Concours blanc MPSI – Juin 2019

Planche 1

Exercice 1.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt.$$

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, qu'elle est positive et décroissante.
2. Démontrer que $I_n = \mathcal{O}(1/n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Au moyen d'une intégration par parties, démontrer que

$$I_n - \frac{\ell n\,2}{n} = o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

4. La série $\sum I_n$ est-elle convergente ?

Exercice 1.2

L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère deux vecteurs unitaires a et b, qu'on suppose linéairement indépendants et on pose

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = \langle\, a \,|\, x \,\rangle \cdot b + \langle\, b \,|\, x \,\rangle \cdot a.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de E.
2. Comparer $\langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle$ et $\langle\, y \,|\, f(x) \,\rangle$.
3. Identifier le noyau de f.
4. En déduire que l'image de f est un plan. Donner une base de ce plan.
5. L'image et le noyau de f sont-ils supplémentaires dans E ?
6. Calculer la trace de f.

Exercice 1.3

On tire deux cartes successivement et sans remise dans un jeu (non truqué) de 52 cartes. Pour gagner, il faut que la première carte tirée soit un cœur ou, si la première carte tirée n'est pas un cœur, que la seconde carte soit un roi.

On commence à modéliser ce jeu de hasard par deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$: l'événement A signifie que la première carte tirée est un cœur tandis que l'événement B signifie qu'on gagne la partie.

1. Pour compléter cette modélisation, il faut encore choisir des valeurs pour $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B \mid A)$ et $\mathbf{P}(B \mid A^c)$ (où A^c désigne le complémentaire de A).
1. a. Quelles valeurs attribuer à $\mathbf{P}(A)$? à $\mathbf{P}(B \mid A)$?
1. b. Expliquer pourquoi il est légitime de poser

$$\mathbf{P}(B \mid A^c) = \frac{1}{13}.$$

2. Utiliser le modèle précédent pour calculer la probabilité de gagner.
3. On souhaite réaliser une simulation informatique pour confirmer les valeurs obtenues par le calcul.

```
import random as rd
jeu = range(52)

def tirage():
    return rd.sample(jeu, 2)

def coeur(i):
    return (i<13)

def roi(i):
    return (i%13==0)

def gagne():
    cartes = tirage()
    return (coeur(cartes[0]) or roi(cartes[1]))
```

On admet que la fonction `tirage()` permet de simuler le tirage sans remise de deux cartes parmi 52.
3. a. Expliquer le fonctionnement de `coeur()`, de `roi()` et de `gagne()`.
3. b. Écrire une fonction `estimer_proba_gagne(N)` qui estime la probabilité de B en réalisant N simulations. Sur quel théorème s'appuie cette méthode ?

Planche 2

Exercice 2.1

1. On considère deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que

$$\mathbf{P}(A) = 10\%$$

et que

$$\mathbf{P}(B \mid A^c) = \mathbf{P}(B^c \mid A) = 90\%.$$

(On note ici A^c et B^c, les complémentaires respectifs de A et B.)

Calculer $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A^c \mid B^c)$ et $\mathbf{P}(A \mid B)$.

2. On sait que 10% des pièces produites dans un atelier sont défectueuses. Un test de qualité permet de conserver 90% des pièces conformes et de mettre au rebut 90% des pièces défectueuses.
2. a. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée ?
2. b. Quelle est la probabilité qu'une pièce mise au rebut soit conforme ?
2. c. Quelle est la probabilité qu'une pièce défectueuse

soit conservée ?

2. d. Quelle est la probabilité de commettre une erreur ?

Exercice 2.2

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 4 de sin au voisinage de 0.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \frac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{n+(-1)^n}.$$

2. a. Quelle est la limite de u_n ?

2. b. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

2. c. Calculer un développement asymptotique de u_n de la forme

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b_n}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

où a est une constante et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée.

Exercice 2.3

On considère la matrice

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A. Déterminer une base du noyau de A.

2. En déduire que l'image de A est un plan. Donner une équation cartésienne de ce plan.

3. Le noyau et l'image de A sont-ils supplémentaires ?

4. Calculer le noyau de $(A - I_3)$ et celui de $(A + \frac{1}{3}I_3)$.

5. En déduire une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Planche 3

Exercice 3.1

Soit f, une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Démontrer que f s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

2. On suppose que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Démontrer que f admet au moins un point fixe dans $]0,1[$.

Exercice 3.2

On considère ici la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Factoriser le polynôme défini par

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{R},\quad P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2).$$

2. Caractériser le noyau de $(A - 3I_2)$ et celui de $(A + I_2)$.

3. On pose

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a. Vérifier que la matrice Q est inversible.

3. b. Démontrer que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. On cherche maintenant les matrices $B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$B^2 + B = A.$$

On suppose qu'une telle matrice B existe.

4. a. Démontrer que

$$AB = BA.$$

4. b. On suppose en outre qu'il existe deux matrices colonnes X_1 et X_2, non nulles, et deux scalaires λ_1 et λ_2 tels que

$$BX_1 = \lambda_1 X_1 \quad \text{et} \quad BX_2 = \lambda_2 X_2.$$

Démontrer que

$$AX_1 = (\lambda_1^2 + \lambda_1)X_1 \quad \text{et} \quad AX_2 = (\lambda_2^2 + \lambda_2)X_2.$$

Exercice 3.3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt.$$

1. Démontrer que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t)^{3/2}}\,dt \leqslant \frac{1}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

2. En intégrant par parties, démontrer que

$$I_n = \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{4(n+1)(n+2)} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

3. En déduire deux constantes réelles a et b telles que

$$I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Planche 4

Exercice 4.1

1. Soient $0 \leqslant m < n$, deux entiers. En linéarisant, démontrer que

$$\int_0^\pi \cos mt \cos nt \, dt = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a. Démontrer qu'il existe des réels

$$(a_0, \dots, a_n)$$

tels que

$$\forall\, t \in [0, \pi], \quad \cos^n t = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt.$$

2. b. Démontrer que cette famille $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est unique.

2. c. Vérifier en particulier que

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

3. En déduire la valeur de

$$\int_0^\pi \cos^n t \cos nt \, dt.$$

Exercice 4.2

1. On considère deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$$

et que

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbf{P}(B \mid A^c) = \frac{3}{4}.$$

(On note A^c, le complémentaire de A.)

1. a. Calculer $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A \mid B)$ et $\mathbf{P}(A^c \mid B)$.

1. b. Comment interpréter la différence entre $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(A \mid B)$?

2. On dispose de deux urnes. L'urne 1 contient 1 boule blanche et 3 boules rouges ; l'urne 2 contient 3 boules blanches et 1 boule bleue. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.

2. a. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

2. b. Sachant qu'on a tiré une boule blanche, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne 1 ?

Exercice 4.3

1. On considère le polynôme

$$P = X^3 - 4X^2 - 11X + a$$

où a est un paramètre réel.

1. a. Factoriser le polynôme dérivé de P.

1. b. En déduire que P possède trois racines réelles si, et seulement si, $a > -6$ et $P(11/3) < 0$.

2. Exprimer, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, le déterminant suivant.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 & 2 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

3. Vérifier que P possède trois racines réelles.

4. Justifier que ces trois racines sont comprises entre -5 et 6.

Planche 5

Exercice 5.1

Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout complexe x, on pose

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

1. Quelle est la nature de la suite $\big(u_n(x)\big)_{n \geqslant 2}$? (On discutera sur la valeur de x.)

2. Quelle est la nature de la série $\sum u_n(x)$?

Exercice 5.2

On considère l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur $e_1 = (1, -2, 0)$.

1. Calculer A^2. Vérifier que (I_3, A, A^2) est une famille libre dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Calculer

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$$

en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. (Le résultat sera donné sous forme factorisée.)

3. Vérifier que $A^3 = 2A^2 - A$.

4. Quel est le rang de A ? En déduire une base de $\operatorname{Ker} f$.

5. Calculer $(A - I_3)^2$. En déduire un vecteur

$$e_2 \in \operatorname{Ker}(f - I)^2$$

tel que le vecteur

$$e_3 = (f - I)(e_2)$$

ne soit pas nul.

6. Vérifier que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 5.3

1. a. Rappeler le théorème sur les sommes de Riemann.

1. b. En déduire la limite de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin \frac{k}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la limite de

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Démontrer que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad |\sin x - x| \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

4. En déduire la limite de

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}.$$

Planche 6

Exercice 6.1

1. Soient A et B, deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(B \mid A) = 1, \quad \mathbf{P}(B \mid A^c) = \frac{1}{3}.$$

(On note ici A^c le complémentaire de A.)

Calculer $\mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(A \mid B)$.

2. On lance un dé et on gagne lorsque le résultat est un multiple de 3. On a le droit d'effectuer deux lancers.

2. a. Quelle est la probabilité de gagner dès le premier lancer ?

2. b. Quelle est la probabilité de gagner ?

2. c. En supposant qu'on gagne, quelle est la probabilité de gagner dès le premier lancer ?

Exercice 6.2

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation

$$P_n(x) = 0$$

admet une, et une seule, solution dans $[0,1]$. Cette solution sera dorénavant notée a_n.

2. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad 0 \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{n}.$$

3. Calculer un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. La série $\sum a_n$ est-elle convergente ?

Exercice 6.3

1. On considère le polynôme

$$P = X^3 + X^2 + 1.$$

1. a. Combien de racines réelles le polynôme P a-t-il ?

1. b. En déduire que le polynôme P possède trois racines complexes distinctes. Ces racines seront notées a_1, a_2 et a_3.

1. c. Que valent $a_1 + a_2 + a_3$ et $a_1 a_2 a_3$?

2. On considère le système (S) suivant.

$$\begin{cases} x + a_1 y + a_1^2 z = a_1^4 \\ x + a_2 y + a_2^2 z = a_2^4 \\ x + a_3 y + a_3^2 z = a_3^4 \end{cases}$$

2. a. Calculer le déterminant du système (S). Vérifier qu'il n'est pas nul.

2. b. Effectuer la division euclidienne de X^4 par X^3+X^2+1. En déduire une solution particulière de (S).

2. c. Conclure.

Planche 7

Exercice 7.1

1. Calculer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{(X+1)(3-X)}.$$

2. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{C}$ les séries suivantes convergent-elles ?

$$\sum (-1)^n x^n \qquad \sum \frac{x^n}{3^n}$$

3. Simplifier la somme suivante.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{3 \cdot 3^n}\right] x^n$$

Exercice 7.2

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note f, l'endomorphisme de E représenté par cette matrice A dans la base canonique.

1. Calculer le rang de A. Déterminer une base du noyau de f et vérifier que l'image de f est le plan d'équation cartésienne

$$x - 2y + z = 0.$$

2. Donner une base $\mathscr{B}_0$ de $\operatorname{Im} f$. En déduire que le plan $\operatorname{Im} f$ est stable par f :

$$\forall\, y \in \operatorname{Im} f, \quad f(y) \in \operatorname{Im} f.$$

3. On note f_0, l'endomorphisme de $F = \operatorname{Im} f$ induit par restriction de f :

$$\forall\, x \in \operatorname{Im} f, \quad f_0(x) = f(x).$$

3. a. Donner une base orthonormée $\mathscr{B}_1$ de $\operatorname{Im} f$.
3. b. Calculer la matrice de f_0 relative à la base $\mathscr{B}_1$. Vérifier que cette matrice est orthogonale.

Exercice 7.3

On considère la fonction $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

1. Démontrer que Λ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ dont la réciproque L est définie par

$$\forall\, x \in \,]0,1[, \quad L(x) = \ln \frac{x}{1-x}.$$

2. Démontrer qu'il existe un, et un seul, réel x_0 tel que

$$\Lambda(x_0) = x_0.$$

3. On va maintenant s'intéresser aux aspects numériques de ce problème. On commence par définir la fonction Λ au moyen du module `numpy`.

```
import numpy as np

def Lambda(x):
    return 1/(1+np.exp(-x))
```

On va procéder par dichotomie, au moyen de la fonction suivante.

```
1 def dichotomie(f, a, b, eps):
2     s = f(a)-a
3     while (b-a)>eps:
4         c = (a+b)/2
5         if (f(c)-c)*s>0:
6 
7         else:
8 
9     return (a+b)/2
```

3. a. Expliquer pourquoi l'exécution de la commande

`dichotomie(Lambda, 0, 1, 1e-4)`

peut donner une valeur approchée de x_0.
3. b. Comment faut-il compléter pour cela les lignes 6 et 8 ?
3. c. Majorer la différence entre x_0 et la valeur retournée lors de l'exécution de la commande.

Planche 8

Exercice 8.1

On considère

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t}\, dt.$$

1. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur l'intervalle $I = \,]0,+\infty[$.
2. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur I.
3. On étudie f au voisinage de 0.
3. a. Déduire du développement limité de ch au voisinage de 0 qu'il existe un réel $\alpha > 0$ assez petit pour que

$$\forall\, 0 < t < \alpha, \quad 0 \leqslant \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t} \leqslant t.$$

3. b. En déduire que

$$0 \leqslant f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leqslant \int_x^{2x} t\, dt$$

pour certains réels x (on précisera lesquels).
3. c. En déduire que

$$f(x) = \ln 2 + o(x)$$

pour x voisin de 0. Comment interpréter géométriquement et analytiquement cette propriété ?
4. On étudie f au voisinage de $+\infty$.
4. a. Rappeler ce que signifie

$$f(x) \sim g(x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.
4. b. Démontrer que

$$f(x) \sim \int_x^{2x} \frac{e^t\, dt}{2t}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.
4. c. Vérifier que

$$0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^t\, dt}{2t^2} \leqslant \frac{1}{2x^2}(e^{2x} - e^x).$$

4. d. Au moyen d'une intégration par parties, démontrer que

$$\int_x^{2x} \frac{e^t\, dt}{2t} \sim \frac{e^{2x}}{4x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.
4. e. Que dire de l'allure du graphe de f au voisinage de $+\infty$?

Exercice 8.2

Pour tout $P \in E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose

$$u(P) = P(-1)X^2 + P(1).$$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
2. Calculer sa matrice relative à la base canonique de E.
3. Quel est le rang de u ? Caractériser son image.
4. Quel est le noyau de u ?
5. Le noyau et l'image de u sont-ils supplémentaires dans E ?

Planche 9

Exercice 9.1

Pour $1 < a < b$, on pose

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{\ell n(x^2-1)}{x^2}\,dx.$$

1. Justifier l'existence de $I(a,b)$.
2. En intégrant par parties, démontrer que $I(a,b)$ tend vers une limite finie $\ell(a)$ lorsque b tend vers $+\infty$ et que

$$\ell(a) = \frac{\ell n(a^2-1)}{a} - \ell n\,\frac{a-1}{a+1}.$$

3. Étudier $\ell(a)$ lorsque a tend vers 1.

Exercice 9.2

On note E, l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall\,x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,dt.$$

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Démontrer que E est stable par dérivation : si $P \in E$, alors $P' \in E$.
3. Vérifier que E ne contient aucun polynôme de degré 1.
4. Quels sont les polynômes qui appartiennent à E ? Quelle est la dimension de E ?

Exercice 9.3

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
1. a. Quelle est la dimension du sous-espace

$$P = [x+y+z=0] \quad ?$$

1. b. Donner une base du sous-espace

$$D = [2x = y = z].$$

1. c. Vérifier que P et D sont supplémentaires dans E.
2. On notera f, la projection sur P parallèlement à D.
2. a. Que vaut $f(x)$ si $x \in P$? Et si $x \in D$?
2. b. Donner une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
2. c. Calculer la matrice A de f dans la base canonique de E.
2. d. Quel est le rang de $I_3 - A$?

Planche 10

Exercice 10.1

On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\,x \in \mathbb{R}, \quad 3\,\mathrm{Arctan}\,x + x^2 f(x) = 2x \int_1^x f(t)\,dt.$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, puis que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Que vaut $f(1)$?
3. Vérifier que

$$3x + 2x\int_0^1 f(t)\,dt = \mathcal{O}(x^2)$$

lorsque x tend vers 0.
4. Vérifier que

$$\forall\,x > 0, \quad x^2 f''(x) + 2f'(x) - 2f(x) = \frac{6x}{(1+x^2)^2}.$$

Exercice 10.2

1. Démontrer que la fonction

$$f = \left[x \mapsto \frac{1+x}{1-x}\right]$$

réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sur un ensemble qu'on précisera. Quelle est l'expression de la bijection réciproque ?
2. On considère le polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

où $a_d \neq 0$. Quelle est la valeur du produit des racines complexes de P ?
3. Soit n, un entier supérieur à 2.
3. a. Calculer les solutions complexes de

$$(1+x)^{2n} = (1-x)^{2n}.$$

3. b. En déduire que le produit des solutions non nulles est strictement positif.
3. c. Calculer le produit des solutions non nulles.

Exercice 10.3

1. On s'intéresse à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a. Caractériser les noyaux de $(M - 3I_2)$ et de $(M + I_2)$.
1. b. Vérifier que la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.
1. c. Calculer $Q^{-1}MQ$.
2. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2I_n & 2I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Vérifier que P est inversible et calculer son inverse.
3. On considère enfin la matrice

$$B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

3. a. Pour $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, calculer

$$B\begin{pmatrix}2X\\X\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B\begin{pmatrix}2X\\-X\end{pmatrix}.$$

3. b. En déduire que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix}3A & 0_n\\0_n & -A\end{pmatrix}.$$

Planche 11

Exercice 11.1

Soit $a > 0$, un réel fixé.

1. Calculer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x = 0$ de l'expression

$$f(x) = \frac{\sin ax}{e^x - 1}.$$

En déduire l'allure du graphe de f au voisinage de l'origine.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'expression $x^n f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 11.2

Soit $n \geqslant 1$, un entier. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Quelle est la dimension de E ?

2. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

2. a. À quelle condition l'application définie par

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

est-elle un produit scalaire sur E ?

2. b. En supposant que cette condition est satisfaite, donner une base orthonormée de E.

3. On considère

$$F = \left\{P \in E \ : \ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}.$$

3. a. Démontrer que F est un sous-espace de E. Quelle est sa dimension ?

3. b. Identifier l'orthogonal de F.

3. c. En déduire la distance de X^n au sous-espace F.

Exercice 11.3

On considère une fonction continue f telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x (2x - 3t)f(t)\,dt = \frac{x^2}{2}.$$

1. Dans cette question *seulement*, on suppose que la fonction f est constante. Peut-on calculer la valeur de cette constante ?

2. On considère la fonction F définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

2. a. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$.

2. b. Vérifier que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 2F(x) - xF'(x) = x.$$

2. c. En déduire l'expression générale de $F(x)$, puis celle de $f(x)$.

Planche 12

Exercice 12.1

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\-1 & 5 & -2\\-1 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la dimension de $F = \text{Ker}(A - 2I_3)$?

2. Quelle est la dimension de $G = \text{Ker}(A - 4I_3)$?

3. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

4. On considère les vecteurs colonnes suivants.

$$X_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

4. a. Vérifier que (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. b. Calculer AX_1, AX_2 et AX_3.

4. c. En déduire qu'il existe une matrice inversible Q telle que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Exercice 12.2

On étudie l'intégrale

$$I_n = \int_1^{1+1/n} \sqrt{1 + x^n}\,dx$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. a. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge et que

$$1 \leqslant x_n \leqslant 3$$

pour tout entier n assez grand.

1. b. Démontrer qu'il existe une constante K telle que

$$\forall\, 0 \leqslant z \leqslant 3, \quad 0 \leqslant e^z - 1 \leqslant K.z.$$

1. c. En déduire que, pour tout n assez grand,

$$\forall\, 1 \leqslant u \leqslant x_n, \quad 0 \leqslant u^{1/n} - 1 \leqslant \frac{K \ln 3}{n}.$$

2. Appliquer le changement de variable
$$u = x^n$$
à l'intégrale I_n. Que trouve-t-on ?

3. Vérifier que
$$\int_1^{x_n} \sqrt{1+u}\, u^{1/n-1}\, du$$
converge vers
$$\int_1^e \frac{\sqrt{1+u}}{u}\, du$$
lorsque n tend vers $+\infty$.

NB : on ne cherchera pas à calculer cette dernière intégrale.

4. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 12.3

1. Énoncer le Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

2. Calculer les solutions de l'équation différentielle
$$x^2 y'(x) + y(x) = 1$$
sur les intervalles $I_- =]-\infty, 0[$ et $I_+ =]0, +\infty[$.

3. Combien de solutions définies sur I_+ sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$?

4. Démontrer que toutes les solutions définies sur I_- sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_-$.

5. Parmi les solutions de cette équation, combien y en a-t-il qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Planche 13

Exercice 13.1

On pose $\alpha = \exp(i\frac{\pi}{10})$ et
$$P = 1 - X^2 + X^4 - X^6 + X^8.$$
Les nombres complexes α^3, α^6 et α^9 sont-ils des racines du polynôme P ?

Exercice 13.2

1. On considère trois matrices
$$A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R}), \quad B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad M$$
telles que
$$AMB = AB.$$

1. a. Quelle est la taille de la matrice M ?

1. b. On suppose que A est injective. Démontrer que $MB = B$.

1. c. On suppose en outre que B est surjective. Démontrer que M est la matrice identité.

2. a. Vérifier que
$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
est une matrice de projection.

2. b. Expliciter deux matrices $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que
$$U = AB.$$

2. c. Démontrer que, quelles que soient les matrices A et B choisies, le produit BA est la matrice identité.

Exercice 13.3

1. Calculer
$$\int_0^1 t^{3n}\, dt$$
pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer
$$\sum_{n=0}^{N} (-t)^{3n}$$
pour tout $t \in [0, 1]$.

3. Démontrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\, dt \leqslant \frac{1}{3n+4}.$$
Que peut-on en déduire ?

4. Démontrer que la série
$$\sum \frac{(-1)^n}{3n+3}$$
converge et que sa somme est égale à l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}.$$
(On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.)

5. La série
$$\sum \frac{(-1)^n}{3n+3}$$
est-elle absolument convergente ?

Planche 14

Exercice 14.1

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(1 - \ln x).$$

1. Quel est l'ensemble de définition I de f ?
2. Étudier les variations de f.
3. Démontrer que f réalise une bijection de I sur une partie $J \subset \mathbb{R}$ qu'on précisera.
4. Résoudre l'équation

$$f(x) = \ln 2.$$

5. a. Démontrer que f'' s'annule en un seul point $\beta \in I$. Que vaut β ?
5. b. Calculer la tangente au graphe de f au point d'abscisse β.
5. c. Étudier la position du graphe de f par rapport à cette tangente.

Exercice 14.2

1. Démontrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - x & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} - x & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} - x & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

est une fonction affine de x.

2. Soient a, b et c, trois réels. On suppose que $a \neq b$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \begin{vmatrix} c-x & a-x & a-x \\ b-x & c-x & a-x \\ b-x & b-x & c-x \end{vmatrix}.$$

2. a. Démontrer que f est une fonction affine.
2. b. Déterminer f en calculant $f(a)$ et $f(b)$.
2. c. En déduire la valeur de

$$\begin{vmatrix} c & a & a \\ b & c & a \\ b & b & c \end{vmatrix}.$$

Exercice 14.3

Soient a et b, deux vecteurs *non nuls* d'un espace euclidien E. Pour tout $x \in E$, on pose

$$f(x) = x - \langle a \,|\, x \rangle \cdot b.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de E.
2. Démontrer que le noyau de f est contenu dans la droite $D = \mathbb{R} \cdot b$.
3. Démontrer que f est un automorphisme si, et seulement si,

$$\langle a \,|\, b \rangle \neq 1.$$

Planche 15

Exercice 15.1

1. Trouver trois réels a, b et c tels que

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

2. a. Calculer les primitives de

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x(1+x^2)\operatorname{Arctan} x}.$$

2. b. Démontrer que, parmi ces primitives, il en existe une, et une seule, qui tend vers 0 au voisinage de l'origine.
2. c. Étudier cette primitive au voisinage de $+\infty$.

Exercice 15.2

Pour tout polynôme $P \in E = \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P) = X^2P'' + XP'.$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
2. a. Vérifier que le sous-espace $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ :

$$\forall\, P \in E_n, \quad \varphi(P) \in E_n.$$

2. b. Calculer la matrice de φ relative à la base canonique de E_n.
3. Caractériser le noyau de φ.
4. On cherche les solutions polynomiales de l'équation différentielle

$$x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0.$$

4. a. En supposant que la solution y soit associée à un polynôme P de degré d, démontrer que $d = 1$.
4. b. Trouver les solutions polynomiales de l'équation différentielle.

Exercice 15.3

Pour tout $0 < t \leqslant 1$, on pose

$$\varphi(t) = \frac{1-t^3}{t}.$$

1. Démontrer que φ réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $\mathbb{R}_+$. On notera u, la bijection réciproque.
2. Démontrer que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad u^3(x) + xu(x) = 1.$$

3. Démontrer que u est de classe $\mathscr{C}^1$ et que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad u'(x) = \frac{-u(x)}{3u^2(x) + x}.$$

4. Démontrer que

$$u(x) \sim \frac{1}{x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - u(x)}.$$

5. a. Démontrer que

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

lorsque x tend vers 0.

5. b. Démontrer que

$$f(x) \sim \frac{1}{x^2}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

Planche 16

Exercice 16.1

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{t}{1+t^3}\,dt.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.

3. En déduire que

$$f(x) \sim \frac{x^4}{2}$$

lorsque x tend vers 0.

4. a. Démontrer qu'il existe une constante A telle que

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad f(x) \leqslant A + \int_1^{x^2} \frac{dt}{t^2}.$$

4. b. En déduire que f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.

5. Tracer l'allure du graphe de f.

Exercice 16.2

On note E, l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F, le sous-espace engendré par les fonctions

$$\text{ch}, \quad \text{sh}, \quad f = [x \mapsto x \operatorname{ch} x] \quad \text{et} \quad g = [x \mapsto x \operatorname{sh} x].$$

1. a. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de ch, sh, f et g.

1. b. En déduire que la famille

$$\mathscr{B} = (\text{ch}, \text{sh}, f, g)$$

est une base de F.

1. c. Quelle est la dimension de F ?

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in F$, on pose

$$T_\lambda(h) = [x \mapsto xh''(x) - \lambda h'(x) - xh(x)].$$

2. a. Vérifier que T_λ est un endomorphisme de F.

2. b. Calculer la matrice de T_λ dans la base $\mathscr{B}$.

3. On choisit en particulier $\lambda = 2$. Caractériser le noyau et l'image de T_2.

Exercice 16.3

1. On considère deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que $P(A) = 1/2$ et que

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{25}{36}, \quad \mathbf{P}(B \mid A^c) = \frac{5}{6}.$$

(On note A^c, le complémentaire de A.)

1. a. Calculer $\mathbf{P}(B^c \mid A)$.

1. b. Calculer $\mathbf{P}(B^c)$.

1. c. Calculer $\mathbf{P}(A \mid B^c)$.

2. On joue à Pile ou Face. Si on obtient Pile, on lance un dé deux fois ; si on obtient Face, on ne lance le dé qu'une seule fois. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?

Concours blanc MPSI – Juin 2019 (Solutions)

Solution 1.2

6. $\operatorname{tr}(f) = 2\langle a \mid b \rangle$ en écrivant la matrice de f dans une base obtenue en complétant (a, b) par une base de $\operatorname{Ker} f$.

Solution 1.3

1. a. $\mathbf{P}(A) = 1/4$ $\quad \mathbf{P}(B \mid A) = 1$

1. b. Sachant que la première carte tirée n'est pas un cœur, il y a 39 choix possibles.

Si cette carte est un roi (3 choix), il reste 3 rois parmi les 51 cartes restantes pour le second tirage.

Dans le cas contraire (36 choix), il reste 4 rois parmi les 51 cartes restantes pour le second tirage.

Avec l'hypothèse d'équiprobabilité et la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(B \mid A^c) = \frac{3}{39} \cdot \frac{3}{51} + \frac{36}{39} \cdot \frac{4}{51} = \frac{1}{13}.$$

2. $\mathbf{P}(B) = \frac{4}{13}$ (formule des probabilités totales)

3. b. Loi des grands nombres : si le nombre N de simulations est assez grand, la proportion de succès est proche de la probabilité de succès.

Solution 2.1

1. $\mathbf{P}(B) = 82\%$ $\quad \mathbf{P}(A^c \mid B^c) = 50\%$ $\quad \mathbf{P}(A \mid B) = \frac{1}{18}$

2. d. $\mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A^c \cap B^c) = 10\%$

Solution 2.2

2. c.

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n + 1/6}{n^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

Solution 2.3

1. $\operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot (1, -2, 1)$

2. $x - 2y + z = 0$

4. $\operatorname{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 1)$
$\operatorname{Ker}(A + \frac{1}{3} I_3) = \mathbb{R} \cdot (-1, 0, 1)$

Solution 3.1

2. Cette fois,

$$\int_0^1 f(x) - x \, dx = 0.$$

Solution 3.3

2. Il faut intégrer deux fois par parties.

3. $a = \sqrt{2}$ $\quad b = -(\sqrt{2} + 1/4)$

Solution 4.1

3. $2^{-n}\pi$

Solution 4.2

1. a. $\mathbf{P}(B) = 1/2$ $\quad \mathbf{P}(A \mid B) = 1/4$

1. b. Les événements A et B ne sont pas indépendants : la réalisation de l'événement B rend la réalisation de A moins probable.

Solution 4.3

1. a. $P' = (X+1)(3X-11)$

2. Ici, $a = 19$.

3. On a bien $a > -6$ et d'autre part, $P(3) < 0$ et $P(4) < 0$, donc $P(11/3) < 0$ (compte-tenu des variations de P).

4. Il y a une racine entre les deux extrema, une racine entre -5 et -1 (car $P(-5) < 0$) et une racine entre $11/3$ et 6 (car $P(6) > 0$).

Solution 5.2

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $P = X(X-1)^2$

4. $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \cdot e_1$

5.

$$(A - I_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $e_2 = (1, 0, 1)$ convient et $e_3 = (0, 2, 0)$.

6.

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 5.3

1. b. La somme S_n converge vers

$$\int_0^1 \sin t \, dt = 1 - \cos 1.$$

2. Calcul direct ou théorème sur les sommes de Riemann : la limite est égale à $1/2$.

4. $1/2$ encore.

Solution 6.1

1. $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{9}$ $\quad \mathbf{P}(A \mid B) = \frac{3}{5}$

Solution 6.3

1. a. Comme $P' = (3X+2)X$ et que $P(0) > 0$, le polynôme P possède une seule racine réelle.

1. c. Somme des racines : -1. Produit des racines : -1 aussi.

2. b. Comme $Q = X - 1$ et $R = 1 - X + X^2$, une solution particulière est

$$(x, y, z) = (1, -1, 1).$$

2. c. Comme le système est inversible, la solution particulière est la seule !

Solution 7.1

1.

$$F = \frac{1}{4(X+1)} + \frac{1}{4(3-X)}$$

3. $4F(x)$ pour $|x| < 1/3$

Solution 7.2

1. $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \cdot (1, -2, 1)$

Solution 8.1

2. $f'(x) = [\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} x]/x > 0$

3. b. L'encadrement vaut au moins pour $0 < x < \alpha/2$.

3. c. On peut prolonger f par continuité en posant $f(0) = \ell n\, 2$. Ce prolongement est dérivable et son graphe présente une tangente horizontale en $x = 0$. Avec le développement limité de $f'(x)$, on peut en déduire que le prolongement est en fait de classe $\mathscr{C}^1$.

Solution 8.2

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Le noyau de u est engendré par $X^2 - 1$ et $X^3 - X$. C'est aussi l'ensemble des polynômes P tels que $P(1) = P(-1) = 0$, donc l'ensemble des multiples de $(X^2 - 1)$.

5. Il existe un polynôme P_0 tel que $P(-1) = 1$ et $P(1) = -1$ (interpolation de Lagrange), donc le noyau et l'image de u ne sont pas supplémentaires dans E.

Solution 9.1

3. $\ell(a)$ tend vers $2\,\ell n\, 2$.

Solution 9.2

2. Si $P \in E$, alors (Théorème fondamental)

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = P(x+1) - P(x) = \int_x^{x+1} P'(t)\,dt.$$

4. Le sous-espace E est la droite des polynômes constants.

Solution 9.3

2. c.

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. d. La matrice $I_3 - A$ représente la projection sur D parallèlement à P, donc son rang est égal à 1.

Solution 10.2

3. a. Comme 1 n'est pas une solution, il s'agit de calculer les racines $2n$-ièmes de l'unité.

$$\frac{1+x}{1-x} = \exp\frac{k\pi}{n} \qquad (-n < k \leqslant n)$$

Le cas $k = n$ est impossible (la fonction f prend toutes les valeurs complexes sauf -1). On en déduit que

$$x = i \tan\frac{k\pi}{2n} \qquad (-n < k < n)$$

3. b. Elles sont deux à deux conjuguées.

3. c. D'après la formule du binôme, on s'intéresse aux racines du polynôme

$$4nX(X^{2n-2} + \cdots + 1).$$

Le produit des racines non nulles est donc égal à 1.

Solution 10.3

1. b.

$$Q^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ I_n & -2I_n \end{pmatrix}$$

3. a.

$$B\begin{pmatrix} 2X \\ X \end{pmatrix} = 3A\begin{pmatrix} 2X \\ X \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} 2X \\ -X \end{pmatrix} = -A\begin{pmatrix} 2X \\ -X \end{pmatrix}$$

3. b. Faire varier X dans la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Solution 11.2

2. a. Il s'agit d'un produit scalaire si, et seulement si, les a_k sont deux à deux distincts.

2. b. La base des polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux abscisses $a_0, \ldots, a_n$.

3. b. Par définition, F est l'orthogonal de la droite $\mathbb{R} \cdot 1$, donc $F^\perp = \mathbb{R} \cdot 1$.

3. c. On fait une figure pour se rappeler que

$$d(X^n, F) = \frac{|\langle X^n \,|\, 1 \rangle|}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k^n\right|.$$

Solution 11.3

1. La solution constante est $[t \mapsto 1]$.

2. c. $f(x) = 2Kx + 1$

Solution 12.1

1. $F = [x - 3y + 2z = 0]$

2. $G = \mathbb{R} \cdot (-1, 1, 1)$

Solution 12.2

1. a. La limite est égale à e et $1 < e < 3$.

1. b. Inégalité des accroissements finis : on peut choisir $K = e^3$.

Solution 12.3

2. $1 + K \exp(1/x)$

Solution 13.1

Les racines de P sont les racines dixièmes de -1, hormis $\pm i$.

Solution 13.2

1. a. $M = I_2$

2. b. Les colonnes de A forment une base de l'image de U.

Les colonnes de B donnent la décomposition des colonnes de U comme combinaisons linéaires des colonnes de A.

2. c. Comme $U^2 = U$, on a $(AB)(AB) = A(BA)B = AB$ et on applique ce qui précède.

Solution 14.1

5. a. Comme

$$f''(x) = \frac{-\ell n\, x}{x^2(1-\ell n\, x)^2}$$

alors $\beta = 1$.

5. b. On a $f(1) = 0$ et $f'(1) = -1$.

5. c. Pour x voisin de 1, on pose $h = x - 1$ et

$$f(x) = f(1+h) = -h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)$$

donc le graphe de f traverse la tangente (inflexion géométrique).

Solution 15.1

1.

$$\frac{1}{X(1+X^2)} = \frac{1}{X} - \frac{X}{1+X^2}$$

2. a.

$$F(x) = \ell n \frac{\operatorname{Arctan} x\sqrt{1+x^2}}{x}$$

2. c. Elle tend vers $\ell n(\pi/2)$.

Solution 15.2

2. b. $\varphi(X^d) = d^2 X^d$

3. $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_0[X]$

4. b. $y(x) = K.x$

Solution 15.3

1.

$$\varphi'(t) = \frac{-1-2t^3}{t^2} < 0$$

4. L'étude de φ montre que $u(x)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. On en déduit que

$$xu(x) = 1 - u^3(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

5. a. Pour $x \to 0$,

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1 + o(x)}.$$

5. b. Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{u(x)\sqrt{u(x)}}{\sqrt{x}}.$$

Solution 16.1

2. $f'(x) = \frac{2x^3}{1+x^6}$

3. On a $f'(x) = 2x^3 + o(x^3)$ et, puisqu'on peut primitiver un développement limité, on en déduit que

$$f(x) = f(0) + \frac{2x^4}{4} + o(x^4).$$

4. a. Avec la relation de Chasles, il suffit de choisir $A = f(1)$.

5. La fonction f est paire.

Solution 16.2

2. b.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

3. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$
$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(\mathrm{ch} - g, \mathrm{sh} - f)$.

Solution 16.3

1. a. $\mathbf{P}(B^c \mid A) = {}^{11}/_{36}$

1. b. $\mathbf{P}(B^c) = 17/72$ (formule des probabilités totales)

1. c. $\mathbf{P}(A \mid B^c) = 11/17$ (Bayes)

2. L'événement A consiste à obtenir Pile. L'événement B consiste à ne pas obtenir 6. Avec un seul lancer de dé :

$$\mathbf{P}(B \mid A^c) = \frac{5}{6}.$$

Avec deux lancers de dé :

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \left(\frac{5}{6}\right)^2.$$