiquement cet encadrement.

3. b. En déduire que

$$g(x) = \frac{\pi}{4} - x^2 + o(x^2)$$

puis que

$$\big[f(x)\big]^2 + g(x) = \frac{\pi}{4} + o(x^2)$$

lorsque x tend vers 0. Représenter graphiquement cette dernière propriété.

Planche 9

Exercice 9.1

Simplifier

$$x = \frac{(-2)^{-3}(-3)^2(-6^4) \cdot 4^{-5}}{(-18)^{-3}(-27^2) \cdot 12^3}.$$

Donner un ordre de grandeur de x.

Exercice 9.2

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$a_n = \frac{\sin n}{n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\cos n}{n}.$$

On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente.

1. Exprimer $\sin(n+1)$ en fonction de $\sin n$ et $\cos n$. En déduire que la série $\sum b_n$ est absolument convergente.

2. Vérifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |\sin n| + |\cos n| \geqslant 1.$$

3. La série $\sum a_n$ est-elle absolument convergente ?

Exercice 9.3

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 11 \\ 9 & -1 & -11 \\ -9 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

et on note u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à cette matrice.

1. a. Calculer A^2.

1. b. Vérifier que les matrices colonnes suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -23 \\ 27 \\ -27 \end{pmatrix}$$

forment une famille liée dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. c. En déduire une relation de liaison entre I_3, A et A^2 dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

2. On suppose que la matrice A est semblable à la matrice

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. a. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1) \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = u(\varepsilon_2).$$

2. b. Démontrer que, quel que soit le vecteur ε_1, la famille

$$\big(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), u^2(\varepsilon_1)\big)$$

est liée et conclure.

2. c. On *admet* que la matrice A est semblable à la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comparer $\operatorname{tr} A$ et $\operatorname{tr} F$ d'une part, $\det A$ et $\det F$ d'autre part.

Exercice 9.4

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(1 - x - 2x^2).$$

2. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de $f(x)$ au voisinage de $x = 0$. Tracer l'allure du graphe de f au voisinage de l'origine.

3. Calculer (si elle existe) la limite de $\sqrt{1+x}f(x)$ lorsque x tend vers -1.

Planche 10

Exercice 10.1

Soit $a \in \mathbb{C}$. Simplifier la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{X(X+a)} + \frac{2a}{X(X^2 - a^2)} - \frac{X+a}{aX(X-a)}.$$

Exercice 10.2

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -2 & 5 & -2 \\ -8 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

et on note u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

1. Démontrer que le sous-espace F représenté par

$$[x - y + z = 0]$$

et la droite G dirigée par $\varepsilon_1 = (2, -1, -4)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2. Donner une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de F et démontrer que F est stable par u, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in F, \quad u(x) \in F.$$

3. Vérifier que G est stable par u.

4. Démontrer que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de u dans cette base $\mathscr{B}$?

5. Calculer $\det A$. La matrice A est-elle inversible ?

6. a. Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme

$$P_0 = aX^2 + bX + c$$

tel que $P_0(0) = 0$ et $P_0(1) = P_0(3) = 1$.

6. b. En raisonnant dans la base $\mathscr{B}$, reconnaître l'endomorphisme

$$P_0(u) = au^2 + bu + c\,I.$$

6. c. Expliciter deux réels α et β tels que

$$A^{-1} = \alpha A + \beta I_3.$$

Exercice 10.3

On considère la fonction f définie par

$$\forall\, x \leqslant 0, \quad f(x) = \frac{a + bx}{e^x + 1}$$

et par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{c + dx}{e^x - 1}.$$

1. Donner une condition sur a, b, c et d pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$. On précisera s'il s'agit d'une condition nécessaire ou d'une condition suffisante.

2. Donner une condition sur a, b, c et d pour que la fonction f soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Peut-on choisir les réels a, b, c et d de telle manière que la fonction f soit de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

4. Tracer l'allure du graphe de f au voisinage de l'origine pour

$$a = 4, \quad b = c = 0, \quad d = 2.$$

Exercice 10.4

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 + x)e^{-2x}.$$

1. Démontrer que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

2. Expliciter les primitives de f.

3. Démontrer que toutes les primitives de f admettent une limite finie au voisinage de $+\infty$.

4. La fonction f admet-elle une primitive bornée au voisinage de $-\infty$?

Planche 11

Exercice 11.1

On pose

$$x = -3 \cdot 10^7, \quad y = 2 \cdot 10^{12}, \quad z = 6 \cdot 10^{-15}.$$

Simplifier

$$A = \frac{(x^2y^{-2})^{-5}}{(z^{-2}y^3)^{-2}}, \quad B = \frac{x^2 - z^{-1}}{y - x^2}$$

puis comparer AB et A/B.

2. On considère trois fonctions x, y et z de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que ces fonctions vérifient le système différentiel suivant.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 6y(t) + 4z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = -6x(t) + 12y(t) - 11z(t) \end{cases} \qquad (S)$$

2. a. Démontrer que x, y et z sont en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. b. Donner une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que le système différentiel (S) puisse s'écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

2. c. Calculer les produits matriciels suivants.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} A \qquad \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \end{pmatrix} A \qquad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} A$$

2. d. On définit trois fonctions u, v, w en posant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} u(t) &= 2x(t) - 3y(t) + 2z(t), \\ v(t) &= 3x(t) - 6y(t) + 4z(t), \\ w(t) &= 2x(t) - 4y(t) + 3z(t). \end{aligned}$$

Vérifier que

$$u'(t) = -u(t), \quad v'(t) = -2v(t), \quad w'(t) = -3w(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire qu'il existe trois constantes K_1, K_2 et K_3 telles que

$$u(t) = K_1e^{-t}, \quad v(t) = K_2e^{-2t}, \quad w(t) = K_3e^{-3t}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. e. Exprimer les applications x, y et z en fonction de u, v et w. En déduire que $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ tendent toutes les trois vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 11.2

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$$

où x est un paramètre réel fixé.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de x.

2. En déduire que la série $\sum u_n$ est divergente pour tout $x > 1$.

3. Démontrer l'existence d'une série convergente $\sum v_n$ telle que

$$\forall n \geqslant 2, \ \forall x \in [0, 1], \quad |u_n| \leqslant v_n.$$

Que peut-on en déduire sur la série $\sum u_n$?

Exercice 11.3

1. Démontrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible. (On ne demande pas de calculer explicitement son inverse.)

Planche 12

Exercice 12.1

On considère le polynôme

$$\begin{aligned} P = (b-c)(X-a)&\left[(X+a)^2 + (b+c)^2\right] \\ + (c-a)(X-b)&\left[(X+b)^2 + (c+a)^2\right] \\ + (a-b)(X-c)&\left[(X+c)^2 + (a+b)^2\right] \end{aligned}$$

où a, b et c sont trois nombres complexes.

1. Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$. Que peut-on en déduire si a, b et c sont deux à deux distincts ?

2. Calculer l'expression développée de P.

Exercice 12.2

On étudie l'ensemble E des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt.$$

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Soit $f \in E$. Démontrer que sa dérivée f' appartient aussi à E.
3. Soit $f \in E$, une fonction polynomiale.
3. a. Vérifier que le degré de f ne peut pas être égal à 1.
3. b. Quelles sont les fonctions polynomiales qui appartiennent à E ?

Exercice 12.3

Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on pose

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit $M(a_1, b_1)M(a_2, b_2)$.
2. Expliciter une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Expliciter une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ telle que

$$A^2 = M(-2, 1).$$

4. Soit $B = M(-2, 1)$. On suppose qu'il existe une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = B$. On note respectivement u et v, les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ représentés par les matrices A et B dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$.
4. a. La matrice B est-elle inversible ?
4. b. Expliciter une base de $\operatorname{Ker}(u + 2I)$.
4. c. Démontrer que $u \circ v = v \circ u$.
4. d. En déduire que $v(e_1) \in \operatorname{Ker}(u + 2I)$.
4. e. En déduire qu'il existe un réel λ tel que

$$v^2(e_1) = \lambda^2 \cdot e_1$$

et conclure.

Planche 13

Exercice 13.1

Soit $a \in \mathbb{C}$. Simplifier la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^2 + 4aX + 4a^2 - 4}{X^2 - 4a^2 - 2(X - 2a)}.$$

Exercice 13.2

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2}.$$

Simplifier l'expression

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)^2$$

et, si elle existe, calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13.3

On pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1 + x^2 + t^2}.$$

1. Démontrer que l'intégrale $F(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction F est paire et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. Que vaut $F(0)$?
4. Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{1 + x^2}.$$

Que peut-on en déduire ?
5. Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant F(0) - F(x) \leqslant x^2.$$

En déduire que F est dérivable en $x = 0$ et que $F'(0) = 0$.
6. Tracer l'allure du graphe de F.

Exercice 13.4

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'inverse de A (par un algorithme de type pivot de Gauss).
2. Donner une base du noyau et une base de l'image de la matrice $(A - I_3)$.

Planche 14

Exercice 14.1

Simplifier

$$x = \frac{\dfrac{(-3)^2(-2)^3(-6^2)}{(-12)^4(-18)^{-2}}}{\dfrac{4^{-3}(-3)^{-2} \cdot 12}{9^3}}.$$

Donner une valeur approchée de x de la forme 10^n, sachant que $\ell n\, 2 \approx 0,693$, $\ell n\, 3 \approx 1,099$ et $\ell n\, 5 \approx 1,609$. Préciser s'il s'agit d'une valeur approchée par excès ou par défaut.

Exercice 14.2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall\, x < 0, \quad f(x) = \frac{\ell n(1 - x)}{2 - x}$$

et par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{\ell n(1 + x)}{a + bx}.$$

1. Comment prolonger f en une fonction continue en 0 ?
2. On suppose que f est continue en 0.
2. a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de 0.
2. b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. a. Est-elle de classe $\mathscr{C}^2$?
3. b. Tracer l'allure du graphe de f au voisinage de l'origine.

Exercice 14.3

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 2+\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{pmatrix}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice $M(\alpha)$ soit inversible.
2. Calculer l'inverse de $M(1)$.

Exercice 14.4

Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{5 - 3\sin t}\,dt$$

et en déduire un encadrement de l'intégrale

$$J = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 t}{5 - 3\sin t}\,dt.$$

Planche 15

Exercice 15.1

Soit $a \in \mathbb{C}$. Simplifier la fraction rationnelle

$$F = \frac{2X}{X+a} + \frac{3a}{X-a} + \frac{X^2+3a^2}{X^2-a^2}.$$

Exercice 15.2

On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{\ell n\, x}{x}$$

et une suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ telle que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 < u_n < e \quad \text{et} \quad g(u_n) = \frac{1}{n}.$$

1. Démontrer que la fonction g réalise une bijection de $]0, e[$ sur un intervalle I qu'on précisera.
2. Démontrer que la bijection réciproque $f : I \to]0, e[$ de g admet un développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge. Quelle est sa limite ?
4. Vérifier que

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o(1/n^2)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 15.3

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -3 & -6 & 3 \\ -3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

et le sous-espace vectoriel F représenté par l'équation cartésienne

$$[2x - y + 3z = 0].$$

1. Calculer une base du noyau de f.
2. Calculer une équation cartésienne de $\operatorname{Im} f$.
3. Calculer une base de F.
4. Démontrer que l'image de F par f, c'est-à-dire l'ensemble F' défini par

$$F' = \big\{f(u),\ u \in F\big\},$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déduire de ce qui précède une base de F'.

Planche 16

Exercice 16.1

Simplifier

$$x = \frac{-9^2(-4)^2 \cdot 36^{-2}}{-24^3}.$$

Donner une valeur approchée de x.

Exercice 16.2

Soit $a \in \mathbb{C}$. Simplifier la fraction rationnelle

$$F = \frac{X-a}{X+a} - \frac{X^2-a^2}{(X+a)^2}.$$

Exercice 16.3

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{n^2+n-2}{3n^2+3}.$$

1. Démontrer que

$$\frac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$$

pour tout entier n assez grand.
2. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}_+$ la série $\sum u_n^n x^n$ est-elle convergente ?

Exercice 16.4

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{\cos\sqrt{x}}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f ?
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathscr{D}_f$? Est-elle dérivable sur $\mathscr{D}_f$?
3. Démontrer que le graphe de f admet une tangente au point d'abscisse $x = 0$. Tracer le graphe de f et cette tangente.

Exercice 16.5

1. Soit P, un polynôme de degré n. Quel est le degré du polynôme

$$Q = P(X) - P(X-1) \quad ?$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On *suppose* qu'il existe un polynôme P_k tel que

$$P_k(0) = 0 \quad \text{et que} \quad P_k(X+1) - P_k(X) = X^k.$$

2. a. Démontrer que $\deg P_k = k+1$.
2. b. Démontrer que P_k est divisible par $X^2 + X$.
3. En étudiant l'image de l'application

$$[P \mapsto P(X) - P(X-1)],$$

démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, polynôme P_k tel que

$$P_k(0) = 0 \quad \text{et que} \quad P_k(X+1) - P_k(X) = X^k.$$

Expliciter P_3.

Planche 17

Exercice 17.1

Soit $a \in \mathbb{C}$. Simplifier la fraction rationnelle

$$F = \frac{\dfrac{X^2 - 2aX + a^2}{X^2 - a^2}}{\dfrac{X-a}{X+a}}.$$

Exercice 17.2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. a. Démontrer que, si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
1. b. Établir la réciproque.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}.$$

2. a. Démontrer que la série $\sum v_n$ est convergente.
2. b. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.
2. c. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?

Exercice 17.3

Soient $P : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ et $Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, deux fonctions polynomiales. On suppose que $\deg P = 3$ et on pose

$$\forall\, x \leqslant 0, \quad f(x) = P(x) \quad \text{et} \quad \forall\, x \geqslant 0, \quad f(x) = Q(x).$$

1. À quelle condition la fonction f est-elle bien définie ?
On supposera que cette condition est satisfaite.
2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur le polynôme Q ?
3. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur le polynôme Q ?

Exercice 17.4

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice diagonale :

$$A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On suppose que les coefficients diagonaux de A sont deux à deux distincts :

$$\forall\, j \neq k, \quad \lambda_j \neq \lambda_k.$$

1. Soient μ_1, ..., μ_n, des nombres complexes. Démontrer qu'il existe une, et une seule, famille complexe $(a_0, \dots, a_{n-1})$ telle que

$$\mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = a_0 I_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^k.$$

2. Soit $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
2. a. Expliciter les coefficients des matrices AB et BA.
2. b. On suppose que $AB = BA$. Que peut-on en déduire sur B ?

Planche 18

Exercice 18.1

Soit $a \in \mathbb{C}$. Simplifier la fraction rationnelle

$$F = \frac{\dfrac{X-a}{X+a} - \dfrac{X+a}{X-a}}{1 - \dfrac{X+a}{X-a}}.$$

Exercice 18.2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall\, \theta \in \,]0, \pi]\,, \quad R_n(\theta) = \frac{\sin\theta \cdot \cos^n\theta}{1-\cos\theta}.$$

1. Démontrer que la fonction R_n ne peut pas être prolongée en une fonction continue sur $[0, \pi]$.
2. Démontrer que

$$M_n = \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} \left|\sin\theta \cdot \cos^n\theta\right|$$

existe.
3. Calculer M_n.
4. En déduire la limite de nM_n. La série $\sum M_n$ est-elle convergente ?

Exercice 18.3

Démontrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse (en utilisant l'algorithme du pivot).

Exercice 18.4

On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ et on pose

$$\forall\, f, g \in E, \quad \langle\, f \,|\, g\,\rangle = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\, dt.$$

1. Démontrer que $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Démontrer que l'ensemble

$$V = \{g \in E \,:\, g(0) = g(1) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?
3. Démontrer que l'ensemble

$$W = \{h \in E \,:\, h'' = h\}$$

est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?
4. Démontrer que V et W sont orthogonaux.
5. Démontrer que V et W sont supplémentaires dans E.

Planche 19

Exercice 19.1

Résoudre l'équation suivante.

$$10^{-5} + 10^{-1} + 10^{-4} = 10^{-5} \cdot x$$

Exercice 19.2

Soit $a \in \mathbb{C}$. Simplifier la fraction rationnelle

$$F = \frac{\dfrac{X-a}{X+a} + 2 + \dfrac{X+a}{X-a}}{1 + \dfrac{X+a}{X-a}}.$$

Exercice 19.3

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose

$$u_n = \tan\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{n}\Big).$$

1. Démontrer que la suite (u_n) tend vers 1.
2. Étudier la limite de u_n^n.

Exercice 19.4

On pose

$$F(x) = \int_0^x \cos t \cdot \ell n(1+\cos t)\, dt.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de F ?
2. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$, impaire et croissante.
3. Calculer un développement limité de F à l'ordre deux au voisinage de $x = 0$.
4. Calculer un développement limité de F à l'ordre trois au voisinage de $x = \pi/2$.
5. Expliciter la valeur de $F(x)$ au moyen d'une intégration par parties. En déduire la limite de $F(x)$ au voisinage de π.
6. Tracer l'allure du graphe de F.

Exercice 19.5

L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère l'endomorphisme s représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. La base canonique est-elle orthonormée ?
2. Quel est le rang de s ? Donner une base orthonormée de $\operatorname{Im} s$.
3. Donner une base orthonormée de $\operatorname{Ker} s$.
4. Démontrer que $\operatorname{Ker} s$ et $\operatorname{Im} s$ sont orthogonaux.
5. Comparer $\operatorname{Im} s$ et $\operatorname{Ker}(s - I)$. En déduire une interprétation géométrique de s.

Planche 20

Exercice 20.1

Simplifier les expressions

$$A = \frac{3+\sqrt{5}}{7+\sqrt{5}} - \frac{3-\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad B = \frac{1-\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}} - \frac{1+\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}.$$

En déduire A/B.

Exercice 20.2

On note a_1, a_2 et a_3, les racines du polynôme

$$P_0 = X^3 + X^2 + 1$$

et on étudie le système

$$\begin{cases} x + a_1 y + a_1^2 z = a_1^4 \\ x + a_2 y + a_2^2 z = a_2^4 \\ x + a_3 y + a_3^2 z = a_3^4 \end{cases} \qquad (S)$$

1. Les scalaires a_1, a_2, a_3 sont-ils tous réels ?
2. Expliquer comment la division euclidienne de X^4 par P_0 permet de trouver une solution particulière de (S). Expliciter cette solution particulière.
3. Démontrer que cette solution particulière est la seule solution possible.

Exercice 20.3

1. a. Démontrer que la série $\sum 2^{-p}$ est convergente.
1. b. En déduire que la suite de terme général

$$x_n = \prod_{p=0}^{n} \Big(1 + \frac{1}{2^p}\Big)$$

converge vers une limite strictement positive.
2. Soit $\sum u_n$, une série de terme général positif. On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et on suppose que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad S_{2n} \leqslant \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \cdot S_n.$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 20.4

Pour tout $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ell n\, t}{1+t^2}\, dt.$$

1. Justifier que l'intégrale $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$ et que la fonction F ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Étudier le sens de variation de F.
3. Comparer $F(x)$ et $F(1/x)$.
4. Soit $0 < x < 1$.
4. a. Démontrer que

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_1^x \ell n\, t\, dt.$$

4. b. En déduire que F tend vers une limite $\ell \in [0, 1]$ au voisinage de 0.
5. Tracer l'allure du graphe de F.

Planche 21

Exercice 21.1

On considère le polynôme

$$P = a^2(b - X) + b^2(X - a) + (a - b)X^2$$

où a et b sont deux réels distincts.
1. Démontrer que P est divisible par $(X - a)(X - b)$.
2. On suppose que a, b, c sont trois *entiers* distincts. Démontrer que $P(c)$ est divisible par $(a - b)(b - c)(c - a)$. Quelle est la valeur du quotient ?

Exercice 21.2

Soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.
1. Vérifier que $\operatorname{Ker}(f - 2I)$ et $\operatorname{Ker}(f - 4I)$ sont deux droites vectorielles. On donnera un vecteur directeur de chacune d'elles.
2. Vérifier que $\operatorname{Ker}[(f - 2I)^2]$ est un plan et donner une équation cartésienne de ce plan.
3. Démontrer que $\operatorname{Ker}(f - 4I)$ et $\operatorname{Ker}(f - 2I)^2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. On considère trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n - c_n \\ b_{n+1} = -a_n + 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 2b_n + 2c_n \end{cases}.$$

4. a. On suppose que a_0, b_0 et c_0 sont des entiers. Démontrer que a_n, b_n et c_n sont des entiers pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. b. On suppose que $a_0 = 0$ et $b_0 = c_0 = 1$. Calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 21.3

Soit f_0, une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt.$$

1. Démontrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad \big|f_0(x)\big| \leqslant A.$$

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant A\frac{x^n}{n!}.$$

3. En déduire que la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

est bien définie pour tout $x \in [0, 1]$ et que la fonction S ainsi définie est bornée sur $[0, 1]$.

Planche 22

Exercice 22.1

Pour tout réel $x > 0$ et tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,dt.$$

1. On suppose que le réel x est fixé.
1. a. Calculer les limites de $n^3 f_n(x)$ et de $3^n f_n(x)$.
1. b. En déduire que la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

est bien définie pour tout $x > 0$.
2. Démontrer que

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, n \geqslant 1, \quad F_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) \leqslant F_n(x).$$

En déduire que la série $\sum F_n(x)$ converge pour tout $x > 0$.
3. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{x_n} e^{-\sqrt{t}}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(1)$$

quelle que soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tende vers $+\infty$.
4. Démontrer que

$$\forall\, 0 < x < y, \quad 0 \leqslant S(y) \leqslant S(x).$$

Que signifie cette propriété ?
5. Soit $x > 0$.
5. a. Démontrer pour tout $N \geqslant 1$ que

$$\sum_{n=1}^{N} F_n(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{Nx^2} e^{-\sqrt{u}}\,du.$$

5. b. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(1).$$

6. Démontrer que $S(x) = \mathcal{O}(1/x^2)$ au voisinage de $+\infty$ et qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$S(x) \sim \frac{A}{x^2}$$

au voisinage de 0.
7. Tracer l'allure du graphe de S.

Exercice 22.2

On étudie l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.
1. Calculer A^{-1}.
2. Démontrer que l'ensemble F des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$2x + y + 5z = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Préciser sa dimension et donner une base de F.
3. On note F', l'image de F par u.

$$F' = \big\{f(x, y, z),\ (x, y, z) \in F\big\}$$

3. a. Expliquer pourquoi F' est un plan vectoriel.
3. b. Donner une base de F'.
3. c. Calculer une équation cartésienne de F'.

Concours blanc MPSI – Juin 2016 (Solutions)

Solution 1.1
$x = 2^{-7} \cdot 5^{29} \approx 10^{18}$

Solution 1.2
3. Manifestement, $u_n < 1/2n$, donc $v_n < 0$ et donc $A < 0$ (en tant que somme des v_n).

Solution 1.3
3. $P^{-1}AP = \text{Diag}(0, 1, -2)$
4. $\text{Ker}\, u = \mathbb{R} \cdot (2, 1, 0)$
5. $\text{Im}\, u = [2x - 3y + 2z = 0]$

Solution 1.4
1. $F(x) = 2(1/e - e^{-\sqrt{x}})$

Solution 2.3
2. $\det u = -2$
3. $\text{Ker}(A - I_3) = [x + y - z = 0]$
5. $\mu_A = X^2 + X - 2$

Solution 2.4
2. D'après l'équation différentielle, $f''(0) = -3/4$, donc le graphe de f est localement sous sa tangente.

Solution 3.1
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^{-6} \cdot 7^3$

Solution 3.4
En considérant les intervalles $[-6, -1]$, $[-1, 3]$ et $[3, 4]$, on trouve $I = 314/3$.

Solution 4.2
2. $\text{Im}\, A = \mathbb{R} \cdot (1, 3, -2)$, $\text{Ker}\, A = [y + 2z = 0]$
3. Pour toute projection p,
$$\text{Im}\, p = \text{Ker}(I - p).$$

Solution 5.1
$x = -\sqrt{2}$

Solution 5.3
1. $x_1 = (-5, 9, 7)$, $x_2 = (19, -13, -3)$

Solution 5.4
$$I = \frac{e(2+e)}{2(1+e)^2}$$

Solution 6.1
$x = y = \sqrt{6} + \sqrt{5}$.

Solution 6.3
4. a. $x_1 = (3, 1, 2)$, $x_2 = (3, -9, 8)$
4. c.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \det(u) \\ 1 & 0 & \star \\ 0 & 1 & \text{tr}(u) \end{pmatrix}$$

Solution 7.1
$x = -2 \cdot 5^{-3} \cdot 7^3 \approx -5,4$

Solution 7.2
2.
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{2n} + \frac{1}{3n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Solution 7.3
1. $\text{Ker}(s - I) = \mathbb{R} \cdot (0, 3, -1)$, $\text{Im}(s + I) = [x - z = 0]$.
5. Comme s est une symétrie, une figure montre que
$$p = \frac{I + s}{2}$$
et sa matrice dans la base canonique est donc
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 7.4
5. $F(x) = \ln(x + \ln x)$

Solution 8.1
$x = 2/3$

Solution 8.2
3.
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
4. a.
$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution 9.1
$x = 2^{-12} \cdot 3^3 \approx 10^{-3}(28/4) = 7 \cdot 10^{-3}$ et à la calculatrice : $x \approx 6,6 \cdot 10^{-3}$.

Solution 9.3
1. a.
$$A^2 = \begin{pmatrix} -23 & 9 & 33 \\ 27 & -5 & -33 \\ -27 & 9 & 37 \end{pmatrix}$$
1. c. $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$

Solution 9.4
1. La fonction f est définie sur $]-1, 1/2[$.
2. Pour x voisin de 0,
$$f(x) = x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3 + o(x^3).$$
3. $f(x) = \ln(1 + x) + \ln(1 - 2x)$

Solution 10.2
4. $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \text{Diag}(1, 3, 3)$
5. $\det A = 9$
6. a. $P_0 = \frac{-1}{3}X^2 + \frac{4}{3}X$
6. c. $A^{-1} = -1/3 A + 4/3 I_3$

Solution 10.3

1. CNS : $c = 0$ et $d = a/2$

2. CNS : $c = 0$, $d = a/2$ et $b = 0$

3. Si $h < 0$, alors

$$f(h) = \frac{a}{2} - \frac{ax}{4} + \frac{ax^3}{48} + o(x^3)$$

tandis que si $h > 0$, alors

$$f(h) = \frac{a}{2} - \frac{ax}{4} + \frac{ax^2}{24} + o(x^2).$$

Il faudrait que f soit identiquement nulle pour être de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$!

Solution 10.4

2. À une constante additive près, les primitives de f sont égales à

$$-\frac{(x+1)^2}{2}e^{-2x}.$$

Solution 11.1

$$A = \frac{2^{194}5^{182}}{3^{14}} \approx 8 \cdot 10^{178}, \quad B = \frac{-2^2 5^2 11}{3 \cdot 449} \approx -1.$$

Comme $|B| < 1$ et que $B < 0$, alors $AB > A/B$.

Solution 11.3

2. e. Comme P est inversible,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}.$$

Solution 12.1

1. $P(a) = P(b) = P(c) = 0$, donc P est divisible par $(X-a)$, par $(X-b)$ et par $(X-c)$. Or $\deg P \leqslant 3$ et le coefficient de X^3 est nul ! Si a, b et c sont deux à deux distincts, alors $P = 0$.

2. On traite seulement le cas où a, b et c ne sont pas deux à deux distincts : un calcul direct fait l'affaire.

Pour $b \neq c$, on peut aussi remarquer que les coefficients de P sont des fonctions *continues* de a, nulles pour $a \neq b$ et $a \neq c$. Elles sont donc nulles pour *tout* a.

Solution 12.2

3. b. Si f est une solution polynomiale de degré supérieur à 2, l'une de ses dérivées est une solution polynomiale de degré 1 : c'est impossible. Les solutions polynomiales sont donc les fonctions constantes.

Solution 13.2

$$u_n = 4 - \frac{8}{n^2} + \frac{12}{n^4} - \frac{8}{n^6} + \frac{2}{n^8}$$

Solution 13.4

1.

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot (0,1,1)$$
$$\mathrm{Im}(A - I_3) = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$$

Solution 14.1

$x = 2^3 \cdot 3^{11} \approx 10^6$

Solution 14.2

1. Il faut que $f(0)$ soit égal à la limite à gauche de f en $x = 0$, c'est-à-dire $f(0) = 0$. Si $a = 0$, cette condition nécessaire n'est pas suffisante !

2. a. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de 0 si, et seulement si, $a = -2$.

2. b. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $a = -2$ et $b \leqslant 0$ (sinon le dénominateur s'annulerait sur $]0, +\infty[$).

3. a. Au voisinage de 0,

$$\frac{\ell n(1-x)}{2-x} = \frac{-x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\frac{\ell n(1+x)}{-2+bx} = \frac{-x}{2} + \frac{(1-b)x^2}{4} + o(x^2).$$

Il faudrait donc que $b = 3$ pour que $f''(0+) = f''(0-)$ et dans ce cas, la fonction f ne serait pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution 14.3

2.

$$M(1)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Solution 14.4

$$0 \leqslant J \leqslant 2I = \frac{2}{3}\ell n \frac{5}{2}$$

Solution 15.3

1. $\mathrm{Ker}\, f = \mathbb{R} \cdot (1,-1,-1)$

2. $\mathrm{Im}\, f = [x + 3y - z = 0]$

4. Comme Ker f rencontre F, l'image de F par f est une droite.

Le sous-espace F est engendré par $(1,-1,-1)$, qui appartient à Ker f, et par $(1,2,0)$, donc F' est la droite dirigée par

$$f(1,2,0) = 3 \cdot (8,-5,-7).$$

Solution 16.1

$2^{-9} \cdot 3^{-3} \approx (500 \cdot 30)^{-1} \approx 7 \cdot 10^{-5}$

Solution 16.4

3. Pour x voisin de 0,

$$f(x) = 1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{96} + o(x^2)$$

Solution 18.2

3.

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-n/2} \sim \frac{e^{-1}}{\sqrt{n}}$$

Solution 18.3

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 19.1

$x = 10\,011$

Solution 19.3

2. Comme
$$u_n = 1 - \frac{a^2}{n^2} + \mathcal{O}(1/n^3),$$
la suite de terme général u_n^n tend vers 1.

Solution 19.4

5. $F(x) = \sin x \cdot \ell n(1+\cos x) + x - \sin x$ tend vers π au voisinage de π.

Solution 20.1
$$A = \frac{2\sqrt{5}}{11}, \quad B = \frac{-10\sqrt{5}}{11}, \quad \frac{A}{B} = \frac{-1}{5}$$

Solution 20.2

2. Le reste de la division euclidienne de X^4 par P_0 est égal à $1 - X + X^2$, donc $(x, y, z) = (1, -1, 1)$ convient.

Solution 21.1

2. Comme $\deg P = 2$, il existe un scalaire α tel que
$$P = \alpha\,(X-a)(X-b)$$
et il est clair que le coefficient dominant de P est $(a-b)$. En particulier,
$$P(c) = (a-b)(c-a)(c-b) = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

Solution 21.2

1. $\mathrm{Ker}(f - 2I) = \mathbb{R}\cdot(1,0,1)$, $\mathrm{Ker}(f-4I) = \mathbb{R}\cdot(0,1,1)$.
2. $\mathrm{Ker}(f-2I)^2 = [x - y - z = 0]$
4. b. $a_n = 0$, $b_n = c_n = 4^n$

Solution 22.2

1.
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. c.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$
donc $F' = [5x - 3y - 3z = 0]$.