Composition de Mathématiques

Le 18 décmbre 2013 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Questions de cours ❖

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f.

1. a. Pourquoi la fonction f et les fonctions f_n sont-elles intégrables sur $[0,1]$?

1. b. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

2. a. Résoudre l'équation différentielle

$$tx'(t) - 2x(t) = 0 \qquad (E)$$

sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$.

2. b. Quelles sont les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ qui vérifient l'équation (E) sur $\mathbb{R}$?

2. c. Quelles sont les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ qui vérifient l'équation (E) sur $\mathbb{R}$?

3. Que dire d'une série entière $\sum a_n z^n$ qui converge :

3. a. normalement sur $\mathbb{R}$?

3. b. normalement sur tout segment $[-A, A] \subset \mathbb{R}$?

4. Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et intégrables sur $I = [0, +\infty[$ qui converge uniformément sur I vers une fonction f continue et intégrable sur I, mais telle que

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \quad \text{ne tende pas vers} \quad \int_0^{+\infty} f(t)\,dt.$$

5. On considère une série entière $\sum a_n z^n$ dont le rayon de convergence est infini et on note S, sa somme :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

5. a. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, r > 0, \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} S(re^{it})e^{-int}\,dt.$$

5. b. En déduire que, si S est bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante.

5. c. Si S est bornée sur $\mathbb{R}$, est-elle constante ?

❖ II – Problème ❖

Dans tout le problème, *on suppose que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle telle que le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n x^n$ *soit égal à* 1. *On notera* f, *la somme de cette série entière :*

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On dira que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie la propriété* $(\mathscr{P}_1)$ *lorsque la série numérique* $\sum a_n$ *converge et qu'elle vérifie la propriété* $(\mathscr{P}_2)$ *lorsque la fonction* f *admet une limite finie, notée* $f(1^-)$, *au voisinage gauche de* 1.

Partie A.

1. Illustrer par des exemples *vus en cours* chacune des situations suivantes.

1. a. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

1. b. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(\mathscr{P}_2)$, mais pas $(\mathscr{P}_1)$.

1. c. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne vérifie ni $(\mathscr{P}_1)$, ni $(\mathscr{P}_2)$.

1. d. La série entière $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

2. On suppose que la série $\sum a_n$ converge absolument. Démontrer que la fonction f admet une limite finie à gauche en 1 et que

$$f(1^-) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

3. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, calculer la somme suivante.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$$

Partie B. Théorème d'Abel

4. On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété $(\mathscr{P}_1)$ et nous allons en déduire qu'elle vérifie la propriété $(\mathscr{P}_2)$ (*théorème d'Abel*).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \quad \text{et} \quad \forall\, x \in [0,1], \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k.$$

4. a. Simplifier l'expression suivante.

$$\sum_{p=1}^{+\infty}(r_{n+p-1}-r_{n+p})x^{n+p}$$

4. b. En déduire que

$$R_n(x)=r_n x^{n+1}+x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{+\infty}r_{n+p}x^{p-1}$$

pour tout $x\in[0,1[$.

4. c. Soit $\varepsilon>0$. Justifier l'existence d'un entier $n_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall\,n\geqslant n_0,\ \forall\,p\in\mathbb{N},\quad |r_{n+p}|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

puis que

$$\forall\,n\geqslant n_0,\ \forall\,x\in[0,1],\quad \big|R_n(x)\big|\leqslant\varepsilon.$$

4. d. En déduire que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que

$$f(1^-)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.$$

5. Que dire de la série $\sum a_n$ si f tend vers $+\infty$ au voisinage gauche de 1 ?

6. Exemple. Démontrer la formule du développement en série entière de la fonction Arctan au voisinage de 0 et appliquer le théorème d'Abel pour exprimer π comme la somme d'une série.

7. Application.

7. a. Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-il une série convergente ?

☞ *On étudiera le cas où*

$$\forall\,n\geqslant 1,\quad u_n=v_n=\frac{(-1)^n}{n^{1/4}}.$$

7. b. Soient $\sum u_n$ et $\sum v$, deux séries convergentes. On note $\sum w_n$, leur produit de Cauchy et on suppose que $\sum w_n$ est convergente. Déduire du théorème d'Abel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}w_n=\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\Big).$$

Partie C. Réciproque du théorème d'Abel

8. Démontrer que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

9. On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et qu'elle vérifie $(\mathscr{P}_2)$. Vérifier que

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n}a_k\leqslant f(1^-)$$

et en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(\mathscr{P}_1)$.

Partie D. Théorème de Littlewood

On **admet** le théorème suivant, attribué à John E. Littlewood.

Théorème 1.— *Si la fonction f admet une limite finie au voisinage gauche de 1 et si $a_n=\mathcal{O}(1/n)$, alors la série $\sum a_n$ converge.*

Étant donné un entier $p\geqslant 1$, on considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ de période p telle que

$$\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\quad \varepsilon_n\in\{-1;1\}.$$

On pose $\eta_n=\varepsilon_n/n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\eta_n x^n\quad\text{et}\quad g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\varepsilon_n x^{n-1}.$$

10. Démontrer que les fonctions f et g sont définies sur $]-1,1[$. Établir un lien entre les fonctions f et g.

11. Démontrer que la série $\sum\eta_n$ converge si, et seulement si, la fonction f admet une limite finie au voisinage gauche de 1.

12. Exprimer g sous la forme d'une fonction rationnelle.

13. À l'aide des deux questions précédentes, démontrer que la série harmonique

$$\sum\frac{1}{n}$$

est divergente et que la série harmonique alternée

$$\sum\frac{(-1)^n}{n}$$

est convergente (en précisant la valeur de sa somme).

14. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la somme

$$\sum_{i=1}^{p}\varepsilon_i$$

pour que la série $\sum\eta_n$ converge.

Que peut-on en conclure lorsque la période p est un entier impair ?

15. Exemple. On suppose dans cette question que $p=6$ et que

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1,\quad \varepsilon_4=\varepsilon_5=\varepsilon_6=-1.$$

Calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Solution I ❁ Questions de cours

1. a. Les fonctions f_n sont continues, donc intégrables sur le segment $[0,1]$.

Par convergence uniforme, la fonction f est elle aussi continue, donc intégrable sur le segment $[0,1]$.

1. b. Par linéarité de l'intégrale et l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f_n(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt\right| &= \left|\int_0^1 f_n(t) - f(t)\,dt\right|\\ &\leqslant \int_0^1 \big|f_n(t) - f(t)\big|\,dt.\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$,

$$\big|f_n(t) - f(t)\big| \leqslant \|f_n - f\|_\infty,$$

donc

$$\left|\int_0^1 f_n(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \|f_n - f\|_\infty\,dt = \|f_n - f\|_\infty$$

et $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 par convergence uniforme : le résultat est démontré.

2. a. On *connaît* la solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sur un intervalle où l'équation est résoluble (c'est-à-dire sur lequel le facteur de $x'(t)$ ne s'annule pas). Par conséquent :

– La fonction f est une solution sur I_1 si, et seulement si, il existe une constante K_1 telle que

$$\forall\, t < 0, \quad f(t) = K_1 t^2.$$

– La fonction f est une solution sur I_2 si, et seulement si, il existe une constante K_2 telle que

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = K_2 t^2.$$

2. b. Si f est une solution sur $\mathbb{R}$, alors il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall\, t < 0, \quad f(t) = K_1 t^2 \quad \text{et} \quad \forall\, t > 0, \quad f(t) = K_2 t^2.$$

Par continuité de f, il faut en outre que $f(0) = 0$.

Réciproquement, quelles que soient les valeurs de K_1 et K_2, la fonction f définie ci-dessus est continue sur $\mathbb{R}$ (continue sur I_1, continue sur I_2 et continue en 0) et de plus

$$\forall\, t < 0, \quad f'(t) = 2K_1 t \quad \text{et} \quad \forall\, t > 0, \quad f'(t) = 2K_2 t.$$

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée admet une limite finie (nulle) en $t = 0$: la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier $f'(0) = 0$.

2. c. Toute solution de classe $\mathscr{C}^2$ est aussi une solution de classe $\mathscr{C}^1$. Mais la dérivée seconde doit aussi être continue en 0 et

$$\forall\, t < 0, \quad f''(t) = 2K_1 \quad \text{et} \quad \forall\, t > 0, \quad f''(t) = 2K_2$$

donc il faut que $K_1 = K_2$.

Réciproquement, quelle que soit la constante K, la fonction $f = \big[t \mapsto Kt^2\big]$ est une solution de (E) qui est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3. a. Il faut que la fonction $[z \mapsto a_n z^n]$ soit bornée sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc que $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Réciproquement, si $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, il est clair que la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Bilan : une série entière converge normalement sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, sa somme est constante sur $\mathbb{R}$.

3. b. Si une série entière converge normalement sur tout segment $[-A, A]$, alors elle converge simplement sur $\mathbb{R}$ et son rayon de convergence est infini.

Réciproquement, si le rayon de convergence d'une série entière est infini, on *sait* qu'elle converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

4. La fonction $g = [t \mapsto te^{-t}]$ est continue et intégrable sur $I = \mathbb{R}_+$. Le changement de variable *affine* $\varphi(t) = t/n$ montre alors que, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction

$$f_n = \left[t \mapsto \frac{t}{n^2} e^{-t/n}\right]$$

est continue et intégrable sur I et que

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{n} e^{-t/n} \frac{dt}{n} = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = \Gamma(2) = 1.$$

La fonction g est continue sur I et tend vers 0 au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$, donc g est bornée sur I et

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t \geqslant 0} \frac{t}{n^2} e^{-t/n} = \sup_{u \geqslant 0} \frac{u}{n} e^{-u} = \frac{1}{n}\|g\|_\infty,$$

ce qui prouve que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle, alors que l'intégrale de f_n sur I ne tend pas vers 0.

5. a. Comme le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est infini et que la fonction $\big[t \mapsto re^{it}\big]$ est bornée (quelle que soit la valeur choisie pour $r > 0$), la série de fonctions $\sum a_k (re^{it})^k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction $\big[t \mapsto e^{-int}\big]$ est bornée, on en déduit que la série de fonctions $\sum a_k r^k e^{i(k-n)t}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Le terme général de cette série de fonctions étant une fonction continue, on peut intégrer terme à terme la somme de cette série sur $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} S(re^{it})e^{-int}\,dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{-i(n-k)t}\,dt\\ &= 2\pi a_n r^n\end{aligned}$$

et le résultat est ainsi démontré.

5. b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si S est bornée sur $\mathbb{C}$, on déduit de la formule précédente et de l'inégalité de la moyenne que

$$\forall\, r > 0, \quad 0 \leqslant |a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \|S\|_\infty\,dt = \frac{\|S\|_\infty}{2\pi r^n}.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on en déduit que $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc que la somme S est constante.

5. c. La fonction $S = \cos$ est développable en série entière et bornée sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas bornée sur $\mathbb{C}$ puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(ix) = \operatorname{ch} x.$$

Solution II ❁ Séries entières et théorème d'Abel

Partie A.

1. a. Avec $a_0 = 0$ et $a_n = (-1)^n/n$ pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad f(x) = -\ln(1+x),$$

donc f admet une limite finie, égale à $-\ln 2$, au voisinage gauche de 1. D'autre part, la série numérique $\sum a_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les propriétés $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

1. b. Avec $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad f(x) = \frac{1}{1+x},$$

donc f admet une limite finie, égale à $1/2$ au voisinage gauche de 1, alors que la série numérique $\sum a_n$ diverge grossièrement. Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété $(\mathscr{P}_2)$ sans vérifier la propriété $(\mathscr{P}_1)$.

1. c. Avec $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x},$$

donc f tend vers $+\infty$ au voisinage gauche de 1 et la série numérique $\sum a_n$ diverge grossièrement. Cette fois, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne vérifie ni la propriété $(\mathscr{P}_1)$, ni la propriété $(\mathscr{P}_2)$.

1. d. Les sommes partielles d'une série entière sont des fonctions polynomiales, donc bornées sur l'intervalle borné $\left]-1, 1\right[$. Si une série entière converge uniformément sur $\left]-1, 1\right[$, il faut que sa somme soit aussi bornée sur cet intervalle.

Ce n'est le cas d'aucun des trois exemples précédents : ce sont trois exemples de séries entières qui ne convergent pas uniformément sur $\left]-1, 1\right[$ (alors que leur rayon de convergence est égal à 1).

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que

$$\sup_{x\in[-1,1]} |a_n x^n| = |a_n|.$$

Par conséquent, si la série numérique $\sum a_n$ converge absolument, alors la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. La somme de la série entière est alors continue sur $[-1, 1]$, ce qui prouve en particulier que f admet $f(1)$ pour limite à gauche en 1, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = f(1^-).$$

3. Tout d'abord,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

et par comparaison, la série $\sum a_n$ est absolument convergente. On peut donc appliquer le résultat de **2.**

❧ On sait que

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

Une fonction développable en série entière sur $\left]-1, 1\right[$ est intégrable terme à terme sur cet intervalle. Par conséquent,

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad \int_0^x \ln(1+t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}.$$

En intégrant par parties,

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad \int_0^x \ln(1+t)\,dt = (1+x)\ln(1+x) - x.$$

D'après **2.**,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \lim_{x\to 1^-} \big[(1+x)\ln(1+x) - x\big] = 2\ln 2 - 1.$$

Partie B. Théorème d'Abel

4. a. Tout d'abord, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété $(\mathscr{P}_1)$, donc r_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ en tant que reste d'ordre n d'une série convergente et la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

❧ On remarque que $(r_{n+p-1} - r_{n+p}) = a_{n+p}$. Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum a_k x^k$ est égal à 1, on en déduit que la série $\sum a_{n+p}x^{n+p}$ est absolument convergente pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$, quel que soit l'entier $p \in \mathbb{N}$. Donc la somme

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p}$$

est bien définie et égale à

$$\sum_{p=1}^{+\infty} a_{n+p}x^{n+p} = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p x^p = R_n(x)$$

pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$.

4. b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $r_{n+p-1}x^{n+p} = o(x^p)$ et $r_{n+p}x^{n+p} = o(x^p)$, donc les séries numériques $\sum_p r_{n+p}x^{n+p}$ et $\sum_p r_{n+p-1}x^{n+p}$ convergent absolument pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$. On en déduit que

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p} = \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p-1}x^{n+p} - \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p}x^{n+p}.$$

D'après **4.a.**, en changeant d'indice ($p \leftarrow p-1$) dans la première somme,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= x\sum_{p=0}^{+\infty} r_{n+p}x^{n+p} - \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p}x^{n+p} \\ &= r_n x^{n+1} + (x-1)\sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p}x^{n+p} \\ &= r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p}x^{p-1} \end{aligned}$$

pour tout $x \in]-1, 1[$.

4. c. Le premier encadrement traduit seulement le fait que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

❧ On déduit de l'expression du **4.b.** et de l'inégalité triangulaire que

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant |r_n| + (1-x)\sum_{p=1}^{+\infty} |r_{n+p}|x^{p-1}$$

pour tout $x \in [0, 1[$. D'après le premier encadrement, les inégalités étant conservées par sommation,

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + (1-x)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} x^p = \varepsilon.$$

❧ Enfin, pour $x = 1$, on remarque que $R_n(1) = r_n$ et donc $\left|R_n(1)\right| \leqslant \varepsilon/2 \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, $\left|R_n(x)\right| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \geqslant n_0$.

4. d. D'après **4.c.**, la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle, ce qui signifie que la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. Les sommes partielles de cette série de fonctions étant continues sur $[0, 1]$ (elles sont polynomiales), on en déduit que la somme de cette série est continue sur $[0, 1]$. En particulier, elle admet $f(1)$ pour limite à gauche en 1, soit

$$f(1^-) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Remarque.— Il s'agit d'une amélioration remarquable du résultat démontré en **2.** : on obtient la même conclusion en supposant seulement que la série $\sum a_n$ est convergente !

5. Par contraposée du théorème d'Abel, si la somme f n'a pas une limite finie au voisinage gauche de 1, alors la série numérique $\sum a_n$ diverge.

6. D'après la formule de la série géométrique,

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$ est intégrable terme à terme sur cet intervalle. Par conséquent,

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

puisque $\operatorname{Arctan} 0 = 0$.

❧ La série $\sum(-1)^n/(2n+1)$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées. D'après le théorème d'Abel, la fonction Arctan admet une limite finie au voisinage gauche de 1 (ce qu'on savait déjà...) et cette limite est égale à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Comme Arctan est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\pi = 4\operatorname{Arctan} 1 = 4\operatorname{Arctan}(1^-) = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

7. a. Le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Avec l'exemple de l'énoncé,

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^{1/4}}\,\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^{1/4}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \left[k(n-k)\right]^{-1/4}.$$

❧ La fonction polynomiale $[x \mapsto x(n-x)]$ est polynomiale de degré 2 et atteint son maximum en $x = n/2$ (formule du sommet d'une parabole). Donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad 1(n-1) \leqslant k(n-k) \leqslant \frac{n^2}{4}$$

et par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[k(n-k)\right]^{-1/4} \geqslant (n-1)\sqrt{\frac{2}{n}} \sim \sqrt{2n}.$$

Cela prouve que la série $\sum w_n$ est grossièrement divergente !

❧ La série $\sum u_n$ étant convergente d'après le critère spécial des séries alternées, l'exemple traité montre que le produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

7. b. Comme les séries numériques $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes, les rayons de convergence des séries entières $\sum u_n x^n$, $\sum v_n x^n$ et $\sum w_n x^n$ sont supérieurs à 1. Les séries numériques $\sum u_n x^n$, $\sum v_n x^n$ et $\sum w_n x^n$ sont donc absolument convergentes sur $]-1, 1[$ et d'après le théorème de Cauchy,

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n\right).$$

Comme les séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes, le théorème d'Abel montre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

et par conséquent, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big).$$

REMARQUE.— Rappelons que le théorème de Cauchy vu en cours suppose que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont *absolument* convergentes (et pas seulement convergentes comme ici), alors que la convergence (absolue) de la série $\sum w_n$ fait partie de la *conclusion* du théorème (et pas des hypothèses comme ici).

Partie C. Réciproque du théorème d'Abel

8. On a donné un contre-exemple au **1.b.**

9. Comme tous les a_k sont positifs et que $x \in [0, 1[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Comme f admet une limite finie au voisinage gauche de 1, on peut faire tendre x vers 1 dans l'inégalité précédente. On obtient ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(1^-) \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

❧ Les sommes partielles de la série $\sum a_k$ sont donc majorées. Comme il s'agit ici d'une série de terme général positif, cela prouve qu'elle converge et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc la propriété $(\mathscr{P}_1)$.

REMARQUE.— D'après le théorème d'Abel, la limite $f(1^-)$ est égale à la somme de la série $\sum a_k$.

Partie D. Théorème de Littlewood

10. Les deux suites $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont évidemment bornées, donc les rayons de convergence des séries entières $\sum \eta_n x^n$ et $\sum \varepsilon_n x^n$ sont supérieurs à 1. Leurs sommes f et g sont donc définies (au moins) sur $]-1, 1[$.

❧ En tant que somme d'une série entière de rayon supérieur à 1, la fonction f est dérivable terme à terme sur $]-1, 1[$:

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\eta_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1},$$

donc $g = f'$.

REMARQUE.— Comme $f(0) = 0$, on a aussi

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[, \quad f(x) = \int_0^x g(t)\, dt.$$

11. Si la série $\sum \eta_n$ converge, alors la fonction f admet une limite finie au voisinage gauche de 1 (théorème d'Abel).

Réciproquement, il est clair que $\eta_n = \mathcal{O}(1/n)$. Si la fonction f admet une limite finie au voisinage gauche de 1, alors la série $\sum \eta_n$ converge (théorème de Littlewood).

REMARQUE.— Comme au **9.**, on déduit alors du théorème d'Abel que

$$f(1^-) = \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n.$$

Par suite, la fonction f admet une limite finie au voisinage gauche de 1 si, et seulement si, l'intégrale impropre

$$\int_0^1 g(t)\, dt$$

converge (et dans ce cas, $f(1^-)$ est égale à cette intégrale).

12. Soit $x \in\,]-1, 1[$. Comme la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ est périodique, de période p,

$$\begin{aligned}(1-x^p)g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1+p}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_{n+p} x^{n-1+p}\\ &= \sum_{n=1}^{p} \varepsilon_n x^{n-1}\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$g(x) = \frac{1}{1-x^p} \sum_{n=1}^{p} \varepsilon_n x^{n-1}.$$

REMARQUE.— On devine la formule à démontrer en faisant des paquets qui tiennent compte de la périodicité de la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$:

$$(\varepsilon_1 x + \cdots + \varepsilon_p x^p) + (\varepsilon_1 x^{p+1} + \cdots + \varepsilon_p x^{p+p}) + \cdots$$

qu'on factorise pour obtenir :

$$(\varepsilon_1 x + \cdots + \varepsilon_p x^p)(1 + x^p + x^{2p} + \cdots).$$

C'est une excellente *idée* (c'est *la bonne*), mais ce n'est pas une *démonstration*... (Alors que la démonstration qui précède occulte complètement cette idée !)

13. On considère le cas où $\varepsilon_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (et donc $\sum \eta_n$ est la série harmonique) : la période p est égale à 1.

Dans ce cas,

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[, \quad g(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad f(x) = -\ell n(1-x).$$

Comme f tend vers $+\infty$ au voisinage gauche de 1, la série $\sum \eta_n$ est divergente (d'après **11.**).

❧ On considère le cas où $\varepsilon_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: la période p est égale à 2.

Dans ce cas,

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[, \quad g(x) = \frac{-1+x}{1-x^2} = \frac{-1}{1+x} \quad \text{et} \quad f(x) = -\ell n(1+x).$$

Comme f tend vers $-\ell n\, 2$ au voisinage gauche de 1, la série $\sum \eta_n$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ell n\, 2$$

(d'après **11.**).

14. Par **11.**, la série $\sum \eta_n$ converge si, et seulement si, la fonction f admet une limite finie au voisinage de 1.

Or la fonction f est une primitive de la fonction g, qui est une fonction rationnelle. Par conséquent, la fonction f admet une limite finie au voisinage gauche de 1 si, et seulement si, 1 n'est pas un pôle de g.

Dans l'expression rationnelle de g trouvée en **12.**, le réel 1 est une racine simple du dénominateur. C'est donc un pôle de g si, et seulement si, ce n'est pas une racine du numérateur, ce qui équivaut à

$$\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k \neq 0.$$

Finalement, la série $\sum \eta_n$ converge si, et seulement si,

$$\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k = 0$$

et, dans ce cas, la somme de la série $\sum \eta_n$ est égale à $f(1^-)$.

Dans le cas où p est impair, le nombre de termes égaux à $+1$ ne peut pas être égal au nombre de termes égaux à -1, donc la somme $(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_p)$ n'est pas nulle et la série $\sum \eta_n$ diverge (comme c'est le cas pour la série harmonique, de période $p = 1$).

15. D'après **14.**, la série $\sum \eta_n$ est convergente.
D'après **12.**, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1 + x + x^2 - x^3 - x^4 - x^5}{1 - x^6} \\ &= \frac{1 + x + x^2}{1 + x^3} = \frac{1}{1 - x + x^2} + \frac{x^2}{1 + x^3}. \end{aligned}$$

Le second terme s'intègre sans peine ; le premier doit être réduit sous forme canonique :

$$\frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

On en déduit que, pour tout $0 \leqslant x < 1$,

$$f(x) = \Big[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln(1 + t^3)\Big]_0^x$$

et donc que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n = f(1^-) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\ln 2}{3}.$$

Source : CCP 2005 MP.