Composition de Mathématiques

Le 27 novembre 2013 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Calculatrices autorisées.

❖ Problème ❖

Toutes les fonctions considérées ici sont des fonctions à valeurs réelles.

Partie A. Préliminaire

Les résultats de cette partie seront utilisés plusieurs fois dans la suite du problème.

1. Fonction Γ d'Euler.

1. a. Soit $x \in]0, +\infty[$. Démontrer que la fonction $\left[t \mapsto e^{-t}t^{x-1}\right]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\, dt$$

pour tout $x \in]0, +\infty[$.

1. b. Établir, pour tout $x > 0$, une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. On rappelle que la fonction ζ de Riemann est définie par

$$\forall\, x \in]1, +\infty[, \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On sait par exemple que $\zeta(2) = \pi^2/6$ et que $\zeta(4) = \pi^4/90$. On se propose de calculer des valeurs approchées de $\zeta(x)$.

2. a. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]1, +\infty[$. On pose

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = \zeta(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}.$$

Démontrer que

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}.$$

2. b. Un entier $p \geqslant 2$ et un réel $\varepsilon > 0$ étant fixés, trouver une valeur de l'entier n telle que

$$\left|\zeta(p) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\right| \leqslant \varepsilon.$$

2. c. Écrire une procédure en langage Maple permettant de calculer une valeur approchée de $\zeta(7)$ à 10^{-6} près. Donner une telle valeur en utilisant votre calculatrice.

Partie B. Suites de fonctions

*On veillera à **ne pas** utiliser le théorème de convergence dominée pour répondre aux questions **3.** à **6.***

3. Démontrer le théorème suivant en justifiant notamment l'intégrabilité de f sur $[a, b]$.

> **Théorème 1**
>
> *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues sur le segment $[a, b]$, qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f. Alors*
>
> $$\int_a^b f_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\, dt.$$

4. Exemples et contre-exemples.

4. a. Déterminer une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et affines par morceaux sur $[0, 1]$, qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f intégrable sur $[0, 1]$ mais telle que la suite réelle de terme général $\int_0^1 f_n(t)\, dt$ ne converge pas vers $\int_0^1 f(t)\, dt$.

☞ *On pourra raisonner graphiquement.*

4. b. Déterminer une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[0, 1]$ qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f intégrable sur $[0, 1]$ telle que

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt$$

sans que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f.

5. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.

☞ *On pourra utiliser la formule de Stirling.*

Le théorème 1 peut-il s'étendre au cas d'un intervalle non borné ?

6. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et intégrables sur un intervalle borné I, qui converge uniformément sur I vers une fonction f.

6. a. Démontrer qu'il existe un entier p tel que

$$\forall\, x \in I, \quad \left|f(x)\right| \leqslant 1 + \left|f_p(x)\right|.$$

En déduire que f est intégrable sur I.

6. b. Démontrer que

$$\int_I f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\, dx.$$

7. On rappelle le théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions.

Théorème 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle* I*, qui converge simplement sur* I *vers une fonction* f *continue par morceaux sur* I*. S'il existe une fonction* φ *intégrable sur* I *telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in I, \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant \varphi(x),$$

alors la fonction f *est intégrable sur* I *et*

$$\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,dx.$$

Pourquoi est-il inutile de vérifier que les fonctions f_n sont intégrables sur I ? Démontrer que la fonction f est intégrable sur I.

8. Donner un exemple où le théorème 2 peut être appliqué sur un segment I alors que le théorème 1 ne peut être appliqué.

9. Calculer la limite de

$$\int_0^{+\infty} e^{\sin(x/n)} \frac{dx}{1+x^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Séries de fonctions

10. Déduire le théorème suivant du théorème 1.

Théorème 3

Si la série $\sum u_n$ *de fonctions continues sur le segment* $[a,b]$ *converge uniformément sur* $[a,b]$*, alors la série* $\sum \int_a^b u_n(x)\,dx$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) dx.$$

11. On rappelle l'énoncé du théorème lebesguien d'intégration terme à terme.

Théorème 4

Soit $\sum u_n$*, une série de fonctions intégrables sur l'intervalle* I *qui converge simplement sur* I *et dont la somme* S *est continue par morceaux sur* I*. Si la série numérique*

$$\sum \int_I \left|u_n(x)\right| dx$$

converge, alors la fonction S *est intégrable sur* I*, la série numérique* $\sum \int_I u_n(x)\,dx$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(x)\,dx = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\,dx.$$

On suppose que $\sum a_n$ est une série réelle absolument convergente.

11. a. Démontrer que la série de fonctions

$$\sum \frac{a_n x^n}{n!}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui est continue sur $\mathbb{R}$.

11. b. Démontrer que la fonction

$$\left[x \mapsto f(x)e^{-x}\right]$$

est intégrable sur $[0,+\infty[$ et exprimer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\,dx$$

comme la somme d'une série numérique.

12. On considère la série de fonctions $\sum(-1)^n x^n$ sur l'intervalle $I = [0,1[$.

12. a. Les hypothèses du théorème 3 sont-elles vérifiées ?

12. b. Les hypothèses du théorème 4 sont-elles vérifiées ?

12. c. Démontrer que la série numérique

$$\sum \int_0^1 (-1)^n x^n\,dx$$

converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n\,dx.$$

13. Déduire le théorème suivant du théorème 2.

Théorème de convergence croissante

On suppose que $\sum u_n$ est une série de fonctions positives et intégrables sur un intervalle I, qui converge simplement sur I et dont la somme S est intégrable sur I.

Alors la série numérique

$$\sum \int_I u_n(x)\,dx$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(x)\,dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) dx.$$

14. Application : théorie du rayonnement du corps noir.

14. a. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1}\,dt$$

après avoir justifié son existence.

14. b. La loi de Planck exprime la densité spectrale $u(\lambda)$ d'énergie électromagnétique rayonnée par un corps noir en fonction de la longueur d'onde λ et de la température T :

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B \lambda T}\right) - 1}$$

où h et k_B sont les constantes de Planck et de Boltzmann et c, la célérité de la lumière dans le vide.

La densité volumique totale d'énergie électromagnétique u, rayonnée sur tout le spectre des longueurs d'onde, s'écrit alors

$$u = \int_0^{+\infty} u(\lambda)\, d\lambda.$$

L'exitance totale M du corps noir et u sont liées par la relation

$$M = \frac{c}{4} u.$$

Démontrer la loi de Stefan :

$$M = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}\, T^4.$$

15. a. Soit $x > 1$. Exprimer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\, dt$$

en fonction de $\Gamma(x)$ et $\zeta(x)$.

15. b. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt$$

ainsi qu'une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1}\, dt.$$

Solution ❁ Échange de limites et d'intégrales

Partie A. Préliminaire

1. a. La fonction $[t \mapsto e^{-t}t^{x-1}]$ est

- continue sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$,
- équivalente à t^{x-1} au voisinage de 0 (et donc intégrable au voisinage de 0 puisque $x > 0$)
- et négligeable devant $e^{-t/2}$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées de t^{x-1} et $e^{t/2}$ (et donc intégrable au voisinage de $+\infty$).

Cette fonction est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

1. b. Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$ et intégrons par parties.

$$\int_a^b t^x e^{-t}\, dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_a^b + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\, dt$$

Par croissances comparées,

$$\lim_{b\to+\infty} b^x e^{-b} = 0$$

et comme $x > 0$,

$$\lim_{a\to 0} a^x e^{-a} = 0.$$

Par définition de l'intégrale sur $]0, +\infty[$, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

en faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$.

☙ On en déduit par récurrence que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a. L'expression $R_n(x)$ a bien un sens en tant que reste d'une série convergente.

☙ Pour tout $x > 1$, la fonction $[t \mapsto t^{-x}]$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Quels que soient les entiers $k > n \geqslant 1$,

$$\forall\, t \in [k-1, k], \quad 0 \leqslant \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{1}{t^x}.$$

Intégrons cet encadrement sur $[k-1, k]$:

$$\forall\, k > n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{1}{k^x} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^x}.$$

Sommons cet encadrement de $k = n+1$ à $k = p > n$:

$$\forall\, p > n, \quad 0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^x} \leqslant \int_n^p \frac{dt}{t^x}.$$

On a justifié l'existence du reste et on sait que la fonction $[t \mapsto t^{-x}]$ est intégrable sur $[n, +\infty[$ car $x > 1$. On peut donc faire tendre p vers $+\infty$:

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{(x-1)n^x}$$

cqfd.

2. b. D'après l'encadrement précédent, si

$$n \geqslant \frac{1}{\varepsilon^{1/(p-1)}},$$

alors

$$n^{p-1} \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \geqslant \frac{1}{(p-1)\varepsilon}$$

et donc $\left|R_n(x)\right| \leqslant \varepsilon$, ce qui signifie que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$$

est une valeur approchée de $\zeta(p)$ à ε près (par défaut, puisque le reste est positif).

2. c. D'après **2.b.**, si

$$n \geqslant \frac{1}{(10^{-6})^{1/6}} = 10,$$

alors $\sum_{k=1}^{n} k^{-7}$ est une valeur approchée de $\zeta(7)$ à 10^{-6} près.

☙ Voici une manière de faire le calcul. On demande de calculer la valeur exacte (= sous forme rationnelle) de la somme et on convertit ensuite cette valeur exacte en valeur approchée avec une erreur relative inférieure à 10^{-10} avec `evalf`.

```
S:=0:
for k from 1 to 10 do
  S:=S+k**(-7):
od:
evalf(S);
```

Application numérique : $\zeta(7) \approx 1,\ 008\,349$.

Partie B. Suites de fonctions

3. Les fonctions f_n sont continues sur le segment $[a, b]$, donc elles sont intégrables sur $[a, b]$.

Comme la fonction f est la limite d'une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$, elle est continue sur le segment $[a, b]$ et donc intégrable sur $[a, b]$.

L'énoncé a donc un sens.

☙ Par définition de la norme uniforme,

$$\forall\, t \in [a, b], \quad 0 \leqslant \left|f(t) - f_n(t)\right| \leqslant \|f - f_n\|_\infty$$

et par définition de la convergence uniforme,

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

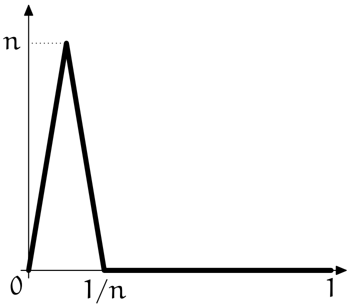
☙ D'après l'inégalité de la moyenne,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\, dt - \int_a^b f_n(t)\, dt\right| &\leqslant \int_a^b \left|f(t) - f_n(t)\right| dt \\ &\leqslant (b-a)\|f - f_n\|_\infty\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt.$$

4. a. Pour tout $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n dont le graphe est le suivant.



Pour tout $n \geqslant 1$, il est clair que $f_n(0) = 0$. Pour tout $t \in]0, 1]$ et tout $n > 1/t$, il est clair que $f_n(t) = 0$. Par conséquent, cette suite de fonctions continues sur $[0, 1]$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

Cependant,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

(aire d'un triangle) alors que l'intégrale de f est nulle.

REMARQUE.— Il fallait trouver un exemple pour lequel la convergence était simple sans être dominée.

4. b. Prenons $g_n = f_n/n$. Comme la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle, il en va de même pour la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$. La convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$ car

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \|g_n - f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} g_n(t) = 1.$$

Cependant,

$$\int_0^1 g_n(t)\,dt = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

REMARQUE.— Sur un segment, la convergence uniforme implique la convergence dominée, mais la réciproque est fausse (cf **8.**).

5. Par croissances comparées de x^n et de $n!$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction nulle.

❧ Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in I$,

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)$$

ce qui nous montre que la fonction positive f_n atteint son maximum en $x = n$. Donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \|f_n - 0\|_\infty = f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}.$$

La formule de Stirling nous assure que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,e^{-n} n^n$$

et donc que

$$\|f_n - 0\|_\infty \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur I vers la fonction nulle.

❧ Cependant, d'après **1.b.**, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1$$

ne tend pas vers 0. On ne peut donc étendre le théorème 1 au cas d'un intervalle non borné.

REMARQUE.— Autrement dit, la convergence uniforme implique la convergence en moyenne sur un intervalle borné, mais pas sur un intervalle non borné.

6. a. Soit $\varepsilon = 1 > 0$. Par convergence uniforme, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant p, \quad \|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

En particulier,

$$\forall\, x \in I, \quad \big|f(x) - f_p(x)\big| \leqslant 1$$

et par inégalité triangulaire,

$$\forall\, x \in I, \quad \big|f(x)\big| \leqslant 1 + \big|f_p(x)\big|.$$

❧ Comme l'intervalle I est *borné*, les fonctions constantes sont intégrables sur I. Comme f_p est intégrable sur I par hypothèse et que $\mathscr{L}^1(I)$ est un espace vectoriel, alors $1 + |f_p| \in \mathscr{L}^1(I)$ et par comparaison, f est intégrable sur I.

REMARQUE.— L'intervalle I est borné, mais ce n'est pas un segment (a priori). La continuité de f sur I ne suffit donc pas à prouver qu'elle est intégrable sur I.

6. b. On applique l'inégalité de la moyenne comme au **3.**

$$\begin{aligned}\left|\int_I f(t)\,dt - \int_I f_n(t)\,dt\right| &\leqslant \int_I \big|f(t) - f_n(t)\big|\,dt\\ &\leqslant |I|\,\|f - f_n\|_\infty\end{aligned}$$

où $|I|$ désigne la longueur (finie) de l'intervalle I.

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f, on en déduit que

$$\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,dx.$$

7. La fonction f_n est continue par morceaux sur I et

$$\forall\, x \in I, \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant \varphi(x).$$

Comme φ est intégrable sur I, la fonction f_n est intégrable sur I elle aussi.

❧ Comme la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f,

$$\forall\, x \in I, \quad \big|f(x)\big| = \lim_{n\to+\infty} \big|f_n(x)\big| \leqslant \varphi(x).$$

Or f est continue par morceaux sur I et φ est intégrable sur I par hypothèse, donc f est intégrable sur I elle aussi.

L'énoncé a donc un sens.

8. L'exemple donné au **4.b.** convient.

9. Posons $I = [0, +\infty[$ et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad f_n(x) = \frac{e^{\sin(x/n)}}{1 + x^2}.$$

Les fonctions f_n sont continues sur I et convergent simplement sur I vers une fonction continue sur I puisque

$$\forall\, x \in I, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Par ailleurs,

$$\forall\, x \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant \frac{e}{1+x^2}$$

et la fonction $\left[x \mapsto \frac{e}{1+x^2}\right]$ est évidemment intégrable sur I.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{\sin(x/n)} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Partie C. Séries de fonctions

10. Sous les hypothèses du théorème 3, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[a,b]$ définies par

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f définie par

$$\forall\, x \in [a,b], \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

On peut donc déduire du théorème 1 que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k(x)\,dx.$$

Le théorème 1 nous assure donc que la série numérique

$$\sum \int_a^b u_k(x)\,dx$$

est convergente et nous donne en outre sa somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) dx.$$

11. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par croissances comparées de x^n et de $n!$, on sait que

$$a_n \frac{x^n}{n!} = o(a_n).$$

Or la série $\sum a_n$ est absolument convergente, donc la série

$$\sum a_n \frac{x^n}{n!}$$

est absolument convergente. La somme $f(x)$ de cette série est donc définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

❧ Cela signifie que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n/n!$ est infini. On sait que la somme d'une série entière est continue sur l'intervalle ouvert de convergence, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

❧ **Autre méthode.** Pour tout $A > 0$,

$$\sup_{x\in[-A,A]} \left|a_n \frac{x^n}{n!}\right| \leqslant |a_n| \frac{A^n}{n!}$$

et, pour des raisons déjà exposées, la série

$$\sum |a_n| \frac{A^n}{n!}$$

est convergente, donc cette série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ converge normalement sur tout segment $[-A,A]$ et sa somme est donc continue sur $\mathbb{R}$.

(Ce n'est pas une autre méthode, on redémontre ici une partie du cours sur les séries entières.)

11. b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = f(x)e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{a_n}{n!} x^n e^{-x}}_{u_n(x)}.$$

D'après **1.a.**, les fonctions u_n ainsi définies sont intégrables sur $I = [0,+\infty[$.

La série $\sum u_n$ de fonctions continues sur I converge simplement sur I vers une fonction S continue sur I.

D'après **1.b.**,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_I \left|u_n(x)\right| dx = |a_n|$$

et on a supposé que la série $\sum |a_n|$ était convergente.

On peut donc appliquer le théorème 4. La fonction

$$S = \left[x \mapsto f(x)e^{-x}\right]$$

est donc intégrable sur I et d'après **1.b.**

$$\int_0^{+\infty} S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

12. a. La suite de fonctions

$$u_n = [x \mapsto (-1)^n x^n]$$

ne converge pas uniformément sur $I = [0,1[$ (exemple de référence), donc la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur I. On ne peut donc pas appliquer le théorème 3.

12. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \left|u_n(x)\right| dx = \frac{1}{n+1}$$

et la série $\sum \frac{1}{n+1}$ est divergente. On ne peut donc pas appliquer le théorème 4.

REMARQUE.— Pour cette question et la précédente, il est absurde de faire la liste des hypothèses qui sont vérifiées la série $\sum u_n$!

12. c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{n+1},$$

donc la série numérique

$$\sum \int_0^1 (-1)^n x^n\,dx$$

converge d'après le critère spécial des séries alternées.

❧ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $I = [0,1[$ définies par

$$f_n = \left[x \mapsto \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right]$$

converge simplement sur I vers la fonction

$$f = \left[x \mapsto \frac{1}{1+x}\right]$$

qui est continue sur I.

De plus,

$$\forall\, x \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left|f_n(x)\right| = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} \leqslant 2$$

et la fonction constante $[x \mapsto 2]$ est intégrable sur l'intervalle borné I.

On peut donc appliquer le théorème 2 à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

c'est-à-dire (comme au **10.** et bientôt au **13.**)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n\,dx$$

ou encore que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ell n\, 2.$$

13. On considère une fois de plus la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Comme les u_k sont intégrables sur I, elles sont en particulier continues par morceaux sur I et les fonctions f_n sont elles aussi continues par morceaux sur I.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite des sommes partielles de la série de fonctions $\sum u_n$, converge simplement sur I vers la fonction S qui est continue par morceaux sur I (puisqu'elle est intégrable sur I).

De plus, comme $u_n(x) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in I, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant S(x)$$

et la fonction S est intégrable sur I.

On peut donc appliquer le théorème 2 avec $\varphi = S$. La suite numérique de terme général

$$\int_I f_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_I u_k(x)\,dx$$

est donc convergente et tend vers

$$\int_I S(x)\,dx.$$

Autrement dit, la série numérique

$$\sum \int_I u_n(x)\,dx$$

est convergente et sa somme est égale à

$$\int_I S(x)\,dx = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\,dx.$$

REMARQUE.— Au lieu de vérifier l'intégrabilité sur I des fonctions f_n, il suffit de vérifier qu'elles sont continues par morceaux sur I. En effet, comme elles sont toutes positives,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant u_n(t) \leqslant S(t)$$

et comme S est intégrable sur I par hypothèse, les fonctions u_n sont alors intégrables sur I.

Il est étonnant que le sujet cherche des hypothèses minimales pour le théorème 2 mais pas pour le théorème 4 !

14. a. La fonction

$$S = \left[t \mapsto \frac{t^3}{e^t - 1}\right]$$

est

- continue sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$,
- équivalente à t^2 au voisinage de 0 (donc intégrable au voisinage de 0) et
- équivalente à $t^3 e^{-t}$ au voisinage de $+\infty$ (donc intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après **1.a.**),

donc S est intégrable sur I.

❧ Pour tout $t \in I$,

$$S(t) = \frac{t^3 e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{t^3 e^{-nt}}_{u_n(t)}$$

(somme d'une série géométrique de raison $0 < e^{-t} < 1$).

D'après le changement de variable $x = nt$, les fonctions continues u_n ainsi définies sont intégrables sur I si, et seulement si, la fonction $[x \mapsto x^3 e^{-x}]$ est intégrable sur I, ce qui est vrai d'après **1.a.**

Donc la série $\sum u_n$ est une série de fonctions positives et intégrables sur I, qui converge simplement sur I et dont la somme S est intégrable sur I. On peut donc appliquer le théorème de convergence croissante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^3 e^{-nt}\,dt.$$

Mais d'après le changement de variable $x = nt$,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} u_1(x) \frac{dx}{n^4} = \frac{\Gamma(4)}{n^4}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1}\,dt = \Gamma(4)\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}$$

d'après **1.b.** et **2.**

14. b. Le changement de variable (décroissant)

$$x = \frac{hc}{k_B T \lambda}$$

est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $I =]0, +\infty[$ sur I et

$$dx = \frac{-hc}{k_B T}\,\frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

La fonction $[\lambda \mapsto u(\lambda)]$ est donc intégrable sur I si, et seulement si, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{x^3}{e^x - 1}\right]$$

est intégrable sur I, ce qu'on a vérifié précédemment.

Par conséquent, l'intégrale u a bien un sens et de plus

$$u = 8\pi hc\left(\frac{k_B T}{hc}\right)^4 \int_0^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{e^x - 1}.$$

D'après **14.a.**,

$$M = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2}\,T^4.$$

15. a. On généralise l'étude du **14.**

Pour $x > 1$ et $t \in I =]0, +\infty[$,

$$S(t) = \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{t^{x-1}e^{-nt}}_{u_n(t)}.$$

Pour les mêmes raisons, les fonctions u_n ainsi définies sont positives et intégrables sur I. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa somme S est intégrable sur I.

On peut donc appliquer le théorème de convergence croissante :

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt}\,dt.$$

On effectue encore le changement de variable $u = nt$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x)}{n^x} = \zeta(x)\Gamma(x).$$

15. b. Pour $x = 2$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,dt = \Gamma(2)\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour $x = 7$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1}\,dt = \Gamma(7)\zeta(7) = 720\zeta(7) \approx 726,\ 011$$

à 10^{-3} près par défaut.

REMARQUE.— Il est absurde de parler de valeur approchée sans donner un ordre de grandeur de l'erreur d'approximation commise ! Ici, on a multiplié une valeur approchée par défaut à 10^{-6} près par $720 \approx 10^3$: l'erreur d'approximation est donc multipliée par 10^3 (ou presque).