

Composition de Mathématiques

Le 10 décembre 2014 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

❖ Problème ❖

On note I , l'intervalle $[1, +\infty[$ et E , l'espace vectoriel réel des fonctions continues et bornées sur I . On fixe un réel a strictement positif et, pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction $U(f) : I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in I, \quad U(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$$

ainsi que la quantité

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|,$$

dite **norme uniforme de f sur I** .

1. Soit $f \in E$.

1. a. Démontrer que la fonction $U(f)$ est bien définie sur l'intervalle I , puis qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

1. b. Démontrer que $U(f)$ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$y'(x) - ay(x) = -f(x) \quad (E_f)$$

qui soit bornée sur I .

2. Démontrer que U est un endomorphisme de E et que

$$\forall f \in E, \quad \|U(f)\|_\infty \leq \frac{1}{a} \|f\|_\infty.$$

Cet endomorphisme est-il injectif ?

Partie A. Comportement de U sur des sous-espaces vectoriels de dimension finie

3. Pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, on considère la fonction f_k définie par

$$\forall x \in I, \quad f_k(x) = e^{-kx}.$$

3. a. Calculer $U(f_k)$.

3. b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a\lambda \leq 1$. Démontrer que le sous-espace $\text{Ker}(U - \lambda I_E)$ n'est pas réduit au vecteur nul. Quelle est sa dimension ?

3. c. Expliciter $U^n(f_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{R}_+$. En déduire la limite de $U^n(f_k)(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Dans cette question, on suppose que $a = 1$.

4. a. Soit $P = \text{Vect}(\sin, \cos)$. Démontrer qu'il existe un endomorphisme U_P de P tel que

$$\forall \varphi \in P, \quad U_P(\varphi) = U(\varphi).$$

4. b. Expliciter la matrice M qui représente U_P dans la base (\sin, \cos) .

4. c. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la limite de M^n lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\varphi_n = [t \mapsto e^{-t} t^n].$$

5. a. Démontrer que la famille $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre.

5. b. Établir une relation entre φ_n , $U(\varphi_n)$ et $U(\varphi_{n-1})$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. c. En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel F_p engendré par $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p$ est stable par U .

On note T , la matrice de l'endomorphisme induit par restriction de U à F_2 relative à la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$.

5. d. La matrice T est-elle diagonalisable ?

5. e. Calculer le polynôme minimal de T .

5. f. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la limite de T^n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B. Propriétés analytiques de U

6. Soit $f \in E$. Démontrer que

$$U^{n+1}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$.

7. Soit $f \in E$, une fonction de classe \mathcal{C}^1 dont la dérivée f' est bornée sur I (de telle sorte que $f' \in E$). Démontrer que

$$[U(f)]' = U(f').$$

8. Soit $f \in E$.

8. a. Démontrer que

$$\forall x \in I, \quad U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt.$$

8. b. En déduire que

$$\forall x \in I, \quad |U(f)(x)| \leq U(|f|)(x).$$

8. c. On suppose que $f \in E$ est une fonction décroissante à valeurs positives. Démontrer que $U(f)$ est aussi une fonction décroissante à valeurs positives et que

$$\forall x \in I, \quad a U(f)(x) \leq f(x).$$

Partie C. Étude asymptotique de $U(f)$

Soient $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$, deux applications continues, l'application β étant strictement positive et intégrable sur I .

9. Soit $f \in E$, admettant une limite $b \in \mathbb{R}$ au voisinage de $+\infty$. Démontrer que $U(f)$ admet une limite au voisinage de $+\infty$ et préciser la valeur de cette limite.

☞ On pourra commencer par traiter le cas où $b = 0$.

10. Pour tout $\omega > 0$, on pose

$$g_\omega = \left[t \mapsto \frac{1}{t^\omega} \right] \quad \text{et} \quad h_\omega = U(g_\omega).$$

10.a. Démontrer que

$$\forall x \in I, \quad h_\omega(x) = \frac{1}{\alpha} g_\omega(x) - \frac{\omega}{\alpha} h_{\omega+1}(x)$$

et en déduire que

$$h_\omega(x) \sim \frac{1}{\alpha} g_\omega(x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

10.b. On suppose que $f(x) \sim g_\omega(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Démontrer que

$$U(f)(x) \sim \frac{1}{\alpha} f(x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

11.a. Soit $u \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| e^u - \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} \right| \leq C \frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En déduire que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}.$$

11.b. Démontrer que

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k (x^k - 1)}{k \cdot k!}$$

pour tout $x \in I$.

11.c. En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x^k - 1)}{k \cdot k!} = -\ln x + K - \frac{e^{-x}}{x} + o(e^{-x}/x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

11.d. Comment préciser le développement asymptotique précédent ?

Partie D. Cas des fonctions intégrables sur I

On note E_1 , le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions intégrables sur I .

On sera amené à utiliser le **théorème de Fubini** qui assure que : si une fonction $\varphi : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses

(H₁) pour tout $x \in I$, la fonction

$$[t \mapsto \varphi(x, t)]$$

est continue et intégrable sur J ;

(H₂) la fonction

$$U = \left[x \mapsto \int_J |\varphi(x, t)| dt \right]$$

est continue sur I ;

(H₃) pour tout $t \in J$, la fonction

$$[x \mapsto \varphi(x, t)]$$

est continue et intégrable sur I ;

(H₄) la fonction

$$\Phi = \left[t \mapsto \int_I |\varphi(x, t)| dx \right]$$

est intégrable sur J ,

alors la fonction U est intégrable sur I et

$$\int_I U(x) dx = \int_J \Phi(t) dt$$

ou, autrement dit,

$$\int_J \left(\int_I |\varphi(x, t)| dx \right) dt = \int_I \left(\int_J |\varphi(x, t)| dt \right) dx.$$

Le théorème de Fubini est donc une condition suffisante pour permuter l'ordre des intégrations.

12. Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{R}_+$ la fonction $U(f_k)$ est-elle intégrable sur I ?

13. Pour quelles valeurs de $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction $U(g_\omega)$ est-elle intégrable sur I ?

14. On suppose que $f \in E_1$. Démontrer à l'aide du théorème de Fubini que $U(f)$ est intégrable sur I et que

$$\int_1^{+\infty} |U(f)(x)| dx \leq \frac{1}{\alpha} \int_1^{+\infty} |f(t)| dt.$$

Partie E. Intelligence numérique

15. Comment calculer une valeur approchée de l'intégrale suivante ?

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

16. On souhaite programmer le calcul de $U(f)$ en fonction de f . Exposer les difficultés qui apparaissent et proposer des solutions.

Solution \ast Solutions bornées d'une équation différentielle

1.a. La fonction f est continue sur $I = [1, +\infty[$, donc la fonction

$$F_a = [t \mapsto f(t)e^{-at}]$$

est continue sur I . D'autre part, f est bornée sur I , donc

$$f(t)e^{-at} = \mathcal{O}(e^{-at})$$

au voisinage de $+\infty$, donc la fonction F_a est intégrable sur I et, par restriction, elle est intégrable sur $[x, +\infty[$ pour tout $x \in I$. La fonction $U(f)$ est donc bien définie sur I .

\ast Comme F_a est continue sur $I = [1, +\infty[$, alors la fonction

$$\left[x \mapsto \int_1^x F_a(t) dt \right]$$

est une primitive sur I de la fonction F_a et donc, en particulier, une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I (théorème fondamental du calcul intégral).

D'après la relation de Chasles,

$$\forall x \in I, \quad U(f)(x) = e^{ax} \int_1^{+\infty} F_a(t) dt - e^{ax} \int_1^x F_a(t) dt$$

ce qui montre que $U(f)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I et que, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} [U(f)]'(x) &= ae^{ax} \int_1^{+\infty} F_a(t) dt - ae^{ax} \int_1^x F_a(t) dt \\ &\quad - e^{ax} F_a(x) \\ &= aU(f)(x) - e^{ax} F_a(x) \\ &= aU(f)(x) - f(x). \end{aligned}$$

1.b. On a montré à la question précédente que $U(f)$ est une solution sur I de l'équation différentielle (E_f) .

\ast Comme la fonction F_a est intégrable sur I , on déduit de l'inégalité de la moyenne que

$$\forall x \in I, \quad |U(f)(x)| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} |e^{-at} f(t)| dt.$$

La fonction f est bornée sur I et la borne supérieure est un majorant, donc

$$\forall t \in I, \quad |f(t)| \leq \|f\|_\infty$$

et par conséquent,

$$\forall t \in I, \quad |e^{-at} f(t)| \leq \|f\|_\infty e^{-at}.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\forall x \in I, \quad |U(f)(x)| \leq \|f\|_\infty e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{\|f\|_\infty}{a},$$

donc la fonction $U(f)$ est bornée sur I et, par passage au sup,

$$\|U(f)\|_\infty \leq \frac{1}{a} \|f\|_\infty.$$

\ast Soit $V(f)$, une solution de (E_f) bornée sur I . Alors $U(f) - V(f)$ est une fonction bornée sur I qui vérifie l'équation homogène

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) = 0.$$

La solution générale de l'équation homogène ayant pour expression

$$y(x) = Ae^{ax},$$

on en déduit que $A = 0$ et donc que $V(f) = U(f)$.

\ast La fonction $U(f)$ est donc bien l'unique solution de l'équation (E_f) qui soit bornée sur I .

2. L'application $U(f)$ est bien définie pour tout $f \in E$, continue (car de classe \mathcal{C}^1) et bornée sur I d'après **1.b.**, donc elle appartient à E .

La linéarité de U est une conséquence directe de la linéarité de l'intégrale sur l'espace des fonctions intégrables sur I .

L'application U est donc un endomorphisme de E .

\ast Si $U(f)$ est l'application nulle, l'équation (E_f) admet une solution identiquement nulle sur I , donc f est identiquement nulle sur I . L'endomorphisme U est donc injectif.

Remarque. Il existe évidemment des applications f continues et bornées sur I qui ne sont pas de classe \mathcal{C}^1 , donc U n'est pas surjectif.

Partie A. Comportement de U sur des sous-espaces vectoriels de dimension finie

3.a. Il est clair que f_k est continue et bornée sur I et donc que $f_k \in E$. On vérifie que

$$U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k.$$

3.b. Pour tout réel λ tel que

$$0 < \lambda \leq \frac{1}{a},$$

il existe un, et un seul, réel $k \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\lambda = \frac{1}{a+k}$$

(il s'agit de $k = (1 - a\lambda)/\lambda$) et la fonction f_k appartient à $\text{Ker}(U - \lambda I_E)$, qui n'est donc pas réduit au vecteur nul.

Réciproquement, si $f \in E$ appartient à $\text{Ker}(U - \lambda I_E)$, alors $U(f) = \lambda f$ et

$$\forall x \in I, \quad \lambda f'(x) - a\lambda f(x) = -f(x)$$

d'après (E_f) . On en déduit que

$$\forall x \in I, \quad f'(x) + \frac{1-a\lambda}{\lambda} f(x) = 0$$

et donc que f est proportionnelle à f_k pour

$$k = \frac{1-a\lambda}{\lambda}.$$

Par conséquent, $\dim \text{Ker}(U - \lambda I_E) = 1$ pour tout réel λ tel que $0 < a\lambda \leq 1$.

3. c. Puisque

$$U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k,$$

une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U^n(f_k) = \frac{1}{(a+k)^n} f_k.$$

✦ Par conséquent, lorsque n tend vers $+\infty$, la quantité $U^n(f_k)(x)$ tend

- vers 0 si $k > 1 - a$;
- vers $f_k(x) = e^{(a-1)x}$ si $k = 1 - a$;
- vers $+\infty$ si $0 \leq k < 1 - a$.

4. a. Pour tout $a > 0$ et tout $x \geq 1$,

$$\int_x^{+\infty} e^{(i-a)t} dt = \frac{e^{-ax} [a \cos x - \sin x + i(\cos x + a \sin x)]}{a^2 + 1}.$$

En particulier, pour $a = 1$,

$$U(\sin) = \frac{\sin + \cos}{2} \quad \text{et} \quad U(\cos) = \frac{-\sin + \cos}{2},$$

donc le plan $P = \text{Vect}(\sin, \cos)$ est stable par U et U_P est l'endomorphisme de P induit par restriction de U .

Remarque. D'après 1.b., la fonction $U(\cos)$ (resp. $U(\sin)$) est une solution particulière bornée de (B_{\cos}) (resp. de (B_{\sin})) et une telle solution, d'après le cours de Première année, est une combinaison linéaire de \cos et de \sin — combinaison linéaire qu'il est facile d'expliciter pour exprimer $U(\cos)$ et $U(\sin)$.

4. b.

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta = \pi/4$.

4. c. Les puissances d'une matrice de rotation plane sont évidentes à calculer. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{2^{n/2}} \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

et la matrice M^n tend vers la matrice nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

5. a. La famille $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre si, et seulement si, la famille $(\varphi_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$.

Considérons donc une famille $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$ de scalaires tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k e^{-t k} = 0.$$

On en déduit que l'expression polynomiale

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$$

admet une infinité de zéros et par conséquent que tous les scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont nuls.

La famille $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une famille libre, évidemment constituée de vecteurs de E .

5. b. En intégrant par parties,

$$\forall x \in I, \quad U(\varphi_{n-1})(x) = -\frac{x^n e^{-x}}{n} + \frac{a+1}{n} U(\varphi_n)(x)$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nU(\varphi_{n-1}) = -\varphi_n + (a+1)U(\varphi_n).$$

5. c. Comme $\varphi_0 = f_1$, alors $U(\varphi_0) \in \mathbb{R} \cdot \varphi_0$ (d'après 3.a.), ce qui montre que le sous-espace F_0 est stable par U .

Supposons que, pour un entier $p \in \mathbb{N}$, le sous-espace F_p soit stable par U . Alors

$$\forall 0 \leq k \leq p, \quad U(\varphi_k) \in F_p \subset F_{p+1}$$

et d'après la question précédente,

$$U(\varphi_{p+1}) = \frac{p+1}{a+1} U(\varphi_p) + \frac{1}{a+1} \varphi_{p+1} \in F_p + \mathbb{R} \cdot \varphi_{p+1} = F_{p+1},$$

donc F_{p+1} est stable par U .

On a ainsi démontré par récurrence que les sous-espaces F_p sont stables par U pour tout $p \in \mathbb{N}$.

5. d. D'après les questions précédentes,

$$U(\varphi_0) = \frac{1}{a+1} \varphi_0$$

$$U(\varphi_1) = \frac{1}{(a+1)^2} \varphi_0 + \frac{1}{a+1} \varphi_1$$

$$U(\varphi_2) = \frac{2}{(a+1)^3} \varphi_0 + \frac{2}{(a+1)^2} \varphi_1 + \frac{1}{a+1} \varphi_2$$

et donc

$$T = \frac{1}{a+1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a+1} & \frac{2}{(a+1)^2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

✦ La matrice T est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Son spectre est donc réduit à $\{1/(1+a)\}$ et comme le sous-espace propre associé est la droite engendrée par $\langle 1, 0, 0 \rangle$, la matrice T n'est pas diagonalisable.

5. e. Notons $\lambda = 1/(1+a)$. La matrice $(T - \lambda I_3)$ est triangulaire supérieure stricte, donc nilpotente. On vérifie facilement que

$$(T - \lambda I_3)^2 = \frac{1}{(1+a)^4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et que $(T - \lambda I_3)^3 = 0$. Par conséquent, $(X - \lambda)^3$ est un polynôme annulateur unitaire de T .

Le polynôme minimal de T est donc un diviseur unitaire $(X - \lambda)^3$; il est distinct de 1 (un polynôme minimal n'est jamais constant); distinct de $(X - \lambda)$ et de $(X - \lambda)^2$ (qui ne sont pas annulateurs); donc il est égal à $(X - \lambda)^3$.

5. f. En calculant T^2 et T^3 , on conjecture que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T^n = \frac{1}{(a+1)^n} \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{a+1} & \frac{n(n+1)}{(a+1)^2} \\ 0 & 1 & \frac{2n-1}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qu'il est facile de vérifier par récurrence.

✦ Comme $a > 0$, on en déduit que la matrice T^n tend vers la matrice nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B. Propriétés analytiques de U

6. Commençons par le commencement et justifions que les intégrales existent au sens propre.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ fixés, la fonction

$$[t \mapsto (t-x)^n e^{-at} f(t)]$$

est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$ qui contient l'intervalle d'intégration $[x, +\infty[$. Comme f est bornée, on en déduit que

$$(t-x)^n e^{-at} f(t) = \mathcal{O}(t^n e^{-at}) = \mathcal{O}(t^n e^{-at/2} e^{-at/2}) = o(e^{-at/2})$$

lorsque t tend vers $+\infty$. Comme $a/2 > 0$, cette fonction est bien intégrable sur $[x, +\infty[$.

✦ Procédons maintenant par récurrence.

H.R. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que

$$U^n(g)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} g(t) dt$$

pour tout $x \in I$ et tout $g \in E$.

L'hypothèse de récurrence est vraie pour $n = 1$ par définition de U .

Si elle est vraie pour un rang $n \geq 1$, alors

$$U^{n+1}(f)(x) = U^n(U(f))(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} U(f)(t) dt$$

pour tout $f \in E$ et tout $x \in I$. On intègre alors par parties, en remarquant que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} \right) = \frac{(t-x)^n}{n!}$$

et que, d'après 1.b.,

$$\frac{d}{dt} (e^{-at} U(f)(t)) = -e^{-at} f(t).$$

Pour tout $A \geq x$, on en déduit que

$$\int_x^A \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} U(f)(t) dt = \frac{(A-x)^n}{n!} e^{-aA} U(f)(A) + \int_x^A \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt$$

et comme $U(f)$ est bornée sur I , on en déduit (en faisant tendre A vers $+\infty$) que

$$U^{n+1}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt$$

pour tout $x \in I$ et tout $f \in E$.

La propriété est ainsi démontrée par récurrence.

7. Tout d'abord, on sait que $U(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I (par 1.a.) et on suppose que $f' \in E$, donc les deux applications $U(f')$ et $[U(f)]'$ existent bien.

Intégrons par parties. Pour tout $A > x$,

$$\int_x^A e^{-at} f'(t) dt = [e^{-at} f(t)]_x^A + a \int_x^A e^{-at} f(t) dt$$

et comme f est bornée sur I , on en déduit en faisant tendre A vers $+\infty$ que

$$\forall x \in I, \quad e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f'(t) dt = -f(x) + aU(f)(x) = [U(f)]'(x)$$

d'après 1.b.

8.a. Il suffit d'effectuer le changement de variable affine (donc licite) $[t \leftarrow t-x]$.

8.b. D'après l'inégalité de la moyenne,

$$|U(f)(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-at} |f(x+t)| dt = U(|f|)(x)$$

pour tout $x \in I$.

8.c. Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $1 \leq x \leq y$. Alors $x+t \leq y+t$ et comme f est décroissante et positive,

$$0 \leq f(y+t) \leq f(x+t) \leq f(x),$$

donc

$$0 \leq e^{-at} f(y+t) \leq e^{-at} f(x+t) \leq e^{-at} f(x)$$

et en intégrant pour $t \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$0 \leq U(f)(y) \leq U(f)(x) \leq \frac{f(x)}{a}.$$

Donc $U(f)$ est bien une fonction décroissante et positive et

$$\forall x \in I, \quad aU(f)(x) \leq f(x).$$

Partie C. Étude asymptotique de $U(f)$

9. Posons $\alpha(t) = e^{-at} f(t)$ et $\beta(t) = e^{-at}$: l'application α est continue sur I et l'application β (fonction de référence) est strictement positive et intégrable sur I .

✦ Si f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, alors

$$\alpha(t) = o(\beta(t))$$

au voisinage de $+\infty$, donc (théorème d'intégration des relations de comparaison)

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt = o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right) = o(e^{-ax})$$

et donc

$$U(f)(x) = o(1)$$

ce qui signifie que $U(f)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

✦ Supposons que f tende vers une limite b non nulle au voisinage de $+\infty$. Alors

$$\alpha(t) \sim b\beta(t),$$

donc

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \sim \left(\int_x^{+\infty} b\beta(t) dt\right) \sim \frac{b}{a} e^{-ax}$$

et donc

$$U(f)(x) \sim \frac{b}{a}$$

ce qui signifie que $U(f)$ tend vers b/a au voisinage de $+\infty$.

✦ Ainsi, quel que soit $b \in \mathbb{R}$, si la fonction $f \in E$ tend vers b au voisinage de $+\infty$, alors $U(f)$ tend vers b/a au voisinage de $+\infty$.

10. a. Pour tout $\omega > 0$, la fonction g_ω appartient à E , donc h_ω est bien définie.

✦ Une nouvelle intégration par parties montre que

$$\forall x \in I, \quad h_\omega(x) = \frac{1}{a}g_\omega(x) - \frac{\omega}{a}h_{\omega+1}(x).$$

✦ Comme on l'a dit, la fonction (de référence)

$$\beta = [t \mapsto g_\omega(t)e^{-at}]$$

est intégrable sur I et de plus, elle est strictement positive sur I . Il est clair que la fonction

$$\alpha = [t \mapsto g_{\omega+1}(t)e^{-at}]$$

est continue sur I et que

$$\alpha(t) = o(\beta(t))$$

au voisinage de $+\infty$. On peut donc intégrer cette relation de comparaison :

$$h_{\omega+1}(x) = U(\alpha)(x) = o(U(\beta)(x)) = o(h_\omega(x))$$

et déduire de la relation précédente que

$$\frac{1}{a}g_\omega(x) = h_\omega(x) + o(h_\omega(x))$$

et donc que

$$h_\omega(x) \sim \frac{1}{a}g_\omega(x)$$

au voisinage de $+\infty$.

10. b. On a démontré que la fonction (de référence)

$$\beta = [t \mapsto g_\omega(t)e^{-at}]$$

était positive et intégrable sur I . La fonction

$$\alpha = [t \mapsto f(t)e^{-at}]$$

est continue et on suppose ici que

$$\alpha(t) \sim \beta(t)$$

au voisinage de $+\infty$. Par conséquent,

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \sim \int_x^{+\infty} \beta(t) dt$$

et donc

$$U(f)(x) \sim h_\omega(x)$$

au voisinage de $+\infty$. On déduit alors de la question précédente que

$$U(f)(x) \sim \frac{1}{a}g_\omega(x) \sim \frac{1}{a}f(x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

11. a. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f = [t \mapsto e^t]$ sur le segment $[0 \leftrightarrow u]$.

La longueur de ce segment est égale à $|u|$.

La dérivée $(n + 1)$ -ième de f , égale à \exp , est positive et majorée sur ce segment par 1 (si $u < 0$) ou par e^u (si $u \geq 0$), donc majorée par $C = e^{|u|}$ (quel que soit le signe de u).

✦ Par croissances comparées, le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (le réel u restant fixé). Cela prouve la convergence de la série et que la somme de cette série est bien égale à e^u .

11. b. On déduit de **11. a.** que, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} \forall t \in [1, x], \quad \frac{e^{-at}}{t} &= \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!} \\ &= \frac{1}{t} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-a)^{k+1} t^k}{(k+1)!} \end{aligned}$$

et donc que la série de fonctions

$$\sum \frac{(-a)^{k+1} t^k}{(k+1)!}$$

converge simplement sur le segment $[1, x]$. La somme de cette série de fonctions, égale à

$$\frac{e^{-at} - 1}{t},$$

est continue sur ce segment et la série de terme général

$$\int_1^x \left| \frac{(-a)^{k+1} t^k}{(k+1)!} \right| dt = \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{x^{k+1} - 1}{k+1}$$

est absolument convergente (règle de D'Alembert) : on peut appliquer ici le théorème d'intégration terme à terme, qui donne

$$\int_1^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-a)^{k+1} t^k}{(k+1)!} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k (x^k - 1)}{k! \cdot k}.$$

Le résultat voulu découle alors de la linéarité de l'intégrale.

11. c. On prend $a = 1$ dans cette question.

La fonction $[t \mapsto e^{-t}/t]$ est clairement positive et intégrable sur $[1, +\infty[$ et d'après la relation de Chasles,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt}_{K>0} - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

D'autre part, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \sim \frac{1}{x}$$

d'après **10. a.** (avec $\omega = 1$) et donc

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-x}}{x} + o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right).$$

On déduit alors de la question précédente que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x^k - 1)}{k \cdot k!} = -\ln x + K - \frac{e^{-x}}{x} + o(e^{-x}/x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

11. d. Ce développement repose sur une estimation de h_1 . On peut donc exploiter les résultats du **10.a.** :

$$\forall k \geq 1, \quad h_k = g_k - kh_{k+1}$$

en sachant que

$$h_{k+1} \sim g_{k+1} = o(g_k).$$

On obtient ainsi de proche en proche une expression développée arbitrairement précise de h_1 , par exemple :

$$\begin{aligned} h_1 &= g_1 - h_2 \\ &= g_1 - (g_2 - 2h_3) \\ &= g_1 - g_2 + 2(g_3 - 3h_4) \\ &= g_1 - g_2 + 2g_3 - 6g_4 + o(g_4) \end{aligned}$$

d'où on tire

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x^k - 1)}{k \cdot k!} &= -\ln x + K - \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2} \\ &\quad - 2\frac{e^{-x}}{x^3} + 6\frac{e^{-x}}{x^4} + o(e^{-x}/x^4) \end{aligned}$$

Cette précision est illusoire si on n'est pas en mesure de calculer une valeur approchée arbitrairement précise de la constante K : cf. **15.**

Partie D. Cas des fonctions intégrables sur I

12. D'après **3.a.**,

$$\forall k \in \mathbb{R}_+, \quad U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k$$

donc $U(f_k)$ est intégrable sur I si, et seulement si, $k > 0$.

13. Pour tout $\omega > 0$, la fonction $U(g_\omega)$ est continue sur I (par **1.a.**) et (par **10.a.**)

$$U(g_\omega)(x) \sim \frac{1}{a} g_\omega(x)$$

au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, la fonction $U(g_\omega)$ est intégrable sur I si, et seulement si, la fonction g_ω est intégrable sur I , c'est-à-dire si, et seulement si, $\omega > 1$.

14. Comme la fonction $U(f)$ est continue sur I , il suffit (par **8.b.**) de démontrer que $U(|f|)$ est intégrable sur I pour en déduire que $U(f)$ est intégrable sur I .

✦ Nous allons pour cela appliquer le théorème de Fubini à l'application à valeurs positives

$$\varphi = [(x, t) \mapsto e^{-at} |f(x+t)|]$$

définie pour $(x, t) \in I \times \mathbb{R}_+$.

✦ Comme $f \in E$, alors $|f|$ est continue et bornée donc, pour tout $x \in I$, l'application

$$[t \mapsto \varphi(x, t)]$$

est continue et intégrable sur $J = [0, +\infty[$ et l'application

$$U(|f|) = \left[x \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi(x, t) dt \right]$$

est continue sur I (d'après **1.**). Les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées.

✦ Comme $f \in E_1$, pour tout $t \in [0, +\infty[$, l'application $|f|$ est intégrable sur $[1+t, +\infty[\subset I$. D'après le théorème de changement de variable, l'application

$$[x \mapsto |f(x+t)|]$$

est donc intégrable sur I et par conséquent l'application

$$[x \mapsto \varphi(x, t)]$$

est intégrable sur I . L'hypothèse (H_3) est vérifiée.

✦ Vérifions enfin l'hypothèse (H_4) en étudiant l'application Φ définie par

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad \Phi(t) &= \int_1^{+\infty} \varphi(x, t) dx \\ &= e^{-at} \int_1^{+\infty} |f(x+t)| dx. \end{aligned}$$

→ D'après le théorème de changement de variable,

$$\forall t \in I, \quad \Phi(t) = e^{-at} \int_{1+t}^{+\infty} |f(u)| du$$

et comme $|f|$ est continue et intégrable sur I , la fonction Φ est continue (et même de classe \mathcal{C}^1) sur I .

→ En outre,

$$\forall t \in I, \quad |\Phi(t)| \leq e^{-at} \int_1^{+\infty} |f(u)| du = Ke^{-at}$$

donc Φ est intégrable sur I .

✦ Le théorème de Fubini nous assure alors que la fonction $U(|f|)$ est intégrable sur I et que

$$\int_1^{+\infty} U(|f|)(x) dx = \int_0^{+\infty} \Phi(t) dt.$$

✦ D'après **8.b.**,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} |U(f)(x)| dx &\leq \int_1^{+\infty} U(|f|)(x) dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-at} \left[\int_{1+t}^{+\infty} |f(u)| du \right] dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-at} \left[\int_1^{+\infty} |f(u)| du \right] dt \end{aligned}$$

car

$$\int_{1+t}^{+\infty} |f(u)| du \leq \int_1^{+\infty} |f(u)| du$$

pour tout $t \geq 0$. L'intégrale en u ne dépendant pas de t , on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} |U(f)(x)| dx &\leq \left[\int_1^{+\infty} |f(u)| du \right] \left[\int_0^{+\infty} e^{-at} dt \right] \\ &\leq \frac{1}{a} \int_1^{+\infty} |f(u)| du. \end{aligned}$$

Partie E. Intelligence numérique

15. On a rencontré l'intégrale

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

au 11.b. avec le développement asymptotique

$$A = \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x^k - 1)}{k \cdot k!} + \frac{e^{-x}}{x} + o(e^{-x}/x).$$

Cette propriété pose plusieurs problèmes :

→ Le reste est négligeable lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui veut dire que A est la différence entre deux infiniment grands ($\ln x$ et la somme de la série de fonctions), qu'il faut donc calculer avec une très grande précision pour obtenir une bonne précision de A .

→ Le reste est mal connu : il est inférieur à e^{-x}/x pour x assez grand, mais on n'a pas de moyen de savoir quelles valeurs de x sont assez grandes !

Par 11.c., on sait que ce reste est à peu près égal à e^{-x}/x^2 , mais on ne sait pas non plus quelles valeurs de x sont assez grandes pour assimiler le reste à e^{-x}/x^2 !

→ On ne peut pas calculer la somme de la série mais seulement une somme partielle : il faut pour cela estimer le nombre de termes nécessaires pour que le reste de la série soit du même ordre que e^{-x}/x^2 .

→ Le calcul des sommes partielles est lui-même très délicat : bien que le terme général tende vers 0 (puisque la série converge), certains termes prennent de très grandes valeurs et cela risque de causer des erreurs d'arrondi difficiles à rattraper.

✦ Il y a cependant une bonne nouvelle : la série est alternée et pour $k \geq x$, on peut vérifier que le terme général est décroissant en valeur absolue, ce qui permet de majorer le reste de cette série par $x^k/(k \cdot k!)$.

Autre bonne nouvelle : $\ln x$ et la somme de la série, qui sont des infiniment grands du même ordre, sont en quelque sorte de petits infiniment grands et, pour x de l'ordre de 10 ou 20, ces quantités restent assez petites.

```
import numpy as np
from math import log as log
from math import exp as exp

def calcul(x):
    y = 4*x
    S = np.zeros(y)
    S[0] = log(x)
    s, f, p = 1, 1, 1
    for k in range(1, y):
        s = -s
        f *= k
        p *= x
        S[k] = s*(p-1)/(k*f)
    return S, np.sum(S)+exp(-x)/x

X = [5, 10, 20, 30, 40]
for x in X:
    print(x)
    print(calcul(x))
```

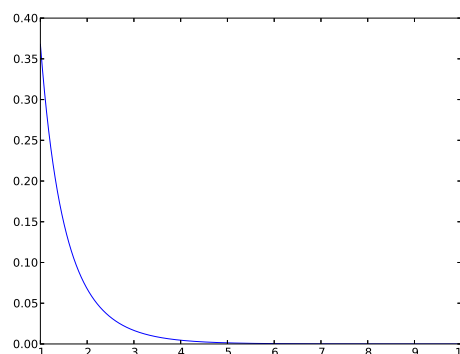
Le code ci-dessus donne une valeur approchée de l'intégrale avec 9 décimales exactes pour $x = 20$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \approx 0,219383934$$

Le plus grand terme calculé obtenir la somme partielle est de l'ordre de 10^6 .

On a trois décimales exactes pour $x = 5$ (pas assez proche de $+\infty$) et une seule décimale exacte pour $x = 40$ (une vingtaine de termes de la somme partielle sont de l'ordre de 10^{14} , ce qui cause des erreurs d'arrondi irrattrapables).

✦ Une autre méthode repose sur le fait que l'intégrande tend assez vite vers 0. Par conséquent, l'intégrale sur $[1, +\infty[$ diffère assez peu (mais de combien ?) de l'intégrale sur un segment $[1, A]$ (mais comment choisir A ?) qu'on peut approcher par la méthode des trapèzes.



Par deux intégrations par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= \frac{e^{-A}}{A} - \int_A^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\ \int_A^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= \frac{e^{-A}}{A^2} - 2 \int_A^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} dt \\ &= \frac{e^{-A}}{A^2} + o\left(\int_A^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{e^{-A}}{A} - \frac{e^{-A}}{A^2} \leq \int_A^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \frac{e^{-A}}{A}.$$

On dispose ainsi d'un *encadrement* de la fin de l'intégrale (et pas seulement d'un ordre de grandeur). Pour $A = 8$, la largeur de cet encadrement est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-6}$.

L'intégrande étant convexe, la méthode des trapèzes sur $[0, A]$ va donner une valeur approchée *par excès* de l'intégrale (on va remplacer la courbe par des cordes). On sait que l'erreur induite par la méthode des trapèzes est en $1/n^2$, où n est le nombre de sous-intervalles de $[0, A]$ utilisés. Pour rester cohérent avec l'ordre de grandeur précédent, on va donc prendre $n = 5000$.

Le code suivant donne une valeur approchée par excès à 0,002% près et une valeur approchée par défaut à 0,0003% près.

```

import numpy as np

def f(x):
    return np.exp(-x)/x

def err(x):
    ref = 0.219383934
    taux = (x-ref)/ref*100
    return taux

N = 5000
x_max = 8
x = np.linspace(1,x_max,N)
y = f(x)
y[0] *= 0.5
y[-1] *= 0.5
dx = (x_max-1.0)/(N-1)

trapezes = sum(y)*dx
trap_cor = trapezes+f(x_max)
trap_cor2 = trap_cor-f(x_max)/x_max
print(trap_cor2, trapezes, trap_cor)
print(err(trap_cor2), err(trapezes),
      err(trap_cor))

```

Dans ce code, N désigne le nombre de points de la subdivision. Par conséquent, le nombre d'intervalles est égal à $(N - 1)$, ce dont il faut tenir compte dans la définition de dx (qui représente la largeur des sous-intervalles).

La formule des trapèzes sur $[a, b]$ découpé en n sous-intervalles est

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{y_n}{2} \right)$$

ce qui explique pourquoi on divise par 2 les valeurs du premier ($y[0]$) et du dernier ($y[-1]$) éléments de l'échantillon des valeurs de f .

REMARQUE.— Pour gagner en précision, il faut à la fois augmenter A et N en veillant à ce que les erreurs dues à ces deux facteurs restent du même ordre de grandeur.

16. On a trois moyens de calculer $U(f)$.

✦ La première expression :

$$e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$$

sera difficile à manipuler pour les grandes valeurs de x . En effet, la fonction $U(f)$ reste bornée et l'expression ci-dessus est donc le produit d'un infiniment grand par un infiniment petit.

✦ De même, considérer $U(f)$ comme une solution de l'équation différentielle (E_f) (au 1.b.) ne permet pas d'obtenir le graphe de $U(f)$. En effet, $U(f)$ est la *seule* solution bornée de cette équation, ce qui signifie que toutes les autres, qui sont de la forme

$$U(f)(x) + Ke^{ax}$$

avec $K \neq 0$, tendent vers $\pm\infty$ au voisinage de $+\infty$. Dans ces conditions, une erreur d'arrondi sur $U(f)(1)$, si minime soit-elle, conduit à tracer l'allure du graphe de Ke^{ax} au lieu du graphe de $U(f)$!

✦ Ne reste donc que la formule du 8.a. Cette fois encore, nous allons tronquer cette intégrale pour nous ramener à une intégrale sur un segment.

Comme f est bornée, on déduit de l'inégalité de la moyenne que

$$\left| \int_A^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt \right| \leq \|f\|_\infty \int_A^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{e^{-aA}}{a} \|f\|_\infty.$$

Pour que cette intégrale soit inférieure à $\varepsilon > 0$, il faut que A soit assez grand :

$$A \geq \frac{1}{a} \ln \frac{\|f\|_\infty}{a\varepsilon}.$$

Alors, à ε près, le réel $U(f)(x)$ est égal à

$$\int_0^A e^{-at} f(x+t) dt.$$

Il est possible de calculer une valeur approchée de cette intégrale par la méthode des trapèzes, en échantillonnant f sur le segment $[x, x + A]$.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 # Signal d'entrée
4 def f(x):
5     return np.sin(x)
6 # Signal de sortie
7 def Uf(x):
8     return 0.5*(np.sin(x)+np.cos(x))

```

On trace le graphe approché de $U(f)$ sur $[0, T]$ en calculant n valeurs de $U(f)(x)$ par unité de temps.

```

9 T = 20
10 n = 10

```

On calcule une valeur approchée de l'intégrale $U(f)(x)$ par la méthode des trapèzes restreinte à $[x, x + A]$. L'intervalle d'intégration est découpé en N sous-intervalles par unité de temps : la largeur de chaque trapèze est donc égale à $dt = 1/N$.

```

11 a, eps, M = 1.0, 0.01, 1.0
12 A = int(np.log(M/(a*eps))/a)
13 N = 100
14 dt = 1.0/N
15 # On calcule le noyau une fois pour toutes.
16 t = np.linspace(0, A, N*A+1)
17 exp = np.exp(-a*t)

```

On applique la méthode des trapèzes sur $[x, x + A]$ en échantillonnant f avant de modifier les valeurs extrêmes de l'échantillon et de retourner la valeur approchée de l'intégrale.

```
18 def trapezes(x):  
19     v = np.linspace(0, A, N*A+1)  
20     y = exp*np.sin(x + v)  
21     y[0] *= 0.5  
22     y[-1] *= 0.5  
23     return np.sum(y)*dt
```

Il reste à tracer les graphes en faisant varier x de 0 à T . On constate que, sur cet exemple au moins, le graphe approché est très proche du graphe exact.

```
24 X = np.linspace(0, T, n*T+1)  
25 # Graphe d'entrée  
26 plt.plot(X,f(X))  
27 # Graphes de sortie  
28 plt.plot(X,Uf(X),'go') # exact  
29 Y = np.array([trapezes(x) for x in X])  
30 plt.plot(X,Y,'ro')    # approché  
31 plt.show()
```

