Planche 1

Exercice 1.1

On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n^2 - n + 1}{4n^4 + 3n^3 + 5}.$$

1. Calculer un équivalent de u_n. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?
2. On pose $v_0 = 0$ et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad v_n = u_n - \frac{1}{2n}.$$

La série $\sum v_n$ est-elle convergente ?

Exercice 1.2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ -14 & 28 & -20 \\ -18 & 36 & -26 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier l'existence d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ tel que A soit la matrice de u relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$.
2. Justifier l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$.
3. Calculer les produits matriciels suivants.

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En déduire la matrice $P^{-1}AP$.
4. Donner un vecteur directeur de $\operatorname{Ker} u$.
5. Quel est le rang de u ? Donner une équation cartésienne de $\operatorname{Im} u$.

Exercice 1.3

Pour tout $t > 0$, on pose

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}}.$$

1. Simplifier l'expression

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

2. Étudier les variations de $F(x)$ pour $x > 0$. Préciser les limites éventuelles de $F(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Tracer l'allure du graphe de F.

Planche 2

Exercice 2.1

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de la matrice A ? Cette matrice est-elle inversible ?
2. Calculer A^2 et A^3.
3. On considère le polynôme

$$P = X^3 + X^2 - X - 1.$$

3. a. Calculer $P(I_3)$ et $P(A)$.
3. b. Factoriser le polynôme P.
3. c. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme Q_n et trois réels a_n, b_n et c_n tels que

$$X^n = Q_n P + (a_n X^2 + b_n X + c_n).$$

3. d. Proposer une méthode pour calculer explicitement les réels a_n, b_n et c_n. (On ne demande pas que les calculs soient menés à leur terme.) Que peut-on déduire de ce qui précède ?

Exercice 2.2

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Quels que soient P et Q dans E, on pose

$$\langle P \mid Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Démontrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
3. La base canonique de E est-elle une base orthonormée pour ce produit scalaire ?
4. On considère le sous-espace

$$F = \operatorname{Vect}(X^2 + 1,\ X^2 - X - 1).$$

4. a. Quelle est la dimension de $F^\perp$? Donner une base de ce sous-espace.
4. b. Calculer le projeté orthogonal de X sur F. (On fera une figure pour illustrer le problème étudié.)

Exercice 2.3

On pose

$$f(x) = \ell n(1 + e^{-x}).$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$; au voisinage de $-\infty$.
3. Calculer un développement limité à l'ordre deux de $f(x)$ pour x voisin de 0.
4. Calculer la dérivée de f. En déduire le sens de variation de f.
5. Tracer l'allure du graphe de f.

Planche 3

Exercice 3.1

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de la matrice A ? Cette matrice est-elle inversible ?

2. Vérifier que $\operatorname{Ker}(A+I_3)$ et $\operatorname{Ker}(A-I_3)$ sont des droites vectorielles. Proposer un vecteur directeur pour chacune d'elles.

3. Vérifier que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

appartient au plan $\operatorname{Ker}(A+I_3)^2$ mais pas à la droite $\operatorname{Ker}(A+I_3)$.

4. Démontrer que la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

est inversible et que la matrice $Q^{-1}AQ$ est triangulaire supérieure.

5. Que dire des coefficients diagonaux de $Q^{-1}AQ$?

Exercice 3.2

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3+2x+1}.$$

1. Démontrer que

$$f(x) = 2 + 2x - 3x^2 + o(x^2)$$

pour x voisin de 0. Interpréter géométriquement cette propriété.

2. On suppose que x tend vers $+\infty$.

2. a. Donner un équivalent simple de $f(x)$. En déduire la limite de $f(x)$.

2. b. Calculer les réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3} + o\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

3. En déduire qu'il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\forall\, x \geqslant A, \qquad \ln\frac{x}{A} \leqslant \int_A^x f(t)\,dt \leqslant 2\ln\frac{x}{A}.$$

Interpréter géométriquement cet encadrement.

Exercice 3.3

Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent toutes les deux la loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$.

1. On pose $S = X + Y$.

1. a. Quelle est la loi de S ?

1. b. Quelle est la probabilité de l'événement $[X \leqslant S]$?

1. c. Les variables aléatoires X et S sont-elles indépendantes ?

2. On pose $Z = Y + 2$.

2. a. Quelle est la probabilité de l'événement $[X \leqslant Z]$?

2. b. Les variables aléatoires X et Z sont-elles indépendantes ?

Planche 4

Exercice 4.1

1. Étudier les variations et tracer l'allure du graphe de la fonction f définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

2. Pour quelles valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

3. En discutant sur $m \in \mathbb{R}$, résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Exercice 4.2

On pose

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt.$$

1. Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_x^{3x} \frac{dt}{t} \qquad \int_x^{3x} dt \qquad \int_x^{3x} t\,dt \qquad \int_x^{3x} t^2\,dt$$

2. Démontrer que, pour tout $t \geqslant 0$ assez petit,

$$|\cos t - 1| \leqslant t.$$

En déduire que $|F(x) - \ln 3| \leqslant 2x$ pour $x > 0$ assez petit.

3. Démontrer que

$$F(x) - \ln 3 + 2x^2 = \mathcal{O}(x^3)$$

lorsque x tend vers 0.

4. Tracer l'allure du graphe de F au voisinage de 0.

Exercice 4.3

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition ?

Quelles sont les limites de f aux extrémités de son ensemble de définition ?
2. Calculer $f'(x)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
3. a. Démontrer qu'il existe un unique angle

$$\theta \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$$

tel que $x = \tan\theta$.
3. b. Démontrer alors que

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin\theta.$$

3. c. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Planche 5

Exercice 5.1

Soit $m \geqslant 2$, un entier. On considère le polynôme

$$P_m = (X+1)^m - X^m - 1.$$

1. Quel est le degré de P_m ? son coefficient dominant ?
2. Expliciter les racines du polynôme dérivé P'_m.
3. Démontrer que $z \in \mathbb{C}$ est une racine multiple de P_m si, et seulement si,

$$(z+1)^{m-1} = z^{m-1} = 1.$$

4. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur m pour que P_m admette une racine multiple (au moins).
5. Compléter le code suivant pour que la commande `verifier(N)` retourne la liste des entiers $3 \leqslant m \leqslant N$ pour lesquels le polynôme P_m possède une racine multiple.

```
import numpy as np

def P(m, z):
  return (z+1)**m-z**m-1

def dP(m, z):
  return z**(m-1)-1

def liste_zeros(m):
  k = np.arange(1, m-1)
  return (np.exp(2*1j*k*np.pi/(m-1))-1)**(-1)

def verifier(N):
  L = []
  for m in range(3, N+1):
    for z in liste_zeros(m):
      Pz = P(m, z)
      dPz = dP(m, z)



  return L
```

Exercice 5.2

On pose $a = \sin 1$, puis

$$\begin{aligned} u_1 &= -\sin x \\ u_2 &= \sin(\sin x)\ldots \\ u_n &= (-1)^n \sin(\sin(\cdots(\sin x)))\ldots \end{aligned}$$

1. Trouver $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

2. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad |u_n| \leqslant a < 1.$$

3. Démontrer que la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante et tend vers 0.

Exercice 5.3

L'espace $E = \mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix}.$$

1. Caractériser le noyau et l'image de la matrice M.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker} M.$$

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\operatorname{Im} M \perp \operatorname{Ker} M.$$

Planche 6

Exercice 6.1

1. On considère les quatre matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & -6 \\ 6 & -6 & -9 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. a. Quelles matrices peut-on factoriser sous la forme $C \times L$ où C est une matrice colonne et L une matrice ligne ?
1. b. Quelles matrices peut-on factoriser sous la forme $C \times {}^tC$ où C est une matrice colonne ?
2. On considère deux matrices M et N dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} N, \quad \operatorname{Im} M = \operatorname{Im} N \quad \text{et} \quad \operatorname{rg} M = 1.$$

2. a. Démontrer qu'il existe une matrice colonne C et six réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ et μ_3 tels que

$$M = \begin{pmatrix}\lambda_1 C & \lambda_2 C & \lambda_3 C\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix}\mu_1 C & \mu_2 C & \mu_3 C\end{pmatrix}.$$

2. b. Donner une équation cartésienne de $\operatorname{Ker} M$.

2. c. En déduire qu'il existe un scalaire α non nul tel que

$$N = \alpha M.$$

Exercice 6.2

On suppose que x tend vers $+\infty$.

1. Démontrer que

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x\ln x} - \frac{1}{2x^2\ln x} + o\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

2. En déduire un développement asymptotique de

$$\ln \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$$

à $o(1/x^3)$ près.

3. Calculer la limite de

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}.$$

Exercice 6.3

Discuter en fonction du paramètre $x \in \mathbb{R}_+$:

1. Le comportement asymptotique de la suite de terme général nx^n ;

2. Le comportement asymptotique de la suite de terme général x^n/n ;

3. La nature de la série

$$\sum n^{(-1)^n} x^n.$$

Planche 7

Exercice 7.1

Soit E, un espace euclidien de dimension n. On considère deux sous-espaces vectoriels

$$F = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad G = \operatorname{Vect}(y_1, \dots, y_n)$$

en supposant que

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \langle x_i \,|\, x_j \rangle = \langle y_i \,|\, y_j \rangle.$$

1. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$. Vérifier que les vecteurs

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \cdot x_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \cdot y_k$$

ont même norme.

2. On suppose que la sous-famille $(x_1, \dots, x_r)$ est libre. Démontrer que la sous-famille $(y_1, \dots, y_r)$ est libre elle aussi.

3. On suppose que $\dim F = r$.

3. a. La famille $(x_1, \dots, x_r)$ est-elle une base de F ?

3. b. Démontrer que $\dim G \geqslant r$.

4. Démontrer que $\dim F = \dim G$.

Exercice 7.2

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère une fonction f_n telle que

$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n}, \quad f_n(x) = n^2 x$$

et que

$$\forall\, \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \quad f_n(x) = 0.$$

On suppose en outre que f_n est continue sur $[0, 1]$ et affine sur $[1/2n, 1/n]$.

1. Donner l'expression de $f_n(x)$ pour $1/2n \leqslant x \leqslant 1/n$.

2. Soit $x > 0$ fixé. Quelle est la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

3. Calculer

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

4. On fixe $x \in \,]0, 1/2]$.

4. a. Démontrer que la suite de terme général $f_k(x)$ passe par un maximum.

On posera dans la suite

$$g(x) = \max_{k \in \mathbb{N}^*} f_k(x).$$

4. b. On suppose (dans cette seule question) qu'il existe un indice n_0 tel que $x = 1/2n_0$. Quel vaut alors $g(x)$?

4. c. Démontrer qu'il existe un, et un seul, entier n tel que

$$\frac{1}{2(n+1)} < x \leqslant \frac{1}{2n}.$$

4. d. On *admet* alors que

$$g(x) \geqslant \frac{n^2(n+1)}{2n^2+2n+1}.$$

En déduire un minorant de

$$\int_{1/[2(n+1)]}^{1/(2n)} g(x)\,dx.$$

4. e. Quelle est la limite de

$$\int_{1/(2n)}^{1/2} g(x)\,dx$$

lorsque n tend vers $+\infty$?

Planche 8

Exercice 8.1

Soit E, un espace vectoriel de dimension 3. On considère un endomorphisme f de E tel que f^2 ne soit pas l'endomorphisme nul ($f^2 \neq \omega$) et que f^3 soit l'endomorphisme nul ($f^3 = \omega$).

1. Soit $x_0 \in \mathsf{E}$.

1. a. Si $f^2(x_0) = 0_{\mathsf{E}}$, la famille

$$\big(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\big)$$

est-elle une base de E ?

1. b. Si $f^2(x_0) \neq 0_{\mathsf{E}}$, la famille

$$\big(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\big)$$

est-elle une base de E ?

2. Soit $g \in L(\mathsf{E})$.

2. a. On suppose que $g = \alpha I_{\mathsf{E}} + \beta f + \gamma f^2$. Démontrer que $g \circ f = f \circ g$.

2. b. On suppose que $g \circ f = f \circ g$ et que $f^2(x_0) \neq 0_{\mathsf{E}}$.

Démontrer qu'il existe un, et un seul, triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$g(x_0) = \alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0).$$

En déduire que

$$g\big(f(x_0)\big) = \alpha f(x_0) + \beta f^2(x_0)$$

puis une expression simple de $g\big(f^2(x_0)\big)$.

En déduire enfin que

$$g(x) = \alpha x + \beta f(x) + \gamma f^2(x)$$

pour tout $x \in \mathsf{E}$.

3. On suppose que f est représenté dans une base $\mathscr{B}$ de E par la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} * & 1 & 2 \\ 0 & * & 3 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

3. a. Par quelles valeurs réelles remplacer les $*$ pour que f vérifie les hypothèses de l'exercice ?

3. b. Quel est le noyau de A^2 ?

4. On considère le code Python suivant.

```
import numpy as np
from random import randint

def base(A):
  X = np.zeros((3,1))
  for i in range(3):
    X[i,0] = randint(-5,5)
  return [X, A*X, A**2*X]
```

On rappelle que l'instruction `randint(-5,5)` retourne un entier pris au hasard entre -5 et 5 (inclus).

4. a. Expliquer ce code.

4. b. On applique cette fonction à la matrice A ci-dessus. Quelle est la probabilité pour que l'exécution de la commande `base(A)` échoue ?

Exercice 8.2

On pose $\mathsf{E} = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit f en posant

$$\forall\, P \in \mathsf{E},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)\, dt.$$

1. Vérifier que f est bien un endomorphisme de E.

2. Cet endomorphisme est-il inversible ? Quelle est sa trace ?

Planche 9

Exercice 9.1

On pose $\mathsf{E} = \mathbb{R}_6[X]$ et $\mathsf{F} = \mathbb{R}_3[X]$. Pour tout polynôme $P \in \mathsf{E}$, on note $f(P)$, le reste de la division euclidienne de P par le polynôme

$$Q_0 = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4.$$

1. Vérifier que f est une application linéaire de E dans F.

2. Calculer la matrice de f relative aux bases canoniques de E et F.

3. Identifier l'image de f.

4. Donner une base de $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 9.2

1. On lance un dé à six faces jusqu'à ce qu'on obtienne 6 et on note X, le nombre de lancers nécessaires.

Calculer $\mathbf{P}(X = n)$ en explicitant les hypothèses faites pour mener les calculs.

2. On lance deux dés à six faces jusqu'à ce qu'on obtienne au moins un 6 et on note N, le nombre de lancers nécessaires.

2. a. On modélise un lancer par un couple (X, Y) de deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Quelle est la probabilité de l'événement $[X = 6] \cup [Y = 6]$?

2. b. Calculer $\mathbf{P}(N = n)$ en explicitant les hypothèses faites pour mener les calculs.

3. On modélise l'expérience aléatoire par le code Python suivant.

```
import numpy as np
from random import randint

def de():
  return randint(1,6)

def lancer():
  return (de(), de())

def echec(L):


def N():
  n = 1
  while echec(lancer()):
    n += 1
  return n
```

3. a. Compléter le code de la fonction `echec(L)`.

3. b. On propose une autre modélisation informatique de l'expérience aléatoire.

```
def N2():
  x, y = 1, 1
  while de()!=6:
    x += 1
  while de()!=6:
    y += 1
  return min(x, y)
```

Justifier sommairement le bien-fondé de ce nouveau modèle. Comment comparer rigoureusement ces deux modèles ?

Exercice 9.3

Discuter, en fonction du paramètre $x \in \mathbb{R}_+$, la nature de la série

$$\sum \left(\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)x^n.$$

Planche 10

Exercice 10.1

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère les trois vecteurs

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= (-2, 3, -6)\\ \varepsilon_2 &= (3, 6, 2)\\ \varepsilon_3 &= (-6, 2, 3)\end{aligned}$$

et l'endomorphisme $u \in L(E)$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -6\\ 3 & 6 & 2\\ -6 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que ${}^tAA = I_3$. Que peut-on en déduire sur u ? sur la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$?
2. Caractériser le sous-espace vectoriel

$$F = \mathrm{Ker}(u - I_E).$$

3. Calculer une base du sous-espace vectoriel

$$G = \mathrm{Ker}(u + I_E)$$

et vérifier que $E = F \oplus G$.
4. Calculer $\det u$.

Exercice 10.2

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation

$$x^n - nx + 1 = 0$$

admet une, et une seule, solution $\alpha_n \in [0, 1]$.
2. Démontrer que $0 \leqslant na_n \leqslant 2$ pour tout $n \geqslant 2$.
3. En déduire que a_n^n tend vers 0.
4. Calculer un équivalent simple de a_n. La série $\sum a_n$ est-elle convergente ?

Exercice 10.3

1. On suppose que y est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ qui vérifie l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} \qquad (1)$$

pour tout $x > 0$. Démontrer que y vérifie aussi l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{-e^x}{4x\sqrt{x}} \qquad (2)$$

pour tout $x > 0$.
2. Résoudre l'équation (1).
3. Résoudre l'équation (2).

Planche 11

Exercice 11.1

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et la suite de terme général

$$t_n = \mathrm{tr}(A^n).$$

1. Calculer A^2 et vérifier que la famille (I_3, A, A^2) est libre.
2. Calculer A^3 puis exprimer A^3 comme une combinaison linéaire de I_3, A et A^2.
3. En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad t_{n+3} + t_{n+2} - t_{n+1} - t_n = 0$$

puis que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad t_n = 1 + 2 \cdot (-1)^n.$$

4. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}_+$ la série $\sum t_n x^n$ est-elle convergente ?

Exercice 11.2

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \, dt.$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
2. Expliciter deux fonctions affines f et g telles que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1+t^2}{2} \leqslant g(t) \leqslant 1$$

et que $f(1) = g(1) = 1$.
3. En déduire la limite de u_n.

Exercice 11.3

Pour tout $x \in I = [-\pi/2, \pi/2]$, on pose

$$f(x) = x\,\ell n(5 + \sin x).$$

1. Calculer les extrema des quantités

$$g(x) = \ell n(5 + \sin x) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{5 + \sin x}$$

pour $x \in I$.
2. En déduire que f réalise une bijection de I sur un intervalle qu'on explicitera. (On rappelle que $\ell n\, 2 \approx 0,7$.)
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x = 0$ de $f(x)$. Interpréter géométriquement ce développement.

Planche 12

Exercice 12.1

On considère l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.
1. Donner un vecteur directeur de $F = \mathrm{Ker}(s - I)$ et une équation cartésienne de $G = \mathrm{Ker}(s + I)$.
2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Expliciter une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$.
4. Interpréter géométriquement l'endomorphisme s.
5. Calculer la matrice (relative à la base canonique) de la projection p sur F parallèlement à G.

Exercice 12.2

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, un polynôme tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \geqslant 0.$$

On pose

$$Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}.$$

1. Démontrer que $P(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$.
2. Démontrer que Q est un polynôme. Comparer $\deg P$ et $\deg Q$.
3. Démontrer que $Q(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$.
4. Démontrer que Q, en tant que fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est minorée et atteint son minimum en un point x_0.
5. Que vaut $Q'(x_0)$? En déduire que $Q(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 12.3

Soit y, une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 y''(x) - 2y(x) = 3x^2.$$

1. Rappeler la formule de Taylor-Young. En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x = 0$ de $x^2 y''(x) - 2y(x)$.
2. Conclure.

Planche 13

Exercice 13.1

1. Pour $x \geqslant 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(-x \sin t)\, dt.$$

1. a. Démontrer que la fonction F est décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1. b. Démontrer que

$$\forall\, u, v \geqslant 0, \quad |e^{-u} - e^{-v}| \leqslant |u - v|.$$

1. c. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour $x \geqslant 0$, on pose

$$f(x) = 2x - F(x).$$

2. a. Calculer $f(0)$.

2. b. Démontrer que

$$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2t}{\pi} \leqslant \sin t$$

et en déduire que $f(\sqrt{\pi}/2) > 0$.

2. c. En déduire que la fonction f s'annule une fois, et une seule, sur le segment $[0, \sqrt{\pi}/2]$.

Exercice 13.2

Calculer un équivalent simple de

$$u_n = \frac{\sqrt{n} \sin {}^1\!/\!\sqrt{n}}{n + (-1)^n}$$

et en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 13.3

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'inverse de A (par un algorithme de type pivot de Gauss).

2. Donner une base du noyau et une base de l'image de la matrice $(A - I_3)$.

Solution 1.2

1. Cours : il existe une bijection entre les applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ et les matrices de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. Cours : Une matrice carrée est la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathscr{B}$ si, et seulement si, elle est inversible.
3. $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(0, 1, -2)$
4. $\mathrm{Ker}\, u = \mathbb{R} \cdot (2, 1, 0)$
5. $\mathrm{Im}\, u = [2x - 3y + 2z = 0]$

Solution 1.3

1. $F(x) = 2(1/e - e^{-\sqrt{x}})$
3.

```
def F(x):
  return 2*(np.exp(-1)-np.exp(-np.sqrt(x)))

plt.xlim(-.1,10)
plt.ylim(-1.5,1)
# Graphe de F
x = np.linspace(0, 1, 100)
plt.plot(x, F(x), 'b')
x = np.linspace(1, 10)
plt.plot(x, F(x), 'b')
# Axes
plt.plot([-.1, 10],[0.,0.],'k')
plt.plot([0.,0.],[-1.5,1.],'k')
# Origine du graphe
plt.plot([0.], [F(0.)], 'ro')
# Asymptote horizontale
plt.plot([-.1,10.],[F(100.), F(100.)],'k--')
```

Solution 2.1

2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & -8 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -3 & -7 & -3 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

3. b. $P = (X-1)(X+1)^2$

Solution 2.2

4. a. $F^{\perp} = \mathbb{R} \cdot (X^2 + 8X - 4)$
4. b.

$$\pi(X) = \frac{-2X^2 + 5X + 8}{21} \propto 3(X^2+1) - 5(X^2 - X - 1)$$

Solution 2.3

5.

```
def f(x):
  return np.log(1+np.exp(-x))

plt.axis([-5,5,-0.1,5])
# Graphe de f
x = np.linspace(-5, 5)
plt.plot(x, f(x))
# Tangente en (0,f(0))
x = np.linspace(-2,2,2)
plt.plot(x, np.log(2)-.5*x, 'b:')
# Asymptote oblique
x = np.linspace(-5,0,2)
plt.plot(x,-x,'k--')
# Asymptote horizontale
x = np.linspace(-5,5,2)
plt.plot(x, np.zeros_like(x), 'k')
```

Solution 3.1

2.

$$\mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution 3.2

2. b. $a = 0$, $b = 2$
3. Les primitives de f sont équivalentes à $\ell n\, x$ au voisinage de $+\infty$. Leurs graphes présentent une branche parabolique d'axe $(0x)$.

Solution 3.3

1. c. Les variables aléatoires X et S ne sont pas indépendantes car $\mathbf{Cov}(X, S) = \mathbf{V}(X) > 0$.
2. b. Les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.

Solution 4.1

1. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$
3. Si $m = 1$, l'ensemble des solutions est le plan affine $[x + y + z = 1]$.
Si $m = -2$, le système n'a aucune solution.
Dans tous les autres cas, le système admet une, et une seule, solution :

$$(x, y, z) = \Big(\frac{-(m+1)}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2}\Big).$$

Solution 4.2

1. On trouve respectivement $\ell n\, 3$, $2x$, $4x^2$ et $26x^3/3$.

Solution 4.3

3. c. $f(x) = \mathrm{Arctan}\, x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution 5.1

2.

$$P_m'(z) = 0 \iff \exists\, 1 \leqslant k < m-1, \quad z = \frac{1}{\zeta_{m-1}^k - 1}$$

où $\zeta_n = \exp(2i\pi/n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

4. Le polynôme P_m admet une racine multiple si, et seulement si, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $m = 1 + 6k$.
5. Il suffit d'insérer

```
if (np.abs(Pz)<1e-6) and (np.abs(dPz)<1e-6):
  L += [m]
  break
```

pour vérifier que z, qui est par construction une racine de P'_m, est aussi une racine de P_m.

Solution 5.2

1. $f(x) = -\sin x$

Solution 5.3

1. $\operatorname{Ker} M = [x + y + z + t = 0]$ et $\operatorname{Im} M = \mathbb{R} \cdot (a, 1, 1, a)$
2. $\operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker} M \iff a = -1$
3. $\operatorname{Im} M \perp \operatorname{Ker} M \iff a = 1$

Solution 6.2

2. Sauf erreur :

$$\frac{1}{x \ell n\, x} - \frac{1}{2x^2 \ell n\, x} - \frac{1}{2x^2 \ell n^2 x} + o\Big(\frac{1}{x^3}\Big)$$

3. La limite est égale à e.

Solution 6.3

3. La série converge absolument pour $0 \leqslant x < 1$ et diverge grossièrement pour $x \geqslant 1$.

Solution 7.1

3. a. En général, cette famille n'est pas une base de F. Mais, à une permutation près des vecteurs x_k, c'est bien une base de F !

Solution 7.2

1. $f_n(x) = n(1 - nx)$
3. L'intégrale est égale à $1/4$ indépendamment de n.
4. b. $g(1/2n_0) = n_0/2$
4. d.

$$\int_{1/[2(n+1)]}^{1/(2n)} g(x)\, dx \geqslant \frac{n}{2(2n^2 + 2n + 1)} \sim \frac{1}{4n}$$

4. e. Par comparaison avec les sommes partielles de la série harmonique, cette intégrale tend vers $+\infty$.

Solution 8.1

3. b. $\operatorname{Ker} A^2 = [z = 0]$
4. b. La procédure échoue à donner une base de E si, et seulement si, $X \in \operatorname{Ker} A^2$, c'est-à-dire $x_3 = 0$. Or la coordonnée `X[2,0]` prend la valeur 0 avec probabilité $1/11$: la procédure échoue en moyenne une fois sur onze.

Solution 8.2

2. Dans la base canonique, la matrice de f est triangulaire supérieure et tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, donc f est bien un automorphisme de E et sa trace est égale à $(n + 1)$.

Solution 9.1

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $(Q_0, X^5 - 1, X^6 - X)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

Solution 9.2

1. On suppose que les n lancers sont indépendants et que chacun d'eux amène 6 avec la probabilité $1/6$. Dans ces conditions,

$$[X = n] = [\text{échec}] \cap \cdots \cap [\text{échec}] \cap [\text{succès}]$$

donc

$$\mathbf{P}(X = n) = \Big(\frac{5}{6}\Big)^{n-1} \frac{1}{6}.$$

2. a.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = 6] \cup [Y = 6]) &= \mathbf{P}(X = 6) + \mathbf{P}(Y = 6) \\ &\quad - \mathbf{P}([X = 6] \cap [Y = 6]) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

2. b. Comme plus haut, on suppose que les n lancers sont indépendants. On vient de voir que chaque lancer conduit au succès avec la probabilité $11/36$. Comme plus haut,

$$\mathbf{P}(N = n) = \frac{11 \cdot 25^{n-1}}{36^n}.$$

3. a. D'après le code de `N()`, l'argument `L` est un tuple et il y a échec si, et seulement si, les deux éléments de ce tuple sont distincts de 6.

```
def echec(L):
  return (L[0]!=6) and (L[1]!=6)
```

3. b. Au lieu de lancer les deux dés ensemble, on lance d'abord le premier dé jusqu'à ce qu'on obtienne 6. On recommence ensuite avec le second dé et on retient le plus petit des deux nombres de lancers. On ne voit pas vraiment de différence avec ce qui précède.

Démonstration probabiliste : D'après la première question, les deux variables aléatoires simulées ici sont deux variables indépendantes X et Y qui suivent la loi géométrique de paramètre $1/6$ et on s'intéresse à la variable aléatoire $Z = \min\{X, Y\}$. En considérant les événements

$$[Z \geqslant n] = [X \geqslant n] \cap [Y \geqslant n],$$

on vérifie que Z suit la loi géométrique de paramètre

$$1 - \Big(\frac{5}{6}\Big)^2 = \frac{11}{36}.$$

Vérification empirique : on effectue un grand nombre de simulations et on compare les deux histogrammes pour vérifie que les deux simulations renvoient les mêmes valeurs avec des fréquences très proches. (Attention, l'exécution prend déjà pas mal de temps !)

```
L = [N() for i in range(100000)]
L2 = [N2() for i in range(100000)]

import matplotlib.pyplot as plt

B = list(range(10))
n1, b1, p1 = plt.hist(L, bins=B, normed=True)
n2, b2, p2 = plt.hist(L2, bins=B, normed=True)
print(n2-n1)
```

Solution 9.3

La série est absolument convergente pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et grossièrement divergente pour $x > 1$.

Solution 10.1

1. L'application u est un automorphisme orthogonal. La famille $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant 3}$ est une base orthonormée de E.
2. $F = [3x - y + 2z = 0]$
3. $G = \mathbb{R}\cdot(3,-1,2) = F^{\perp}$
4. Dans une base convenable, $\mathfrak{Mat}(u) = \operatorname{Diag}(1,1,-1)$ donc $\det u = -1$.

Solution 10.2

4. Comme $a_n \sim {}^1\!/_n$, la série $\sum a_n$ est divergente.

Solution 10.3

2. $y(x) = Ke^x + \sqrt{x}e^x$
3. $y(x) = (A + Bx)e^x + \sqrt{x}e^x$

Solution 11.1

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. La série $\sum t_n x^n$ converge si, et seulement si, $0 \leqslant x < 1$.

Solution 11.2

2. $f(t) = t$ et $g(t) = (1+t)/2$ conviennent (faire une figure).
3. Avec l'encadrement précédent, $u_n = \Theta({}^1\!/_n)$ donc u_n tend vers 0.

Solution 11.3

2. La dérivée $f'(x) = g(x) + x\cos x h(x)$ est clairement positive pour $x \geqslant 0$ et

$$f'(x) \geqslant \ell n\, 4 - \frac{x}{4} \geqslant 2\,\ell n\, 2 - \frac{\pi}{8} > 0$$

pour $-{}^{\pi}\!/_2 \leqslant x \leqslant 0$.

La fonction f réalise une bijection du segment I sur le segment $[-{}^{\pi}\!/_2\, \ell n\, 4, {}^{\pi}\!/_2\, \ell n\, 6]$.

3.

$$f(x) = x\,\ell n\, 5 + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{50} + o(x^3).$$

Solution 12.1

1. $\operatorname{Ker}(s - I) = \mathbb{R}\cdot(0,3,-1)$, $\operatorname{Im}(s + I) = [x - z = 0]$.
5. Comme s est une symétrie, une figure montre que

$$p = \frac{I+s}{2}$$

et sa matrice dans la base canonique est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 12.2

3. Aux voisinages de $\pm\infty$, on a $Q(x) \sim P(x)$.
5. On a $Q(x) = P(x) + Q'(x)$ (puisque $\deg P \leqslant n$) et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) \geqslant Q(x_0) = P(x_0) \geqslant 0.$$

Solution 12.3

1. Si $y(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$ au voisinage de $x = 0$, alors

$$x^2y''(x) - 2y(x) = -2a - 2bx + 4dx^3 + o(x^3).$$

2. Les hypothèses sont contradictoires. Les solutions de l'équation différentielle sont donc au plus de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de l'origine.

Solution 13.2

$u_n \sim {}^1\!/_n$

Solution 13.3

1.

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\operatorname{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R}\cdot(0,1,1)$$
$$\operatorname{Im}(A - I_3) = \operatorname{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$$