Composition de Mathématiques

Le 13 novembre 2013 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Pour réussir les épreuves d'un concours, il est d'abord indispensable de connaître le cours, de lire le rapport du concours, et d'exercer sa sagacité sur des problèmes des années antérieures. Il est important de s'entraîner à rédiger de façon claire et concise, en citant avec précision les théorèmes employés. Il est évidemment nécessaire de faire la différence entre une condition nécessaire et une condition suffisante. (Rapport Centrale-Supélec 2012)

Les calculatrices sont autorisées.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ Problème ❖

Partie A. Deux calculs d'intégrales

1. a. Démontrer que l'intégrale

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$$

existe au sens propre.

1. b. Pour tout $A > 0$, démontrer que l'intégrale

$$D(A) = \int_0^{A} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

existe au sens propre.

1. c. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que l'intégrale impropre

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

est convergente et qu'elle est égale à I_1.

2. a. Démontrer que l'application L, définie par

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-tx}\,dt$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. b. Démontrer que, pour tout $a > 0$, l'application L est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Que peut-on en déduire ?

2. c. Démontrer que les fonctions

$$[x \mapsto xL'(x)] \quad \text{et} \quad [x \mapsto xL(x)]$$

sont bornées sur $]0, +\infty[$. En déduire que L' et L tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. d. Calculer $L''(x)$ pour tout $x > 0$. En déduire $L'(x)$ pour tout $x > 0$, puis $L(x)$ pour tout $x \geqslant 0$ et enfin que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

3. a. Démontrer que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\ell n\, t}{t-1}\right]$$

est intégrable sur $]0, 1[$.

3. b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer

$$\int_0^1 t^k \,\ell n\, t\,dt.$$

3. c. En appliquant avec soin le théorème d'intégration terme à terme, démontrer que

$$\int_0^1 \frac{\ell n\, t}{t-1}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

On *pourra admettre*, si besoin est, que cette somme est égale à $\pi^2/6$.

Partie B. Quelques suites d'intégrales

4. Soit f, une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 f(t^n)\,dt.$$

4. a. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. b. On suppose en outre que la fonction

$$\left[u \mapsto \frac{f(u)}{u}\right]$$

est intégrable au voisinage de 0. Déterminer la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide d'un changement de variable.

4. c. En déduire un équivalent, exprimé sous la forme d'une intégrale, de

$$\int_0^1 \sin t^n\,dt$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

5. On suppose ici que f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

5. a. À l'aide d'un changement de variable, démontrer que la fonction $[t \mapsto f(t^n)]$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout $n \geqslant 1$.

5. b. Exprimer la limite de

$$n\int_1^{+\infty} f(t^n)\,dt$$

sous la forme d'une intégrale.
6. a. Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $A > 1$, exprimer l'intégrale

$$\int_1^A \sin t^n\,dt$$

à l'aide de A et de l'intégrale

$$\int_1^{A^n} \frac{1-\cos u}{u^2}\, u^{1/n}\,du.$$

☞ *On effectuera un changement de variable et une intégration par parties.*
6. b. En déduire que l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \sin t^n\,dt$$

est convergente pour tout $n \geqslant 2$.
6. c. Déterminer la limite de

$$n\int_0^{+\infty} \sin t^n\,dt$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Quelques séries de fonctions

Dans cette dernière partie, on étudie diverses séries de fonctions $\sum u_n$, dont la somme est toujours notée F.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

7. Dans cette question, on pose

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n.$$

7. a. Calculer $F(x)$ et $F'(x)$ pour $x \in]-1,1[$.
7. b. En déduire les limites de $F(x)$, de $(1-x)F(x)$, de $(1-x)F'(x)$ et de $(1-x)^2F'(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.
8. Dans cette question, on pose

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

8. a. Démontrer que F est définie sur $]-1,1[$.
8. b. Soit $0 < a < 1$. Expliciter une série convergente $\sum M_n$ telle que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [-a,a],\quad \left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \leqslant M_n.$$

8. c. Démontrer que

$$\forall\, 0 < x < 1,\ \forall\, n \geqslant 1,\quad \frac{1-x^n}{1-x} \leqslant n.$$

En déduire les limites de $F(x)$ et de $(1-x)F(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.
9. Dans cette question, x appartient à $]0,1[$ et on suppose que f est une fonction continue et croissante sur $[0,1[$, telle que $f(0) = 0$ et que $f(u)/u$ soit intégrable sur $]0,1[$.
9. a. Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} f(x^t)\,dt = \frac{-1}{\ln x}\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du.$$

9. b. Démontrer que

$$\int_n^{n+1} f(x^t)\,dt \leqslant f(x^n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x^t)\,dt$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.
9. c. En déduire que la série $\sum f(x^n)$ est convergente et encadrer sa somme $F(x)$ par deux intégrales.
9. d. Démontrer que

$$\lim_{\substack{x<1\\x\to 1}} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du.$$

10. Dans cette question, on pose

$$\forall\, x \in]-1,1[,\quad F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n).$$

10. a. Démontrer que F est définie sur $]-1,1[$.
10. b. **Pour 5/2 uniquement.** Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.
10. c. Démontrer que

$$\lim_{\substack{x<1\\x\to 1}} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}\,du.$$

Source : CCP 2013 PC

Extraits du rapport du jury

Consignes générales

Le sujet proposait l'étude et les limites de fonctions définies par des intégrales ou sommes de séries, ce qui permettait d'utiliser bon nombre de notions et résultats du programme d'analyse. À plusieurs endroits, il convenait de citer les résultats du cours et vérifier avec précision les hypothèses. Cela est souvent l'occasion d'apprécier les qualités du candidat ou au contraire de constater son manque de rigueur.

Le sujet comportait de nombreuses questions accessibles, mais la deuxième partie (sur la convergence dominée) a posé beaucoup de problèmes aux candidats. Les questions qui ont rapporté le plus de points sont les questions de cours, la convergence ou continuité d'intégrales à paramètre. En général, les candidats connaissent les théorèmes, même s'ils mélangent parfois les différentes notions ou si la formulation est approximative.

On peut être déçu chez certains du manque de technique pour étudier la convergence d'intégrales, ce qui laisse une mauvaise impression au correcteur dès le début de la copie.

Notons aussi une progression plutôt inquiétante du nombre de candidats commettant de graves erreurs d'appréciation sur les limites usuelles, l'intégrabilité en particulier des fonctions de référence de Riemann et qui multiplient les imprécisions. Par exemple, on voit proliférer les arguments erronés : un produit de fonctions intégrables est intégrable, ou une fonction intégrable est bornée. Par ailleurs, la nécessité de bien vérifier toutes les hypothèses d'un théorème cité est indispensable.

La quasi-totalité des copies est bien présentée, même s'il reste encore quelques copies quasi illisibles ou mal présentées. Rappelons que la présentation, la rédaction, la précision interviennent dans l'évaluation.

Signalons aux futurs candidats que la rigueur reste la clé de la réussite et qu'écrire n'importe quoi ne rapporte pas de points. Profitons-en pour redonner nos conseils :

– Bien lire l'énoncé et répondre explicitement aux questions posées. *Toute réponse à une question devrait se terminer par une réponse explicite, clairement identifiée* (soulignée ou encadrée) ;
– Rédiger les réponses, en explicitant les théorèmes ou arguments utilisés. *Un simple alignement de résultats ou de calculs, même « non faux », ne suffit pas la plupart du temps à avoir les points de la question.*

Remarques spécifiques

Passons aux remarques sur chacune des questions.

Partie A

1.a. C'est la première question et beaucoup de candidats montrent dès le début leur manque de rigueur. La continuité n'est pas toujours précisée ; confusion entre équivalents et développements limités, limites fausses en 0.

Manque de rigueur sur le signe dans les dominations, de plus, la référence aux fonctions de Riemann n'est pas nette la plupart du temps.

Notons la fréquente et classique erreur de majoration : $1 - \cos t \leqslant 1$.

1.b. Parfois des études et complications inutiles à la borne A de l'intégrale.

1.c. Trop d'intégrations par parties avec des intégrales divergentes. Dans nombre de copies, on n'utilise pas la bonne primitive de sin (pourtant apparente dans le texte) ce qui conduit à introduire et manipuler sans en avoir conscience des termes divergents.

2.a. Plutôt bien traitée, parfois des vérifications inutiles avec quelques rares candidats qui n'ont pas compris ou ne connaissent pas le théorème et montrent juste la convergence à x fixé.

2.b. Fréquemment, les candidats ne disent pas clairement que l'intégrande est de classe $\mathscr{C}^2$ par rapport au paramètre (ils mentionnent directement les dérivées partielles) et oublient souvent de vérifier la domination sur la dérivée partielle première, seule la dérivée partielle seconde étant dans ces cas-là dominée.

Les copies ne font pas apparaître assez clairement pourquoi on se limite d'abord à $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

La plupart des candidats gagnerait à structurer leur réponse. L'intégrabilité des fonctions de domination n'est pas souvent détaillée.

2.c. Montrer que deux fonctions proposées sont bornées a gêné les candidats et les arguments donnés sont souvent incomplets ou faux (on majore par une fonction non bornée).

Dans la majoration de $|xL(x)|$, les références aux inégalités fondamentales de l'intégration n'apparaissent pas assez clairement.

Certains candidats tentent un passage à la limite sous l'intégrale mais sans aucune justification.

Erreurs de raisonnement sur la limite de L ou L' en voulant raisonner par l'absurde : on lit *si* L *ne tend pas vers* 0*, alors* L *tend vers un réel* ℓ ou *vers l'infini*, sans penser que a priori L pourrait ne pas avoir de limite !

2.d. En dehors d'éventuelles erreurs de calcul, on trouve fréquemment la séparation de l'intégrale impropre (validée par le caractère $\mathscr{C}^2$) en deux intégrales impropres dont on oublie souvent de préciser l'existence.

Certains passent à la limite sur les intégrales sur un segment, avec une rédaction souvent maladroite : amalgame entre $L''(x)$ et l'intégrale partielle.

Le calcul de L'' est quand même souvent mené à bien, certains ayant pourtant des difficultés pour préciser la partie réelle du nombre complexe obtenu.

Le calcul de L' omet souvent qu'il y a, a priori, une constante d'intégration et le calcul de L peu traité ou faux. On a attribué très rarement tous les points de cette question.

3.a. Oubli fréquent de préciser la continuité sur l'ouvert. Equivalents incorrects, comparaisons sans tenir compte du signe, certains feignent d'ignorer que $\ell n\, x \leqslant 0$ pour x dans $]0, 1[$.

3.b. On rencontre fréquemment le prolongement par 0, sans tenir compte du cas $k = 0$. L'intégration par parties est souvent mal rédigée ou non mentionnée, l'étude en 0 peu détaillée.

3.c. Souvent bien traitée lorsque les deux questions précédentes sont correctes. Néanmoins, l'intégration terme-à-terme n'est pas toujours bien justifiée, la vérification de toutes les hypothèses n'est pas toujours faite.

Partie B

4.a. Résolutions quelquefois satisfaisantes, cependant la plupart des copies sont imprécises sur la gestion du cas $t = 1$ dans la convergence simple. Le plus souvent, on est incapable d'utiliser le théorème de convergence dominée, en particulier pour la domination.

4.b. La justification de l'existence d'une intégrale impropre pose problème dans la rédaction, même si les arguments importants sont cernés. Peu de candidats commencent par indiquer que la fonction est continue sur l'intervalle ouvert d'intégration. L'étude en 0, en majorité bien traitée, amène parfois à des arguments ou majorations fausses. L'étude en $+\infty$ est généralement plus satisfaisante, même si certains candidats veulent utiliser que la fonction tend vers 0 en $+\infty$.

4.c. Il est décevant de constater que trop peu de candidats font un lien avec la question précédente (avec une majoration) et beaucoup recommencent un raisonnement qui d'ailleurs ne s'adapte pas au voisinage de 0. La continuité de la fonction n'est quasiment jamais évoquée, son signe non plus, ce qui est gênant pour conclure.

Sur cette question et les suivantes, on a pu évaluer les différences entre les candidats. Les hypothèses, notamment de domination, doivent être vérifiées. Il est aussi curieux de voir des candidats rechercher, sans succès, une autre fonction dominante que celle donnée dans l'énoncé et qui pourrait convenir. Pour conclure sur l'équivalent, la non nullité de l'intégrale considérée est importante et en général cela est oublié.

5.a. A nouveau, le changement de variable est rarement justifié avec la précision nécessaire et attendue.

5.b. Application de la convergence dominée non vue ou traitée trop rapidement bien souvent.

6.a. Le changement de variable et l'intégration par parties rarement justifiés. Pas mal d'erreurs de calcul. La primitive adéquate de sinus n'est pas toujours identifiée, produisant un résultat sans rapport avec la question posée ou un raccord rocambolesque.

6.b. Quelques candidats pensent à justifier la convergence de l'intégrale, mais cela reste rare et souvent confus.

Partie C

7.a. Très peu de justifications, beaucoup d'erreurs sur F pour ceux qui ne se rendent pas compte du démarrage des indices à 1.

7.b. Question normalement facile et en effet souvent traitée, mais liée à la question précédente.

8.c. La majoration demandée a très souvent posé des problèmes et son exploitation reste délicate, avec pas mal d'abus. Peu de résultats complets pour justifier la limite cherchée.

9.a. Le changement de variable est trop rarement justifié et le caractère au moins $\mathscr{C}^1$ bijectif de la fonction utilisée peu signalé ou vérifié.

Sur quelques trop rares copies, il est bien annoncé comme stratégie pour démontrer la convergence. La plupart du temps, le candidat tente de justifier directement l'existence de $g(x)$ mais en tournant en fait autour du changement de variable sans le faire.

9.b. L'invocation d'une *comparaison série-intégrale* n'est certes pas sans rapport avec la question, cependant, la décroissance de l'application composée est rarement bien justifiée et la positivité de la fonction f n'est quasiment jamais précisée. Certains candidats refont la démonstration avec plus ou moins de rigueur sur la monotonie, le rôle joué par x pris dans $]0,1[$ est souvent oublié.

9.c. Au moins, l'existence des intégrales impropres est justifiée. On rencontre très rarement une justification à peu près correcte de l'existence de $F(x)$ qui nécessite ici de faire appel aux séries à termes positifs, donc de repérer que f est bien à valeurs positives. La plupart du temps, on a le raisonnement abusif consistant à dire que $F(x)$ existe car les intégrales impropres existent, voire pas de raisonnement du tout.

9.d. C'est une question en général mal rédigée. On rencontre l'encadrement mais la limite du terme de gauche (grâce à un changement de variable) est rarement justifiée.

Solution ❁ Séries de fonctions et intégrales

Partie A. Deux calculs d'intégrales

1. a. On sait que

$$1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2} \tag{1}$$

pour t voisin de 0.

❧ La fonction φ_1 définie par

$$\forall\, t > 0, \quad \varphi_1(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}$$

est continue sur $]0, +\infty[$, tend vers $1/2$ au voisinage de 0 d'après (1) et est $\mathcal{O}(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$, donc φ_1 est intégrable sur $]0, +\infty[$. L'intégrale I_1 existe donc bien au sens propre.

1. b. La fonction φ_2 définie par

$$\forall\, t > 0, \quad \varphi_2(t) = \frac{\sin t}{t}$$

est continue sur $]0, A]$ et tend vers 1 au voisinage de 0, donc φ_2 est intégrable sur $]0, A]$ et l'intégrale $D(A)$ existe au sens propre pour tout $A > 0$.

1. c. Soit $[A, B] \subset]0, +\infty[$. On intègre par parties :

$$\int_A^B \frac{\sin t}{t}\, dt = \Big[\frac{1 - \cos t}{t}\Big]_A^B + \int_A^B \frac{1 - \cos t}{t^2}\, dt.$$

Par (1),

$$\lim_{A \to 0} \frac{1 - \cos A}{A} = 0.$$

D'autre part,

$$\frac{1 - \cos B}{B} = \mathcal{O}(1/B) \xrightarrow[B \to +\infty]{} 0.$$

Et comme la fonction φ_1 est intégrable sur $]0, +\infty[$ par **1.a.**, on en déduit que l'intégrale impropre I_2 est convergente et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\, dt.$$

2. a. Pour tout $t \in I =]0, +\infty[$ et tout $x \in \Omega = [0, +\infty[$, on pose

$$f_1(x, t) = \varphi_1(t) e^{-xt}.$$

Régularité. Pour tout $t \in I$, il est clair que la fonction $[x \mapsto f_1(x, t)]$ est continue sur Ω.

Domination. Pour tout $x \in \Omega$ et tout $t \in I$,

$$\big|f_1(x, t)\big| \leqslant \big|\varphi_1(t)\big| \tag{2}$$

où le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en tant que fonction de t par **1.a.**

Intégrabilité. Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f_1(x, t)]$ est continue sur I et donc intégrable sur I d'après (2).

❧ Les hypothèses du théorème de continuité sont satisfaites, ce qui prouve que L est continue sur Ω.

2. b. On reprend les notations de la question précédente et on fixe $a > 0$.

Régularité. Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f_1(x, t)]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{V} = [a, +\infty[$ et

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, t) = \frac{\cos t - 1}{t}\, e^{-tx} \qquad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, t) = (1 - \cos t) e^{-tx}.$$

Intégrabilité. Soit $x \in \mathcal{V}$.

La fonction

$$\Big[t \mapsto \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, t)\Big]$$

est continue sur I, tend vers 0 au voisinage de 0 par (1) et est négligeable devant e^{-tx} lorsque t tend vers $+\infty$: elle est donc intégrable sur I.

La fonction

$$\Big[t \mapsto \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, t)\Big]$$

est continue sur I, tend vers 0 au voisinage de 0 et est dominée par e^{-tx} lorsque t tend vers $+\infty$: elle est donc intégrable sur I.

Domination. Pour tout $x \in \mathcal{V}$ et tout $t \in I$,

$$\Big|\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, t)\Big| \leqslant \Big|\frac{\partial f_1}{\partial x}(a, t)\Big| \quad \text{et} \quad \Big|\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, t)\Big| \leqslant \Big|\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(a, t)\Big|$$

et dans les deux cas, les majorants sont indépendants de x et intégrables sur I en tant que fonctions de t.

❧ Les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$ sont donc vérifiées sur $\mathcal{V} = [a, +\infty[$, ce qui prouve que L est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{V}$ et que, sur cet intervalle, les deux premières dérivées de L se calculent en dérivant sous le signe $\int$.

Comme $a > 0$ est arbitrairement choisi, on en déduit que L est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$L'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t - 1}{t}\, e^{-tx}\, dt$$

$$\text{et} \quad L''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-tx}\, dt$$

pour tout $x > 0$.

2. c. La fonction φ_1 est continue sur $]0, +\infty[$, elle tend vers une limite finie au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$ (voir **1.a.**), donc elle est bornée sur $]0, +\infty[$.

$$\exists\, K_1,\ \forall\, t > 0, \quad \big|\varphi_1(t)\big| \leqslant K_1.$$

De même, la fonction $[t \mapsto t\varphi_1(t)]$ est continue sur $]0, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$ par (1), donc elle est bornée sur $]0, +\infty[$.

$$\exists\, K_2,\ \forall\, t > 0, \quad \big|t\varphi_1(t)\big| \leqslant K_2.$$

Par **2.b.** et l'inégalité de la moyenne, pour tout $x > 0$,

$$\big|xL(x)\big| \leqslant \int_0^{+\infty} \big|\varphi_1(t)\big| e^{-tx}\, dt \leqslant K_1 \int_0^{+\infty} x e^{-tx}\, dt = K_1$$

et, de même,

$$\big|xL'(x)\big| \leqslant \int_0^{+\infty} \big|t\varphi_1(t)\big| e^{-tx}\, dt \leqslant K_2 \int_0^{+\infty} x e^{-tx}\, dt = K_2.$$

2. d. Pour tout $x > 0$, la fonction $[t \mapsto \cos t e^{-xt}]$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dominée au voisinage de $+\infty$ par la fonction $[t \mapsto e^{-xt}]$ (fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ de référence), donc elle est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par linéarité de l'intégrale et par **2.b.**,

$$L''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t)e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt}\, dt$$

La fonction $\left[t \mapsto e^{(i-x)t}\right]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $\mathfrak{Re}(i - x) = -x < 0$. Donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt}\, dt &= \mathfrak{Re}\Big(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\, dt\Big)\\ &= \mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{i+x}\Big) = \frac{x}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Bref :

$$\forall\, x > 0, \quad L''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

❧ Il existe donc une constante K_3 telle que

$$\begin{aligned}\forall\, x > 0, \quad L'(x) &= \ell n\, x - \frac{1}{2}\ell n(1+x^2) + K_3\\ &= -\frac{1}{2}\ell n\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big) + K_3.\end{aligned}$$

On en déduit que, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$xL'(x) = K_3 x + \mathcal{O}(1/x)$$

et donc que $K_3 = 0$ par **2.c.** Bref :

$$\forall\, x > 0, \quad L'(x) = \ell n\, x - \frac{1}{2}\ell n(1+x^2).$$

❧ Les primitives de ℓn sont connues. On calcule celles de $\ell n(1 + x^2)$ en intégrant par parties. On en déduit qu'il existe une constante K_4 telle que

$$\forall\, x > 0, \quad L(x) = -\frac{x}{2}\ell n\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big) - \operatorname{Arctan} x + K_4.$$

En particulier, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$xL(x) = x\big(K_4 - \operatorname{Arctan} x\big) + \mathcal{O}(1)$$

et on déduit de **2.c.** que $K_4 = \pi/2$. Bref :

$$\begin{aligned}\forall\, x > 0, \quad L(x) &= -\frac{x}{2}\ell n\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big) - \operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{2}\\ &= -\frac{x}{2}\ell n\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big) + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

(La seconde expression, plus simple, n'est pas plus utile.)

❧ On déduit de l'expression précédente de $L(x)$ que L tend vers $\pi/2$ au voisinage de 0. Or L est continue sur $[0, +\infty[$ par **2.a.**, donc $L(0) = \pi/2$ et, par **1.c.**,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

3. a. La fonction φ_3 définie par

$$\forall\, 0 < t < 1, \quad \varphi_3(t) = \frac{\ell n\, t}{t - 1}$$

est continue sur $]0, 1[$; équivalente à $-\ell n\, t$ au voisinage de 0 et tend vers 1 au voisinage de 1. Elle est donc intégrable sur $]0, 1[$.

3. b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $\left[t \mapsto t^k \ell n\, t\right]$ est intégrable sur $]0, 1[$, car elle est continue sur $]0, 1]$ et

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1, \quad |t^k \ell n\, t| \leqslant |\ell n\, t|.$$

❧ Soit $0 < \varepsilon < 1$. On intégre par parties sur $[\varepsilon, 1]$:

$$\int_\varepsilon^1 t^k \ell n\, t\, dt = -\frac{\varepsilon^{k+1}\ell n\, \varepsilon}{k+1} - \int_\varepsilon^1 \frac{t^k}{k+1}\, dt$$

et en faisant tendre ε vers 0, on en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 t^k \ell n\, t\, dt = \frac{-1}{(k+1)^2}.$$

3. c. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0, 1[$, on pose

$$u_k(t) = t^k \ell n\, t.$$

On a démontré à la question précédente que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction u_k est intégrable sur $]0, 1[$. En reconnaissant la série géométrique de raison $0 < t < 1$,

$$\forall\, t \in]0, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) = \frac{\ell n\, t}{1 - t}.$$

La série de fonctions $\sum u_k$ converge donc simplement sur $]0, 1[$ et sa somme est une fonction continue sur $]0, 1[$.

Enfin, d'après **3.b.**,

$$\int_0^1 \big|u_k(t)\big|\, dt = \int_0^1 -t^k \ell n\, t\, dt = \frac{1}{(k+1)^2} \sim \frac{1}{k^2}$$

ce qui prouve que la série $\sum \int_0^1 \big|u_k(t)\big|\, dt$ est convergente.

Comme les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont toutes vérifiées, on en déduit que la somme de la série de fonctions $\sum u_k$ est intégrable sur $]0, 1[$ (déjà prouvé au **3.a.**) ; que la série $\sum \int_0^1 u_k(t)\, dt$ est absolument convergente (conséquence évidente du **3.b.**) et que

$$\int_0^1 \frac{\ell n\, t}{1 - t}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 u_k(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{(k+1)^2}.$$

Partie B. Quelques suites d'intégrales

4. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad f_n(t) = f(t^n).$$

Par continuité de f, les fonctions f_n sont continues sur le segment $[0, 1]$, donc intégrables sur l'intervalle $I = [0, 1[$.

Pour tout $t \in I$, la suite $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et comme f est continue en 0, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction constante égale à $f(0)$.

Enfin, comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, elle est bornée : il existe donc une constante K_5 telle que

$$\forall\, u \in [0, 1], \quad \big|f(u)\big| \leqslant K_5$$

et donc telle que

$$\forall\, t \in [0, 1[, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|f_n(t)\big| \leqslant K_5.$$

Le majorant est indépendant de n et intégrable sur I (en tant que fonction constante sur un intervalle borné), donc la convergence est dominée.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 f(0)\,dt = f(0)$.

4. b. Soit $n \geqslant 1$, fixé. La fonction

$$\psi_n = \left[u \mapsto \sqrt[n]{u}\right]$$

réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,1[$ sur $]0,1[$.

La fonction g_n définie par

$$g_n(t) = nf(t^n)$$

est intégrable sur $]0,1[$, donc la fonction f_n définie par

$$f_n(u) = (g_n \circ \psi_n)(u) \cdot \psi_n'(u) = \frac{f(u)}{u}\sqrt[n]{u}$$

est intégrable sur $]0,1[$ et

$$nI_n = \int_0^1 g_n(t)\,dt = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\sqrt[n]{u}\,du.$$

☙ On a justifié ci-dessus l'intégrabilité des fonctions f_n sur l'intervalle $I =]0,1[$.

Il est clair que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction

$$\left[u \mapsto \frac{f(u)}{u}\right].$$

Enfin, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $u \in]0,1[$,

$$\left|f_n(u)\right| \leqslant \frac{\left|f(u)\right|}{u}$$

et comme le majorant est indépendant de n et intégrable sur $]0,1[$, la convergence est dominée.

On en déduit que

$$nI_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du.$$

4. c. On applique ce qui précède à $f(t) = \sin t$: la fonction sin est bien continue sur $[0,+\infty[$ et $\frac{\sin t}{t}$ est bien intégrable au voisinage de 0 par **1.b.** Enfin, comme $\frac{\sin t}{t} > 0$ sur $]0,1[$, alors

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt > 0$$

et d'après **4.b.**

$$\int_0^1 \sin t^n\,dt \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— Comme seule la suite nulle est équivalente à 0, il faut prendre soin de vérifier que l'intégrale n'est pas nulle pour conclure à un équivalent. (Si l'intégrale était nulle, on aurait seulement obtenu l'ordre de grandeur $o(1/n)$.)

5. a. Soit $n \geqslant 1$, fixé.

La fonction ψ_n réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$ et, d'après le théorème du changement de variable, la fonction

$$g_n = [t \mapsto f(t^n)]$$

est intégrable sur $[1,+\infty[$ si, et seulement si, la fonction f_n définie par

$$f_n(u) = n(g_n \circ \psi_n)(u) \cdot \psi_n'(u) = \frac{f(u)}{u}\sqrt[n]{u}$$

est intégrable sur $[1,+\infty[$ (puisque le facteur n est ici une constante non nulle).

Par continuité de f, la fonction f_n est continue sur $[1,+\infty[$ et lorsque u tend vers $+\infty$,

$$f_n(u) = \left|\begin{array}{ll} \mathcal{O}\big(f(u)\big) & \text{si } n = 1, \\ o\big(f(u)\big) & \text{si } n \geqslant 2. \end{array}\right.$$

Comme f est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit que f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc que $[t \mapsto f(t^n)]$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

5. b. Le changement de variable du **5.a.** montre que

$$n\int_1^{+\infty} f(t^n)\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\sqrt[n]{u}\,du.$$

On a démontré au **5.a.** que les fonctions f_n étaient intégrables sur $[1,+\infty[$. Il est clair, comme au **4.**, que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[1,+\infty[$ vers la fonction $[u \mapsto f(u)/u]$ et que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, u \in [1,+\infty[,\quad \left|f_n(u)\right| \leqslant \frac{\left|f(u)\right|}{u}.$$

Comme le majorant est intégrable sur $[1,+\infty[$ (d'après **5.a.**) et indépendant de n, la convergence est dominée. Par conséquent,

$$n\int_1^{+\infty} f(t^n)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,du.$$

6. a. On considère une fois de plus le changement de variable définie par ψ_n, qui réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[1,A]$ sur $[1,A^n]$. On en déduit que

$$\int_1^A \sin t^n\,dt = \frac{1}{n}\int_1^{A^n} \frac{\sin u}{u}\sqrt[n]{u}\,du.$$

(Les deux intégrales existent au sens propre, en tant qu'intégrales de fonctions continues sur un segment.)

On intègre ensuite par parties.

$$\int_1^A \sin t^n\,dt = \frac{1}{n}\left[\frac{1-\cos u}{u}\sqrt[n]{u}\right]_1^{A^n} + \frac{1}{n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\int_1^{A^n} \frac{1-\cos u}{u^2}\sqrt[n]{u}\,du.$$

6. b. Comme $n \geqslant 2$, alors

$$\frac{1-\cos A^n}{A^{n-1}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0.$$

D'autre part, la fonction

$$\left[u \mapsto \frac{1-\cos u}{u^2}\sqrt[n]{u}\right]$$

est intégrable sur $[1,+\infty[$, puisqu'elle est continue sur $[1,+\infty[$ et que

$$\frac{1-\cos u}{u^2}\sqrt[n]{u} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{u^{3/2}}\Big)$$

lorsque u tend vers $+\infty$ (l'entier $n \geqslant 2$ étant fixé).

On peut donc faire tendre A vers $+\infty$ dans l'expression du **6.a.**, ce qui prouve que l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \sin t^n \,dt$$

est convergente et que

$$\int_1^{+\infty} \sin t^n \,dt = \frac{\cos 1 - 1}{n} + \frac{n-1}{n^2}\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}\cdot u^{1/n}\,du$$

pour tout entier $n \geqslant 2$.

6. c. Pour tout $n \geqslant 2$, la fonction

$$f_n = \Big[u \mapsto \frac{1-\cos u}{u^2}\sqrt[n]{u}\Big]$$

est intégrable sur $[1,+\infty[$ (vu au **6.b.**) et la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[1,+\infty[$ vers la fonction φ_1 étudiée au **1.a.**

En outre,

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, u \geqslant 1, \quad \big|f_n(u)\big| \leqslant \big|f_2(u)\big|$$

ce qui prouve que la convergence est dominée. Par conséquent,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}\sqrt[n]{u}\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}\,du.$$

On déduit alors de **6.b.** que

$$n\int_1^{+\infty} \sin t^n\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos 1 - 1 + \int_1^{+\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}\,du = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

avec l'intégration par parties de **1.c.**

On déduit enfin de **4.c.** que

$$n\int_0^{+\infty} \sin t^n\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Partie C. Quelques séries de fonctions

7. a.

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\,, \quad F(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{et} \quad F'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

7. b. On en déduit que

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-}(1-x)F(x) = 1,$$

et que

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)F'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-}(1-x)^2F'(x) = 1.$$

8. a. Soit $x \in\,]-1,1[$. Comme $|x| < 1$, alors

$$\frac{x^n}{1-x^n} \sim x^n$$

lorsque n tend vers $+\infty$ et comme la série géométrique $\sum x^n$ est absolument convergente, on en déduit que la série

$$\sum \frac{x^n}{1-x^n}$$

est absolument convergente et donc que la somme $F(x)$ est bien définie.

8. b. On majore le numérateur et on minore le dénominateur :

$$\forall\, x \in [-a,a], \quad \Big|\frac{x^n}{1-x^n}\Big| \leqslant \frac{a^n}{1-a^n}.$$

Le majorant est indépendant de x et d'après **8.b.**, la série $\sum \frac{a^n}{1-a^n}$ est absolument convergente (car $0 < a < 1$). On peut donc choisir

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad M_n = \frac{a^n}{1-a^n}.$$

Remarque.— Cette majoration prouve que la série de fonctions considérée converge normalement sur le segment $[-a,a]$.

8. c. Comme $F(x)$ est une somme de termes positifs, elle est minorée par le premier terme de cette somme :

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad F(x) \geqslant \frac{x}{1-x}$$

ce qui prouve que $F(x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 1.

- On reconnaît une somme géométrique : pour tout $0 < x < 1$,

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1} \leqslant 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

- D'après cette majoration,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, 0 < x < 1, \quad \frac{1-x}{1-x^n}\cdot x^n \geqslant \frac{x^n}{n}$$

et en sommant sur n,

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad (1-x)F(x) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Comme le minorant est une somme de termes positifs, on en déduit que

$$\forall\, N \geqslant 1,\ \forall\, 0 < x < 1, \quad (1-x)F(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{x^n}{n}.$$

Soit $A > 0$. On sait que les sommes partielles de la série harmonique tendent vers $+\infty$: il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{N_A}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{N_A}\frac{1}{n} \geqslant 2A > 0.$$

Par conséquent, il existe $0 < \alpha < 1$ tel que

$$\forall\, x \in [1-\alpha, 1[\,, \quad (1-x)F(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N_A}\frac{x^n}{n} \geqslant A,$$

ce qui prouve que $(1-x)F(x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 1.

9. a. On pense au changement de variable $u = x^t$, c'est-à-dire $t = \frac{\ell n\, u}{\ell n\, x}$. Comme $\ell n\, x < 0$, la fonction

$$\psi = \left[u \mapsto \frac{\ell n\, u}{\ell n\, x}\right]$$

réalise une bijection (décroissante) de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$. Comme

$$dt = \psi'(u)\, du = \frac{du}{u\, \ell n\, x},$$

on déduit du théorème de changement de variable que la fonction $[t \mapsto x^t]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, la fonction

$$\left[u \mapsto \frac{f(u)}{u\, \ell n\, x}\right]$$

est intégrable sur $]0,1[$. Comme $\ell n\, x$ est un facteur constant, on déduit des hypothèses du **9.** que la fonction $[t \mapsto x^t]$ est bien intégrable sur $]0,+\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} f(x^t)\, dt = \int_1^0 \frac{f(u)}{u\, \ell n\, x}\, du = \frac{-1}{\ell n\, x} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\, du.$$

9. b. Comme $\ell n\, x < 0$, la fonction $\left[t \mapsto x^t = e^{(\ell n\, x)t}\right]$ est continue et décroissante sur $[0,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$\forall\, t \in [n, n+1], \quad x^t \leqslant x^n.$$

Comme la fonction f est croissante, on en déduit que

$$\forall\, t \in [n, n+1], \quad f(x^t) \leqslant f(x^n)$$

et donc que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_n^{n+1} f(x^t)\, dt \leqslant \int_n^{n+1} f(x^n)\, dt = f(x^n)$$

puisque l'intégration conserve les inégalités.

☙ On en déduit de manière analogue que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad f(x^n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x^t)\, dt.$$

9. c. Par **9.a.**, la fonction $[t \mapsto f(x^t)]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Par conséquent, il existe une constante M telle que

$$\forall\, N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(x^t)\, dt = \int_0^N f(x^t)\, dt \leqslant M$$

(relation de Chasles). Comme la fonction f est positive, la série $\sum f(x^n)$ est une série de terme général positif dont les sommes partielles sont majorées :

$$\forall\, N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} f(x^n) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(x^t)\, dt \leqslant M$$

ce qui prouve que cette série est convergente.

☙ En outre, la somme de cette série peut-être encadrée en sommant les encadrements établis à la question précédente.

$$\int_1^{+\infty} f(x^t)\, dt \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x^t)\, dt$$

9. d. Par **9.a.** et la relation de Chasles,

$$\int_1^{+\infty} f(x^t)\, dt = \frac{-1}{\ell n\, x} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\, du - \int_0^1 f(x^t)\, dt.$$

Comme $0 \leqslant x^t \leqslant 1$ pour tout $0 < x < 1$ et tout $t \in [0,1]$ et comme la fonction f est croissante et positive,

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad 0 \leqslant \int_0^1 f(x^t)\, dt \leqslant f(1).$$

On peut alors déduire de l'encadrement du **9.c.** et de **9.a.** que

$$(1-x)F(x) = \frac{x-1}{\ell n\, x} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\, du + \mathcal{O}(1-x).$$

Pour $x = 1+h$ tendant vers 1,

$$\frac{x-1}{\ell n\, x} = \frac{h}{\ell n(1+h)} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$$

et finalement :

$$\lim_{\substack{x<1 \\ x \to 1}} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\, du.$$

10. a. Pour $|x| < 1$, la suite géométrique $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 donc $\ell n(1-x^n) \sim x^n$ et comme la série géométrique $\sum x^n$ est absolument convergente, la série $\sum \ell n(1-x^n)$ est absolument convergente.

10. b. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in]-1,1[$, on pose

$$u_n(x) = -\ell n(1-x^n).$$

La série de fonctions $\sum u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ qui converge simplement sur $]-1,1[$ (question précédente).

Par ailleurs,

$$u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}$$

donc, pour tout $0 < a < 1$,

$$\forall\, x \in [-a,a], \quad \left|u_n'(x)\right| \leqslant \frac{na^{n-1}}{1-a} \sim na^{n-1}.$$

On a ainsi trouvé un majorant indépendant de x et comme la série $\sum na^{n-1}$ converge absolument (car $0 < a < 1$), cela prouve que la série dérivée $\sum u_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$. Par conséquent, la somme F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a,a]$ et comme a est arbitrairement choisi, alors la somme F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$. En outre,

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}.$$

10. c. La fonction f définie par $f(t) = -\ell n(1-t)$ est bien continue et croissante sur $[0,1[$ et nulle en 0. D'autre part, la fonction ${}^{f(t)}/_{t}$ est continue sur $]0,1[$, tend vers 1 au voisinage de 0 et est équivalente à $-\ell n(1-t)$ au voisinage de 1 : la fonction ${}^{f(t)}/_{t}$ est donc intégrable sur $]0,1[$. On peut donc appliquer les résultats établis au **9.**

En particulier, par **9.d.**,

$$\lim_{\substack{x<1 \\ x \to 1}} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{-\ell n(1-t)}{t}\, dt = \int_0^1 \frac{\ell n\, u}{u-1}\, du$$

avec le changement de variable affine $u = 1-t$.