Composition de Mathématiques

Le 22 janvier 2014 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Calculatrices autorisées.

❖ Problème ❖

Soit $n \geqslant 2$. On note $(\cdot|\cdot)$, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$, la norme euclidienne qui lui est associée. La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| = 1\}.$$

L'objectif de ce problème est l'étude des matrices de Hilbert :

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/n & 1/n+1 & \cdots & 1/2n-1 \end{pmatrix}$$

à l'aide des fonctions $q_A \, : \, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(x) = (\,Ax\,|\,x\,).$$

1. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
1. a. Par quelles matrices colonnes X et Y les vecteurs x et y sont-ils représentés dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$?
1. b. Soit u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base canonique. Par quelle colonne le vecteur $u(x)$ est-il représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$?
1. c. Que vaut $(\,x\,|\,y\,)$? Comment exprimer ce produit scalaire à l'aide des matrices colonnes X et Y ?

> Dans toute la suite du sujet, on identifiera les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les matrices colonnes qui les représentent dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En particulier, on notera Ax au lieu de $u(x)$.

2. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. a. Démontrer que q_A atteint un minimum m_A et un maximum M_A sur le cercle unité Ω_2.
☞ *On remarquera que* $\Omega_2 = \{(\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$.
2. b. Vérifier que les valeurs propres réelles de A sont comprises entre m_A et M_A.

Partie A. Une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

3. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
3. a. Exprimer $q_A(x+y)$ en fonction de $q_A(x)$, $q_A(y)$, $(\,Ax\,|\,y\,)$ et $(\,Ay\,|\,x\,)$.
3. b. On suppose que

$$\forall\, x \in \Omega_n, \quad q_A(x) = 0.$$

Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(x) = 0$$

et en déduire que ${}^tA = -A$.
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que q_A est nulle sur la sphère unité :

$$\forall\, x \in \Omega_n, \quad q_A(x) = 0$$

si, et seulement si, A est la matrice nulle.
5. On rappelle un énoncé du théorème spectral, dont on conservera les notations dans la suite de cette question.

> **Théorème spectral**
>
> *Soit u, un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et une famille ordonnée de réels*
>
> $$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$
>
> *telles que*
>
> $$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad u(e_k) = \lambda_k e_k.$$

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
5. a. Démontrer que u est bien un endomorphisme symétrique.
5. b. Que vaut $q_A(e_k)$?
5. c. Soit

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in \Omega_n.$$

Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$$

puis exprimer $q_A(x)$ en fonction des valeurs propres λ_k et des coordonnées α_k.
5. d. En déduire que q_A atteint un maximum M_A et un minimum m_A sur la sphère unité Ω_n. Exprimer m_A et M_A en fonction des valeurs propres de A.
6. Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$N(A) = \max_{x\in\Omega_n} \left|q_A(x)\right|.$$

6. a. Démontrer qu'on définit ainsi une application N de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$.

6. b. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, comparer $N(\lambda A)$ et $N(A)$.

6. c. Vérifier que

$$\forall\,(A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad N(A+B) \leqslant N(A) + N(B).$$

6. d. Exprimer $N(A)$ en fonction du spectre de A.

6. e. Comparer $N(A)^n$ et $\det A$.

6. f. Calculer $N(A)$ et $\det A$ pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Partie B. Spectre de H_n

Pour simplifier, on notera q_n au lieu de q_{H_n}.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad q_n(x) = (\, H_n x \,|\, x\,).$$

7. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$Q = \sum_{k=1}^{n} x_k X^{k-1} \in \mathbb{R}[X].$$

7. a. Démontrer que

$$q_n(x) = \int_0^1 Q(t)^2 \, dt.$$

7. b. En déduire que $q_n(x) \geqslant 0$ et que $q_n(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.

7. c. Démontrer que

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad \int_{-1}^{1} P(t)\,dt = -i \int_0^{\pi} P(e^{i\theta}) e^{i\theta}\,d\theta.$$

☞ *On pourra commencer par vérifier cette relation sur les monômes* X^k.

7. d. En déduire que

$$q_n(x) \leqslant \int_0^{\pi} \Big| \sum_{k=1}^{n} x_k e^{i(k-1)\theta} \Big|^2 \, d\theta,$$

cette inégalité étant stricte pour $x \neq 0$.

7. e. Démontrer que

$$\forall\, x \neq 0, \quad 0 < q_n(x) < \pi \|x\|^2.$$

8. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$\mu_n = \min \operatorname{Sp}(H_n) \quad \text{et} \quad \rho_n = \max \operatorname{Sp}(H_n).$$

8. a. Que valent μ_2 et ρ_2 ?

8. b. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 < \mu_n < \rho_n < \pi.$$

8. c. Démontrer que

$$q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n].$$

☞ *On pourra considérer deux vecteurs propres orthogonaux et unitaires* u *et* v *tels que*

$$H_n u = \mu_n u \quad \textit{et} \quad H_n v = \rho_n v$$

et étudier $q_n(x_t)$ *où*

$$\forall\, t \in [0,1], \quad x_t = \sqrt{1-t}\, u + \sqrt{t}\, v.$$

8. d. Calculer $q_n(\varepsilon_n)$ où $\varepsilon_n = (0, \dots, 0, 1)$ est le n-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

En déduire la limite de μ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Estimation asymptotique de ρ_n

On *admettra* la relation suivante :

$$\forall\, t > 0, \quad \operatorname{Arctan} t + \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$$

ainsi que le théorème suivant.

Changement de variable dans une intégrale double

Soit f, une fonction continue de $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ dans $\mathbb{R}$. Si $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de D sur $\Delta = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$ et si la matrice

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout $(x,y) \in D$, alors

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f\big(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)\big) \big|\det(J\varphi)\big| \, dy\,dx = \int_{c_1}^{d_1} \int_{c_2}^{d_2} f(u,v)\,dv\,du.$$

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$I_n = \int_1^n \int_1^n \frac{1}{\sqrt{xy}(x+y-1)}\,dy\,dx,$$

$$J_n = \int_1^{\sqrt{n}} \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{u^2+v^2}\,dv\,du.$$

9. En posant $(u,v) = (\sqrt{x}, \sqrt{y})$, démontrer que

$$I_n \geqslant 4 J_n.$$

10. Démontrer que $J_n = K_n - L_n$ où

$$K_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\,dx \quad \text{et} \quad L_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\operatorname{Arctan} x/\sqrt{n}}{x}\,dx.$$

11. Démontrer que $0 < L_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 2$.

12. Démontrer que $\left[x \mapsto \frac{1}{x} \operatorname{Arctan}(1/x)\right]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et en déduire que

$$K_n \sim \frac{\pi}{4} \ell n\, n.$$

13. Démontrer que

$$J_n \sim \frac{\pi}{4} \ell n\, n.$$

14. On pose

$$a = \big(1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, \dots, 1/\sqrt{n}\big) \in \mathbb{R}^n.$$

14. a. Vérifier que $\|a\|^2 \leqslant 1 + \ell n\, n$.

14. b. Démontrer que $4 J_n \leqslant q_n(a)$.

14. c. En déduire le comportement asymptotique de $N(H_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution ❀ Matrices de Hilbert

1. a.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1. b. Le vecteur $u(x)$ est représenté par la matrice-colonne AX.

1. c.

$$(x \mid y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^tXY = {}^tYX$$

(On identifie une matrice de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.)

2. a. On suit l'indication : pour tout $x \in \Omega_2$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = (\cos\theta, \sin\theta)$ et

$$q_A(x) = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} = 2 - \frac{\sin 2\theta}{2}.$$

La fonction q_A atteint donc un maximum $M_A = 5/2$ et un minimum $m_A = 3/2$ sur le cercle unité.

2. b. La matrice A est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux et

$$\mathrm{Sp}(A) = \{2\} \subset [3/2, 5/2] = [m_A, M_A].$$

Partie A. Une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

3. a. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire :

$$q_A(x+y) = q_A(x) + q_A(y) + (Ax \mid y) + (Ay \mid x).$$

3. b. Si $x = 0$, il est clair que $q_A(x) = 0$.

Sinon,

$$x = \|x\| \frac{x}{\|x\|}$$

et par bilinéarité du produit scalaire

$$q_A(x) = \|x\|^2 q_A\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big) = 0$$

puisque $x/\|x\|$ est un vecteur unitaire et que q_A est supposée nulle sur la sphère unité.

❧ Par **3.a.**, on en déduit que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (Ax \mid y) = -(Ay \mid x)$$

ce qui se traduit matriciellement par

$$\forall\, X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX{}^tAY = {}^t(AX)Y = {}^tX(AY).$$

Comme les matrices colonnes X et Y peuvent être arbitrairement choisies, on en déduit que ${}^tA = -A$.

4. Si A est la matrice nulle, alors il est clair que q_A est nulle sur la sphère unité.

Réciproquement, si q_A est nulle sur la sphère unité, alors ${}^tA = -A$ par **3.b.** et comme A est ici supposée symétrique, alors A est la matrice nulle.

REMARQUE.— On peut aussi montrer sa connaissance du cours ! L'application q_A est une forme quadratique et comme la matrice A est *symétrique*, il s'agit de la matrice qui représente q_A dans la base canonique. On sait alors que : si q_A est la forme quadratique nulle, alors la matrice A est la matrice nulle (isomorphisme entre l'espace des matrices symétriques et l'espace des formes quadratiques).

5. a. Comme la matrice A est symétrique, d'après les formules de calcul matriciel rappelée au **1.**,

$$(u(x) \mid y) = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = {}^tXAY = (x \mid u(y))$$

quels que soient les vecteurs x et y dans $\mathbb{R}^n$, donc l'endomorphisme u est symétrique.

5. b. Comme e_k est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_k, alors $Ae_k = u(e_k) = \lambda_k e_k$ et

$$q_A(e_k) = (Ae_k \mid e_k) = \lambda_k (e_k \mid e_k) = \lambda_k \|e_k\|^2 = \lambda_k$$

puisque, par hypothèse, le vecteur propre e_k est unitaire.

5. c. Comme le vecteur x est unitaire et que les α_k sont les coordonnées de x relatives à une base *orthonormée*,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|x\|^2 = 1.$$

❧ Comme les e_k sont des vecteurs propres de u,

$$Ax = u(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k e_k$$

et comme la base $(e_1, \dots, e_n)$ est une base *orthonormée*,

$$q_A(x) = (Ax \mid x) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \alpha_k)\alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2.$$

5. d. Soit $x \in \Omega_n$. Avec les notations du **5.c.**, comme $\alpha_k^2 \geqslant 0$, alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \lambda_1 \alpha_k^2 \leqslant \lambda_k \alpha_k^2 \leqslant \lambda_n \alpha_k^2.$$

En sommant ces encadrements, on obtient

$$\lambda_1 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2 \leqslant \lambda_n^2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$$

et on déduit de **5.c.** que

$$\lambda_1 \leqslant q_A(x) \leqslant \lambda_n.$$

Cela prouve que la fonction q_A est bornée sur Ω_n : elle admet donc une borne supérieure (inférieure à λ_n) et une borne inférieure (supérieure à λ_1).

❧ Par **5.b.**, on a $q_A(e_1) = \lambda_1$ et $q_A(e_n) = \lambda_n$, donc la restriction de q_A à la sphère unité Ω_n atteint son minimum $m_A = \lambda_1$ en $x = e_1$ et son maximum $M_A = \lambda_n$ en $x = e_n$.

6. a. Par **5.d.**, la fonction q_A atteint un maximum et un minimum sur Ω_n, donc la fonction $|q_A|$ atteint un maximum sur Ω_n et

$$\max_{x \in \Omega_n} |q_A(x)| = \max\{|m_A|, |M_A|\} = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_n|\}.$$

6. b. Comme le produit scalaire est linéaire par rapport à la première variable,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad q_{\lambda A}(x) = \big((\lambda A)x \,\big|\, x\big) = \lambda q_A(x)$$

donc

$$\forall\, x \in \Omega_n, \quad |q_{\lambda A}(x)| = |\lambda|\, |q_A(x)|$$

et finalement

$$N(\lambda A) = |\lambda| N(A).$$

6. c. Pour tout $x \in \Omega_n$,

$$\begin{aligned}\left|q_{A+B}(x)\right| &= \left|\,(\,Ax\,|\,x\,)+(\,Bx\,|\,x\,)\,\right| \\ &\leqslant \left|q_A(x)\right| + \left|q_B(x)\right| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant N(A)+N(B) \quad \text{(majoration par le sup)}\end{aligned}$$

et par passage au sup, on obtient

$$N(A+B) \leqslant N(A)+N(B).$$

REMARQUE.— En outre, par **4.** : $N(A)=0$ si, et seulement si, $A=0$. On a ainsi prouvé que l'application N est une *norme* sur l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

6. d. Par **5.d.** (ou **6.a.**),

$$N(A) = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|.$$

6. e. Comme la matrice A est symétrique réelle, elle est diagonalisable, donc son polynôme caractéristique est scindé et

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Par **6.d.**,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 \leqslant |\lambda_k| \leqslant N(A)$$

et par produit

$$0 \leqslant |\det A| \leqslant N(A)^n.$$

6. f. Le polynôme caractéristique de A est égal à

$$X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{12}.$$

Par conséquent, $\det A = {}^1\!/_{12}$ et les valeurs propres de A sont

$$\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{13}}{6},$$

donc

$$N(A) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}.$$

Partie B. Spectre de H_n

7. a. La fonction Q^2 est continue sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$.

Pour tout $t \in [0,1]$,

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1},$$

$$\left[Q(t)\right]^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_k x_\ell t^{(k-1)+(\ell-1)}$$

donc, en intégrant sur $[0,1]$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q(t)^2\,dt &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{x_k x_\ell}{k+\ell-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{k+\ell-1}x_\ell\right)x_k \\ &= (\,H_n x\,|\,x\,) = q_n(x).\end{aligned}$$

7. b. Pour tout $t \in [0,1]$, l'expression $[Q(t)]^2$ est positive, donc son intégrale sur $[0,1]$ est positive :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad q_n(x) \geqslant 0.$$

❧ Si $x=0$, il est clair que $q_n(x)=0$.

Réciproquement, la fonction $\left[t \mapsto Q(t)^2\right]$ est continue et positive sur le segment $[0,1]$. Par conséquent, si son intégrale sur $[0,1]$ est nulle, alors elle est identiquement nulle. Dans ce cas, la fonction Q est nulle sur $[0,1]$, donc le polynôme Q admet une infinité de racines : c'est donc le polynôme nul et tous ses coefficients sont nuls. Autrement dit : si $q_n(x)=0$, alors $x=0$.

On a ainsi démontré que $q_n(x)=0$ si, et seulement si, $x=0$.

REMARQUE.— L'application q_n est donc une forme quadratique (représentée par la matrice H_n dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$) définie positive.

7. c. La fonction P est continue sur le segment $[-1,1]$, donc intégrable sur $[-1,1]$. Par conséquent, l'application

$$\left[P \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)\,dt\right]$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.

❧ La fonction

$$\left[\theta \mapsto P(e^{i\theta})e^{i\theta}\right]$$

est continue sur le segment $[0,\pi]$, donc intégrable sur $[0,\pi]$. Par conséquent, l'application

$$\left[P \mapsto -i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta\right]$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.

❧ Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}-i\int_0^{\pi} e^{ik\theta}e^{i\theta}\,d\theta &= -i\frac{e^{i(k+1)\pi}-1}{i(k+1)} \\ &= \frac{1-e^{i(k+1)\pi}}{k+1} \\ &= \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \int_{-1}^{1} t^k\,dt.\end{aligned}$$

❧ Deux formes linéaires sur $\mathbb{R}[X]$ sont égales si, et seulement si, elles prennent les mêmes valeurs sur la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. Par suite,

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad \int_{-1}^{1} P(t)\,dt = -i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta.$$

REMARQUE.— Il serait absurde d'effectuer le changement de variable $t = e^{i\theta}$, car le premier membre est réel et le second membre est complexe !

Un tel changement de variable ne serait envisageable que dans le cadre des intégrales curvilignes, en vérifiant qu'on intègre ici une forme différentielle *exacte* sur deux chemins d'origine -1 et d'extrémité 1.

7. d. La fonction $\left[t \mapsto Q^2(t)\right]$ est continue et positive. D'après **7.a.**,

$$q_n(x) = \int_0^1 Q(t)^2\,dt \leqslant \int_{-1}^{1} Q(t)^2\,dt.$$

Si l'inégalité est une égalité, alors il faut que Q^2 soit identiquement nulle sur $[-1,0]$ et dans ce cas, $x=0$ (justifié en détail au **7.b.**).

Comme Q^2 est positive, par **7.c.** (avec $P = Q^2$) :

$$\int_{-1}^{1} Q(t)^2\,dt = \left|\int_{-1}^{1} Q(t)^2\,dt\right| = \left|-i\int_0^{\pi} Q(e^{i\theta})^2 e^{i\theta}\,d\theta\right|$$

et d'après l'inégalité de la moyenne :

$$\int_{-1}^{1} Q(t)^2\,dt \leqslant \int_0^{\pi} \left|Q(e^{i\theta})^2 e^{i\theta}\right|\,d\theta = \int_0^{\pi} \left|Q(e^{i\theta})\right|^2\,d\theta,$$

ce qui est l'inégalité cherchée.

On a justifié dès le début que cette inégalité est stricte pour tout $x \neq 0$.

7. e. La première inégalité stricte a été démontrée au **7.b.**

☙ Pour la deuxième inégalité, on considère le produit hermitien sur $\mathbb{C}[X]$ inspiré par le cours sur les séries de Fourier :

$$\forall\, P_1, P_2 \in \mathbb{C}[X], \quad \langle\, P_1 \,|\, P_2 \,\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{P_1(e^{i\theta})} P_2(e^{i\theta})\,d\theta.$$

On sait que la base canonique de $\mathbb{C}[X]$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire, donc

$$\langle\, Q \,|\, Q \,\rangle = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

d'après le théorème de Pythagore (les x_k sont *réels*).

Comme Q est un polynôme à coefficients *réels*, la fonction $[\theta \mapsto |Q(e^{i\theta})|^2]$ est une fonction *paire* et donc

$$\int_0^{\pi} \left|Q(e^{i\theta})\right|^2\,d\theta = \pi\,\langle\, Q \,|\, Q \,\rangle$$

et d'après **7.d.** :

$$\forall\, x \neq 0, \quad q_n(x) < \pi\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \pi\|x\|^2.$$

8. a. Calculs déjà faits au **6.a.** !

8. b. Il est clair, par définition, que $\mu_n \leqslant \rho_n$. En cas d'égalité, le spectre de H_n serait réduit à un singleton. Or la matrice H_n est symétrique réelle, donc diagonalisable (théorème spectral) : si elle n'avait qu'une seule valeur propre, elle serait diagonale ! Donc $\mu_n < \rho_n$.

☙ Par **5.d.**, on sait que

$$\mu_n = \min_{x\in\Omega_n} q_n(x) \quad \text{et} \quad \rho_n = \max_{x\in\Omega_n} q_n(x).$$

Le vecteur nul n'appartient évidemment pas à la sphère unité : on déduit alors de **7.e.** que

$$0 < \mu_n \quad \text{et} \quad \rho_n < \pi.$$

8. c. Par **5.d.**, on a $q_n(\Omega_n) \subset [\mu_n, \rho_n]$.

☙ En reprenant les notations du **5.**, on a $\mu_n = \lambda_1$ et $\rho_n = \lambda_n$. Comme tout sous-espace propre contient un vecteur propre unitaire, il existe deux vecteurs unitaires u et v tels que

$$H_n u = \lambda_1 u = \mu_n u \quad \text{et} \quad H_n v = \lambda_n v = \rho_n v.$$

Par **8.b.**, les vecteurs u et v sont des vecteurs propres de H_n associés à des valeurs propres *distinctes*, donc ce sont des vecteurs orthogonaux.

Par suite,

$$(\,H_n u \,|\, v\,) = (\,\lambda_1 u \,|\, v\,) = \lambda_1\,(\,u \,|\, v\,) = 0$$
$$(\,H_n v \,|\, u\,) = \lambda_n\,(\,v \,|\, u\,) = 0$$

et d'après **3.a.** et **5.b.** :

$$q_n(x_t) = (1-t)q_n(u) + t q_n(v) = (1-t)\lambda_1 + t\lambda_n.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\|x_t\|^2 = (1-t)\|u\|^2 + t\|v\|^2 = (1-t) + t = 1$$

(Pythagore, encore une fois), donc le vecteur x_t appartient à Ω_n.

Par conséquent, $q_n(\Omega_n)$ contient tous les réels de la forme $(1-t)\lambda_1 + t\lambda_n$, c'est-à-dire le segment $[\lambda_1, \lambda_n] = [\mu_n, \rho_n]$.

8. d. Il est clair que $\varepsilon_n \in \Omega_n$. Par **5.d.**,

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 < \mu_n = \min_{x\in\Omega_n} q_n(x) \leqslant q_n(\varepsilon_n) = \frac{1}{2n-1}$$

donc μ_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Estimation asymptotique de ρ_n

9. On considère le changement de variable défini par

$$\varphi(x,y) = \big(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)\big) = (\sqrt{x}, \sqrt{y}).$$

Cette fonction φ réalise évidemment une bijection de $D = [1,n]\times[1,n]$ sur $\Delta = [1,\sqrt{n}]\times[1,\sqrt{n}]$ et est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ (qui contient D) car ses deux composantes φ_1 et φ_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

La fonction

$$f = \left[(u,v) \mapsto \frac{1}{u^2+v^2}\right]$$

est une fonction rationnelle dont le seul pôle est $(0,0)$, donc f est continue sur Δ.

Enfin, il est clair que la matrice

$$J\varphi = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{x} & 0 \\ 0 & 1/2\sqrt{y} \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout $(x,y) \in D$.

D'après le théorème de changement de variable rappelé par l'énoncé,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n \int_1^n \frac{4}{x+y-1}\,\frac{1}{4\sqrt{xy}}\,dx\,dy \\ &= 4\int_1^{\sqrt{n}}\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{u^2+v^2-1}\,du\,dv \\ &\geqslant 4\int_1^{\sqrt{n}}\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{u^2+v^2}\,du\,dv = 4J_n \end{aligned}$$

puisque

$$\forall\,(u,v) \in \Delta, \quad \frac{1}{u^2+v^2-1} \geqslant \frac{1}{u^2+v^2}.$$

10. Les intégrales K_n et L_n sont bien définies (en tant qu'intégrales d'une fonction continue sur un segment).

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{n}} \frac{dv}{x^2+v^2} &= \left[\frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\frac{v}{x}\right]_1^{\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{x}\left[\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{n}}{x} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right] \\ &= \frac{1}{x}\left[\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan}\frac{x}{\sqrt{n}}\right]\end{aligned}$$

d'après la formule de trigonométrie rappelée par l'énoncé. On en déduit que $J_n = K_n - L_n$ par linéarité de l'intégrale.

11. La fonction Arctan est continue, strictement croissante et strictement concave sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\forall\, u > 0, \quad 0 < \operatorname{Arctan} u < u$$

et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}, \quad 0 < \frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\frac{x}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

L'intégrale conserve les inégalités strictes sur un intervalle de longueur strictement positive (ce qui est le cas de $[1, \sqrt{n}]$ pour $n \geqslant 2$), donc

$$0 < L_n < \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}}\, dx = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}$$

et finalement

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 < L_n < 1.$$

12. La fonction

$$g = \left[x \mapsto \frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right]$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et équivaut à $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$: elle est donc intégrable au voisinage de $+\infty$.

La fonction g étant intégrable sur $[1, +\infty[$, elle est intégrable sur tout segment $[1, \sqrt{n}]$ et la suite de terme général

$$\int_1^{\sqrt{n}} g(x)\, dx$$

est convergente : en particulier, elle est bornée.

❧ La fonction $[x \mapsto 1/x]$ est continue sur le segment $[1, \sqrt{n}]$. D'après la formule de trigonométrie rappelée par l'énoncé et la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}K_n &= \frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{n}} \frac{dx}{x} - \int_1^{\sqrt{n}} g(x)\, dx \\ &= \frac{\pi}{2}\ln\sqrt{n} + \mathcal{O}(1) \\ &= \frac{\pi}{4}\ln n + \mathcal{O}(1) \sim \frac{\pi}{4}\ln n.\end{aligned}$$

13. D'après **10.**, **11.** et **12.**,

$$J_n = \left[\frac{\pi}{4}\ln n + \mathcal{O}(1)\right] + \mathcal{O}(1) \sim \frac{\pi}{4}\ln n.$$

REMARQUE.— Si on n'a pas réussi à justifier l'ordre de grandeur de K_n donné au **12.**, on peut quand même aboutir :

$$\begin{aligned}J_n &= \left[\frac{\pi}{4}\ln n + o(\ln n)\right] + \mathcal{O}(1) \\ &= \frac{\pi}{4}\ln n + o(\ln n) \sim \frac{\pi}{4}\ln n.\end{aligned}$$

14. a. Par définition de la norme euclidienne canonique,

$$\|a\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

et par comparaison d'une somme et d'une intégrale

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$$

(puisque la fonction $[t \mapsto 1/t]$ est continue et décroissante sur $[1, n]$). Donc

$$\|a\|^2 \leqslant 1 + \ln n.$$

14. b. En reprenant les formules du **7.a.**,

$$\begin{aligned}q_n(a) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{1}{k+\ell-1}\frac{1}{\sqrt{\ell}} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\ell}(k+\ell-1)}.\end{aligned}$$

❧ Le rectangle $D = [1, n] \times [1, n]$ est la réunion de $(n-1)^2$ rectangles dont les intérieurs sont deux à deux disjoints :

$$D = \bigcup_{1 \leqslant k, \ell < n} \big([k, k+1] \times [\ell, \ell+1]\big).$$

(Lorsqu'ils ne sont pas disjoints, deux de ces rectangles n'ont qu'un côté ou un sommet en commun.) Par additivité de l'intégrale double,

$$I_n = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-1} \int_k^{k+1}\int_\ell^{\ell+1} \frac{1}{\sqrt{xy}(x+y-1)}\, dy\, dx.$$

Quels que soient $1 \leqslant k, \ell < n$, il est clair que

$$\frac{1}{\sqrt{xy}(x+y-1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k\ell}(k+\ell-1)}$$

pour tout $(x, y) \in [k, k+1] \times [\ell, \ell+1]$. Les inégalités sont conservées par intégration, donc l'intégrale

$$\int_k^{k+1}\int_\ell^{\ell+1} \frac{1}{\sqrt{xy}(x+y-1)}\, dy\, dx$$

est majorée par

$$\frac{1}{\sqrt{k\ell}(k+\ell-1)}\int_k^{k+1}\int_\ell^{\ell+1} dy\, dx = \frac{1}{\sqrt{k\ell}(k+\ell-1)}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$I_n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k\ell}(k+\ell-1)}.$$

Comme tous les termes de la somme sont positifs, on en déduit que $q_n(a) \geqslant I_n \geqslant 4J_n$ par **9.**

14. c. Par **8.b.** et **8.c.**, on a $q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $N(H_n) = \rho_n$ par **6.** Comme $a/\|a\|$ est un vecteur unitaire,

$$N(H_n) \geqslant q_n\Big(\frac{a}{\|a\|}\Big) = \frac{q_n(a)}{\|a\|^2} \geqslant \frac{4J_n}{1+\ln n} \sim \pi$$

et comme $N(H_n) < \pi$ par **8.b.**, on en déduit que $N(H_n)$ tend vers π.

D'après CCP 2013 PSI.