CONCOURS BLANC MPSI – JUIN 2018

Planche 1

Exercice 1.1

1. Calculer un équivalent simple de

$$u_n = \ln \frac{n}{n^2+1}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Soit x, un réel strictement positif. Quelle est la nature de la série $\sum u_n x^n$?

Exercice 1.2

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -12 \\ -3 & 7 & 12 \\ 3 & -6 & -11 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Quelle est l'image du vecteur

$$e_1 = (1, -1, 1)$$

par u ?

2. Calculer le déterminant de A. La matrice A est-elle inversible ?

3. a. Démontrer que le sous-espace $\operatorname{Ker}(u - I)$ est un plan. Donner une équation cartésienne et une base (e_2, e_3) de ce plan.

3. b. Démontrer que la famille

$$\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. c. Quelle est la matrice de u relative à la base $\mathscr{B}$?

Exercice 1.3

Soit f, la solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = 0$$

telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

1. Calculer l'expression de $f(t)$.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $t = 0$ de $f(t)$. En déduire l'allure du graphe de f au voisinage de $t = 0$.

3. Étudier le sens de variation de f, ainsi que le comportement de f au voisinage de $\pm\infty$.

Exercice 1.4

Soient X et Y, deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et qui suivent la loi uniforme sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On pose $S = X + Y$.

1. Calculer l'espérance de X et celle de Y.

2. Quelles sont les valeurs possibles pour S ? Quelles sont les valeurs les plus probables pour S ? les moins probables ?

3. Quelle est l'espérance de S ?

Planche 2

Exercice 2.1

1. Quelle est la forme générale des solutions de l'équation différentielle suivante ?

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 8x(t) = 0$$

2. Démontrer que cette équation admet une, et une seule, solution f telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$.

3. Quel est le comportement de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$?

4. Démontrer que $e^{-2t} f(t)$ atteint un maximum. En déduire le comportement de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 2.2

Soit x, un réel strictement positif. Étudier la nature de la série

$$\sum \sin \frac{x^n}{1 + x^n}$$

en fonction de x.

Exercice 2.3

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A.

2. Calculer le déterminant de A.

3. Calculer une base du noyau de u.

4. Démontrer que $\operatorname{Im} u$ est le plan d'équation

$$[x - 3y - 5z = 0]$$

et donner une base de $\operatorname{Im} u$.

5. a. Démontrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

5. b. Calculer la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur $\operatorname{Ker} u$ relativement à $\operatorname{Im} u$.

Exercice 2.4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_1^x \frac{\sin(x+t)}{1+t^2}\, dt.$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

Planche 3

Exercice 3.1

Soit f, la solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - x(t) = 0$$

telle que $f(0) = 5$ et $f'(0) = 1$.

1. Calculer l'expression de f.

2. Étudier les variations de f.

3. Tracer l'allure du graphe de f.

4. a. Démontrer que l'équation

$$f(t) = 10$$

possède une unique solution $\alpha > 0$.

4. b. Écrire un programme en langage python qui permette de calculer à 10^{-2} près une valeur approchée de α.

4. c. On suppose connus deux réels $a < \alpha < b$ tels que

$$f(a) \approx 9{,}933 \quad \text{et} \quad f(b) \approx 10{,}020.$$

En posant

$$c = \frac{[10 - f(b)]a + [f(a) - 10]b}{f(b) - f(a)},$$

on constate que $f(c) = 9{,}999\,912$. Expliquer.

Exercice 3.2

On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$$

pour tout $x > 0$ et

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

pour tout $x > 0$ pour lequel cette expression a un sens.

1. Comparer $u_n(x)$ à $\frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.

2. Comparer $u_n(x)$ à a^n pour $0 < a < 1$.

3. Quelle est la nature de la série $\sum u_n(x)$?

4. Démontrer que

$$S(x) \geqslant \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

En déduire que $S(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 3.3

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2. Que remarque-t-on ?

2. Démontrer que le rang de A est égal à 2 et calculer une équation cartésienne de Im A.

3. Calculer une base de Ker A.

4. Les sous-espaces Ker A et Im A sont-ils supplémentaires ?

Planche 4

Exercice 4.1

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

qui représente l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer le déterminant de A.

2. La matrice A est-elle orthogonale ?

3. Démontrer que u est une symétrie. Cette symétrie est-elle une symétrie orthogonale ?

4. Démontrer que le sous-espace $\mathrm{Ker}(u - I)$ est le plan d'équation

$$[x - 2z = 0].$$

Calculer une base orthonormée de ce plan.

Exercice 4.2

1. Calculer l'expression de la fonction f qui vérifie l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0$$

et telle que $f(0) = 3$ et $f'(0) = -2$.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $t = 0$ de $f(t)$. En déduire l'allure du graphe de f au voisinage de l'origine.

3. Étudier le comportement de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

4. Démontrer que le produit $e^t f(t)$ est borné sur $\mathbb{R}$ et qu'il atteint ses bornes.

Exercice 4.3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{1 + n^2}{1 + n + n^2}.$$

1. Calculer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. En déduire la nature de la série $\sum u_n x^n$ en fonction de $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 4.4

On pose

$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t}(1 + t^3)}.$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Étudier le sens de variation et le signe de f.

2. Démontrer que

$$\forall\, x > 1, \quad f(x) \leqslant \frac{2}{5}\Big(1 - \frac{1}{x^5}\Big)$$

puis que f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.

3. Démontrer que

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad f(x) \geqslant 2(x-1)$$

puis que f tend vers une limite finie au voisinage de 0.

4. Tracer l'allure du graphe de f.

5. a. Démontrer qu'il existe deux réels

$$a < 0 < b$$

tels que f soit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]a, b[$.

5. b. Démontrer que la bijection réciproque, qu'on notera g, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$.

5. c. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Planche 5

Exercice 5.1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{n \cos n}{n^3 + 3n + 1}.$$

1. Quelle est la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

Exercice 5.2

On étudie l'équation différentielle suivante.

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad t(t+3)x'(t) - 3(t+1)x(t) = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. On suppose que l'équation (E) possède une solution polynomiale f.

1. a. Expliquer pourquoi il est légitime de chercher l'expression de f sous la forme

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{d-1}t^{d-1} + t^d.$$

1. b. Démontrer que $d = 3$.

1. c. Vérifier que (E) possède une solution polynomiale de degré 3.

2. a. Décomposer la fraction

$$\frac{X+1}{X(X+3)}$$

en éléments simples.

2. b. En déduire l'expression générale des solutions de (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. c. En déduire enfin l'expresion de l'unique solution f de (E) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 1$.

Exercice 5.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quels que soient les polynômes P et Q dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P \,|\, Q \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} P(1/i)Q(1/i) \sin \frac{1}{i}.$$

Démontrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 5.4

On considère l'endomorphisme u représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -18 & -28 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et les vecteurs suivants.

$$\varepsilon_1 = (2, -1, 1)$$
$$\varepsilon_2 = (2, 2, -1)$$
$$\varepsilon_3 = (3, -1, 1)$$

1. Calculer une équation cartésienne du plan

$$P = \text{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

2. Démontrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Calculer les vecteurs $u(\varepsilon_1)$, $u(\varepsilon_2)$ et $u(\varepsilon_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, puis exprimer ces vecteurs en fonction de ε_1, ε_2 et ε_3.

4. Donner une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Planche 6

Exercice 6.1

On note f, la solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 0$$

telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$.

1. Calculer $f(t)$.

2. a. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. b. La bijection réciproque g est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

2. c. Calculer le développement limité à l'ordre 1 de g au voisinage de 1.

Exercice 6.2

L'espace $E = \mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère les vecteurs

$$e_1 = (1, 1, -1, 1)$$
$$e_2 = (2, 1, -2, 2)$$
$$e_3 = (1, 2, -3, 1)$$

et le sous-espace $H = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.

1. Démontrer que H est un hyperplan de E et calculer une équation cartésienne de H.

2. En déduire une base orthogonale de H, puis compléter cette famille pour obtenir une base orthogonale de E.

3. Calculer la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur H.

4. Calculer la distance du vecteur $a = (1, 1, 1, 1)$ au sous-espace H.

Exercice 6.3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + k/n}}.$$

Démontrer que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $2(\sqrt{2} - 1)$.

2. En comparant la somme à une intégrale, encadrer

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

3. En déduire que

$$u_n = 2(\sqrt{2} - 1) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Planche 7

Exercice 7.1

1. Calculer un équivalent de

$$u_n = \frac{2^n + 1}{3^n + 2^n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

2. En déduire la nature de la série $\sum u_n x^n$ en fonction du réel $x > 0$.

Exercice 7.2

1. Calculer les primitives de

$$f(t) = \frac{\sqrt{t} \cos \sqrt{t} - \sin \sqrt{t}}{2t\sqrt{t}}$$

sur $I =]0, +\infty[$.

2. Étudier ces primitives au voisinage de l'origine et au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7.3

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

On considère l'endomorphisme u représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & 14 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. a. Calculer le rang de A.

1. b. Calculer une base de $\operatorname{Ker} u$ et une équation cartésienne de $\operatorname{Im} u$.

1. c. Les sous-espaces $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

2. a. Calculer A^2.

2. b. Calculer une équation cartésienne de $\operatorname{Ker} u^2$ et une base de $\operatorname{Im} u^2$.

2. c. Les sous-espaces $\operatorname{Ker} u^2$ et $\operatorname{Im} u^2$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? Sont-ils orthogonaux ?

3. On considère les vecteurs

$$\varepsilon_1 = (0, 2, -1), \quad \varepsilon_2 = (1, 2, -1), \quad \varepsilon_3 = (2, -1, 1).$$

3. a. Reconnaître la droite $\mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$ et le plan $\text{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

3. b. En déduire *sans autre calcul* que la famille $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathscr{B}$.

3. c. Démontrer, *avec le moins de calculs possibles*, que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. d. En déduire la valeur de $\det(A + I_3)$.

Planche 8

Exercice 8.1

Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_1^x t^2 (\ell n\, t)^2 \, dt.$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Calculer les expressions de $f'(x)$ et de $f''(x)$.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de $x = 1$. Peut-on en déduire l'allure du graphe de f au voisinage de ce point ?

3. Étudier le signe de $f(x)$ en fonction de x. Que peut-on en déduire ?

4. a. Calculer l'expression de $f(x)$.

4. b. En déduire un équivalent de $f(x)$ pour x voisin de $+\infty$.

4. c. Étudier le comportement de $f(x)$ au voisinage de 0.

Exercice 8.2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

où $\lambda < \mu$.

1. On suppose que A et D sont semblables.

1. a. Démontrer que $\lambda + \mu = 5$ et $\lambda\mu = 5$.
1. b. En déduire les valeurs de λ et μ ; vérifier que $\lambda > 0$.
2. Quels que soient les matrices colonnes X et Y appartenant à $E = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle X \mid Y \rangle = {}^tXAY.$$

2. a. Simplifier l'expression

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3(x - y/3)^2.$$

2. b. Démontrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
3. On pose

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E.$$

3. a. Calculer un vecteur $X_2 \in E$ tel que $\langle X_1 \mid X_2 \rangle = 0$.
3. b. En déduire une base de E orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

Exercice 8.3

1. Décomposer la fraction

$$\frac{1}{X(X+2)}$$

en éléments simples.
2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle

$$\forall\, t > 0, \quad t(t+2)y'(t) + y(t) = 0$$

qui vérifie $f(1) = \sqrt{3}$.
3. a. Calculer $f'(1)$ et $f''(1)$. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de $f(t)$ au voisinage de $t = 1$.
4. a. Démontrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.
4. b. Tracer sur une même figure l'allure de f et celle de sa bijection réciproque. Expliquer comment tracer cette figure à l'aide de python.

Concours blanc MPSI – Juin 2018 (Solutions)

Solution 1.2

1. $u(e_1) = -2 \cdot e_1$

2. $\det A = -2$

3. a. Le noyau de la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -12 \\ -3 & 6 & 12 \\ 3 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

est le plan $[x - 2y - 4z = 0]$.

3. c. $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Diag}(-2, 1, 1)$

Solution 1.3

1. $f(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$

2. D'après l'équation différentielle, $f''(0) = -6$ et donc, d'après la formule de Taylor,

$$f(t) = 1 - 3t^2 + o(t^2).$$

3. $f'(t) = 6e^{-3t}(1 - e^t)$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $-\infty$ au voisinage de $-\infty$.

Solution 1.4

1. $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 5/2$

2. $\mathbf{P}(S = 2) = \mathbf{P}(S = 8) = 1/16$, $\mathbf{P}(S = 5) = 1/4$.

3. $\mathbf{E}(S) = 5$.

Solution 2.1

2. $f(t) = (\cos 2t - 2 \sin 2t)e^{2t}$

4. $e^{-2t} f(t) = \sqrt{5} \cos(2t + \varphi)$

Solution 2.3

3. $\mathrm{Ker}\, u = \mathbb{R} \cdot (1, -1, 1)$

5. b.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Solution 2.4

$$f'(x) = \int_1^x \frac{\cos(x+t)}{1+t^2}\, dt + \frac{1}{1+x^2}$$

Solution 3.1

1. $f(t) = 3e^t + 2e^{-t}$

2. Comme $f'(t) = e^{-t}(3e^{2t} - 2)$, alors f est décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, +\infty[$ avec

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} \approx -0,2.$$

De plus, f tend vers $+\infty$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

4. b. Comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, que $f(1) < 10$ et que $f(2) > 10$, on peut s'éviter une dichotomie.

```
def f(t):
  return 3*np.exp(t)+2*np.exp(-t)

y_0 = 10
b = 1.0
y_b = f(b)
while y_b<y_0:
  b += 0.01
  y_b = f(b)
a = b-0.01
```

On trouve $a = 1,13$ et $b = 1,14$.

4. c. Sur le segment $[a, b]$, le graphe de f est quasiment linéaire.

```
t = np.linspace(1.13, 1.14)
plt.plot(t, f(t))
```

On trouve c en résolvant $g(t) = 10$, où g est la fonction affine qui interpole les points $[a, f(a)]$ et $[b, f(b)]$.

Solution 3.3

1. On trouve $A^2 = A$: c'est une matrice de projection.

2. $\mathrm{Im}\, A = [x - 2z = 0]$

3. $\mathrm{Ker}\, A = \mathbb{R} \cdot (1, -1, 1)$

Solution 4.1

4. Exemple de base orthonormée du plan invariant :

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1),\ (0, 1, 0)\Big).$$

Solution 4.2

1. $f(t) = (3\cos t + \sin t)e^{-t}$

2. D'après l'équation différentielle, $f''(0) = -2$. On déduit alors de la formule de Taylor que $f(t) = 2 - 2t - t^2 + o(t^2)$ pour t voisin de 0.

4. $e^t f(t) = \sqrt{10} \cos(t - \varphi)$

Solution 4.4

1.

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^6}$$

2. Pour $1 \leqslant t \leqslant x$,

$$\frac{1}{\sqrt{t}(1+t^3)} \leqslant \frac{1}{t^{7/2}}.$$

3. Pour $0 < x \leqslant 1$, les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre décroissant et

$$\frac{1}{\sqrt{t}(1+t^3)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

5. c. Comme $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$, alors $g(0) = 1$ et $g'(0) = 1$.

Solution 5.2

2. a.

$$\frac{X+1}{X(X+3)} = \frac{1/3}{X} + \frac{2/3}{X+3}$$

2. c.

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = t(t+3)^2$$

Solution 5.4

1. $P = [x - 5y - 8z = 0]$
3. $u(\varepsilon_1) = 0$, $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.
4. Il suffit de prendre la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}' = (\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1)$.

Solution 6.1

1. $f(t) = 2e^t - e^{-2t}$
2. c. Comme $f(t) = 1 + 4t + o(t)$, alors

$$g(1+h) = \frac{1}{4}h + o(h).$$

Solution 6.2

1. $H = [x - t = 0]$
2. On va au plus simple !

$$\varepsilon_1 = (0,1,0,0) \qquad \varepsilon_2 = (0,0,1,0)$$
$$\varepsilon_3 = (1,0,0,1) \qquad \varepsilon_4 = (1,0,0,-1)$$

3.

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. La distance est nulle car $a \in H$.

Solution 6.3

2.

$$(\sqrt{2}-1)\left[2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \leqslant S_n \leqslant (\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$$

3. $u_n = S_n/\sqrt{n}$

Solution 7.2

1. En posant $u = \sqrt{t}$, on se ramène au calcul des primitives de

$$g(u) = \frac{u\cos u - \sin u}{u^2}$$

et en intégrant par parties, on arrive à

$$F(t) = \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}} + K.$$

Solution 7.3

1. b. $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}\cdot(1,2,-1)$ et $\operatorname{Im} u = [y + 2z = 0]$
2. a.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 10 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

2. b. $\operatorname{Ker} u^2 = [x - 3y - 5z = 0]$ et $\operatorname{Im} u^2 = \mathbb{R}\cdot(0,-2,1)$
3. a. Ce sont respectivement $\operatorname{Im} u^2$ et $\operatorname{Ker} u^2$.
3. d. $\det(A + I_3) = 2 \times 1 \times 1 = 2$.

Solution 8.1

1. $f'(x) = x^2 \ell n^2 x$, $f''(x) = 2x[\ell n\, x + \ell n^2 x]$
2. $f(1+h) = o(h^2)$
4. a.

$$f(x) = \frac{x^3 \ell n^3 x}{3} - \frac{2x^3 \ell n\, x}{9} + \frac{2(x^3-1)}{27}$$

4. b. $f(x) \sim \frac{x^3}{3}\ell n^3 x$
4. c. $f(x) \to -2/27$ lorsque x tend vers 0.

Solution 8.2

1. b.

$$\lambda, \mu = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

3. a. L'orthogonal de X_1 pour $\langle\cdot|\cdot\rangle$ a pour équation $[3x - y = 0]$.
3. b.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}X_1, \quad \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solution 8.3

1.

$$\frac{1}{X(X+2)} = \frac{1/2}{X} - \frac{1/2}{X+2}$$

2.

$$f(t) = \sqrt{1 + \frac{2}{t}}$$

3. a. D'après l'équation différentielle,

$$f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad f''(1) = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

et d'après la formule de Taylor

$$f(1+h) = \sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} + \frac{5h^2}{6\sqrt{3}} + o(h^2).$$