Composition de Mathématiques

Le 14 janvier 2015 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Pour réussir les épreuves d'un concours, il est d'abord indispensable de connaître le cours, de lire le rapport du concours, et d'exercer sa sagacité sur des problèmes des années antérieures. Il est important de s'entraîner à rédiger de façon claire et concise, en citant avec précision les théorèmes employés. Il est évidemment nécessaire de faire la différence entre une condition nécessaire et une condition suffisante. (Rapport Centrale-Supélec 2012)

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

❖ Problème ❖

On s'intéresse ici à la fonction **polylogarithme**, définie comme la somme d'une série entière et prolongée à l'aide d'une représentation intégrale.

Partie A.

Dans cette partie, le réel α est fixé.

1. Déterminer avec soin le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n/n^\alpha$.

2. En déduire que la fonction L_α définie par

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

3. Démontrer que

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2).$$

4. a. Établir une relation entre $L_\alpha(x)$ et $L'_{\alpha+1}(x)$ pour $|x| < 1$. En déduire une expression de la forme

$$L_{\alpha+1}(x) = \int_0^x f_\alpha(t)\,dt.$$

4. b. Pour $|x| < 1$, expliciter $L_\alpha(x)$ pour $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ et $\alpha = 1$.

5. Dans cette question, on suppose que $\alpha \leqslant 1$. Démontrer que $L_\alpha(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

☞ *On cherchera à minorer* $L_\alpha(x)$ *pour* $0 < x < 1$.

Partie B.

Dans cette partie, on suppose que $\alpha > 1$.

6. a. Démontrer que L_α est continue sur $[-1,1]$.

6. b. Étudier $L'_2(x)$ au voisinage gauche de 1 et l'allure du graphe de L_2 au voisinage gauche de 1.

7. a. Démontrer que la fonction définie par

$$\forall u > 0, \quad \varphi(u) = \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1}$$

est intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$.

7. b. Justifier l'existence de

$$K_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,du$$

pour tout réel $x \leqslant 1$.

7. c. Démontrer que l'application K_α ainsi définie est continue sur $\left]-\infty,1\right]$.

7. d. Démontrer que K_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\infty,1\right]$ pour tout $\alpha > 2$.

7. e. Démontrer que K_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\infty,1\right[$ pour tout $\alpha > 1$.

8. a. Démontrer que l'intégrale

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt$$

est bien définie et strictement positive.

8. b. Soient $x \in [-1,1]$ et $u > 0$. Démontrer que

$$\frac{1}{e^u - x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k e^{-(k+1)u}.$$

8. c. En déduire que

$$\forall x \in [-1,1], \quad xK_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) L_\alpha(x)$$

au moyen d'une intégration terme à terme.

9. On *prolonge* la fonction L_α en posant

$$\forall x \in \left]-\infty,1\right], \quad L_\alpha(x) = \frac{x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,du.$$

9. a. Démontrer que L_α, ainsi définie, est continue sur $\left]-\infty,1\right]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\infty,1\right[$.

9. b. Démontrer que

$$\forall x \leqslant 1, \quad L_\alpha(x) = \frac{x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{[-\ell n\, t]^{\alpha-1}}{1 - xt}\,dt.$$

9. c. Démontrer qu'on peut à nouveau prolonger L_α en posant

$$\forall z \in \Omega, \quad L_\alpha(z) = \frac{z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - z}\,du$$

avec $\Omega = \mathbb{C} \setminus \left]1,+\infty\right[$. Identifier l'ensemble Ω' des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 \notin \left]1,+\infty\right[$ et vérifier que

$$\forall z \in \Omega', \quad L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(z^2).$$

Partie C.

On s'intéresse ici exclusivement à

$$L_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

pour $x \in [-1,1]$. On pourra *admettre* que $L_2(1) = \pi^2/6$ et que $L_2(-1) = -\pi^2/12$.

10. a. Démontrer que la fonction Φ définie par

$$\forall\, x \in\,]0,1[\,,\quad \Phi(x) = L_2(x) + L_2(1-x) + \ell n(x)\,\ell n(1-x)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$.

10. b. Démontrer que

$$\forall\, x \in\,]0,1[\,,\quad \Phi(x) = L_2(1).$$

En déduire la valeur de $L_2(1/2)$.

10. c. Démontrer de la même manière que

$$\forall\, x \in [-1, 1/2],\quad L_2(x) + L_2\Big(\frac{x}{x-1}\Big) = \frac{-\ell n^2(1-x)}{2}.$$

11. Calculer $\Gamma(2)$ et

$$K_2(1) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1}\,du.$$

12. On s'intéresse au prolongement de L_2 défini plus haut par

$$\forall\, x < 0,\quad L_2(x) = \frac{-x}{\Gamma(2)} \int_0^1 \frac{\ell n\, s}{1 - xs}\,ds.$$

12. a. Démontrer que

$$\forall\, x < 0,\quad L_2(x) = \int_x^0 \frac{\ell n\, t/x}{1-t}\,dt = \int_x^0 \frac{\ell n(1-t)}{t}\,dt.$$

☞ *On pourra effectuer un changement de variable et une intégration par parties.*

12. b. Calculer

$$g(x) = \int_x^0 \frac{\ell n(1-t)}{t-1}\,dt$$

pour tout $x < 0$.

12. c. Justifier l'existence de l'intégrale

$$A = \int_{-\infty}^0 \frac{\ell n(1-t)}{t(t-1)}\,dt$$

et préciser son signe.

12. d. Déterminer les limites de $g(x)$ et de $L_2(x) - g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. En déduire un équivalent simple de $L_2(x)$ au voisinage de $-\infty$.

Source : CCP 2012 PC 2 (partiel)

Extraits du rapport du jury

Consignes générales

Le sujet proposait l'étude de la fonction polylogarithme en tant que série entière, puis procédait à un prolongement grâce à une intégrale. Cela était prétexte à utiliser bon nombre de notions et résultats du programme d'analyse. À plusieurs endroits, il convenait de citer les résultats du cours et de vérifier avec précision les hypothèses. Cela révèle souvent les différentes qualités des candidats et on mesure alors leur compréhension ou au contraire leur incapacité à manipuler lesdites notions. Il en va ainsi des propriétés des séries entières, de la notion de convergence normale, de l'intégrabilité, de l'étude des intégrales à paramètre, du théorème d'intégration terme à terme. On voit aussi des étudiants qui connaissent le cours sans avoir assimilé les méthodes usuelles.

Signalons aux futurs candidats que la rigueur reste la clé de la réussite et qu'écrire n'importe quoi ne rapporte pas de points. Profitons-en pour redonner nos conseils :

- Bien lire l'énoncé et répondre explicitement aux questions posées. *Toute réponse à une question devrait se terminer par une réponse explicite, clairement identifiée* (soulignée ou encadrée) ;
- Rédiger les réponses, en explicitant les théorèmes ou arguments utilisés. *Un simple alignement de résultats ou de calculs, même « non faux », ne suffit pas la plupart du temps à avoir les points de la question.*

Rappelons encore que l'on attend des candidats des réponses argumentées et le barème prévoit toujours des points pour ces vérifications et pénalise les imprécisions caractérisées. Les techniques d'intégration par parties ou de changement de variables notamment doivent être utilisées avec un minimum de précision.

Le sujet comportait de nombreuses questions abordables et certains candidats ont pu aller très loin. Un certain nombre de questions pouvaient être considérées comme faciles ou des applications directes du cours. Dans le fil du problème, on note un nombre significatif d'erreurs (et de points perdus) chez des candidats qui omettent de mettre des valeurs absolues dans leurs raisonnements. On retrouve des notations mélangeant équivalents et développements limités notamment pour les existences d'intégrales.

Enfin, la quasi-totalité des copies sont bien présentées, rendant d'autant plus inacceptables certaines copies illisibles ou très mal présentées. La rédaction reste un axe de progrès pour les candidats, notamment pour bien citer les théorèmes utilisés. De manière générale, les correcteurs ont apprécié les copies bien présentées, où les résultats encadrés apparaissent clairement, la rédaction est précise et les justifications bien construites.

Remarques spécifiques

Passons aux remarques sur chacune des questions.

PARTIE A

1. La règle de D'Alembert est globalement assimilée, mais il reste des justifications incorrectes (absence de valeur absolue).

2. Un résultat du cours sur les séries entières qu'il suffisait de rappeler, il était inutile de le redémontrer. Quelques candidats affirment qu'une série entière converge normalement sur $]-R, R[$.

3. Cette question est presque toujours traitée correctement. Quelques erreurs néanmoins dans les plus mauvaises copies.

4.a. Si la relation sur la dérivée est le plus souvent établie correctement, il n'en va pas de même pour l'intégrale. Il était pourtant indispensable de préciser l'étude en 0, ce qui fut rarement fait.

4.b. Beaucoup trop d'erreurs dans cette question sur des calculs de sommes de séries entières de référence.

5. Certes, l'énoncé suggérait une minoration, mais on a trop souvent vu des inégalités fausses et on lit souvent de curieuses contributions.

Partie B

6.a. La convergence en $+1$ et -1 est citée le plus souvent mais la continuité (convergence normale) se limite à un lapidaire « converge donc est continue » non suffisant.

6.b. Le passage à la limite en 1 ne peut se faire aussi simplement que certains le pensent. Par ailleurs, le lien entre $L_2'(x) \to +\infty$ et la non dérivabilité de L_2 est affirmée sans être quasiment jamais démontrée.

7.a. La justification de l'existence d'une intégrale impropre pose problème dans la rédaction, même si les arguments importants sont cernés. Peu de candidats commencent par indiquer que la fonction est continue sur le domaine ouvert d'intégration. L'étude en 0, en majorité bien traitée, amène parfois à des arguments ou majorations fausses. L'étude en $+\infty$ est généralement plus satisfaisante, même si certains candidats veulent utiliser le fait que la fonction tend vers 0 en $+\infty$.

7.b. Il est décevant de constater que trop peu de candidats font un lien avec la question précédente (avec une majoration) et beaucoup recommencent un raisonnement qui d'ailleurs ne s'adapte pas au voisinage de 0. La continuité de la fonction n'est quasiment jamais évoquée, son signe non plus, ce qui est gênant pour conclure.

7.c. On peut, sur cette question et les suivantes, bien évaluer les candidats ayant travaillé régulièrement et connaissant les théorèmes du cours. Les hypothèses, notamment de domination, doivent être vérifiées. Il est aussi curieux de voir des candidats rechercher, sans succès, une autre fonction dominante que celle donnée dans l'énoncé et qui convient.

7.d. Beaucoup de rédactions approximatives sur cette question où les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre doivent être vérifiées.

7.e. Trop peu de candidats comprennent la différence entre cette question et la précédente, on affirme souvent qu'elle se traite de la même manière.

8.a. Là encore, l'argument de continuité de l'intégrande manque souvent, alors qu'ici, on en a également besoin pour $\Gamma(\alpha) > 0$. On pouvait également constater que $\Gamma(\alpha) = K_\alpha(0)$, ce que certains observent.

8.b. Beaucoup de candidats oublient de préciser que la série géométrique ne converge que si la raison est de module strictement inférieur à 1. Le reste de la question est souvent correct.

8.c. Cette question a été diversement réussie. Seuls les meilleurs citent le théorème utile et vérifient une à une les hypothèses. Plus souvent, on cite le théorème mais on ne sait pas l'appliquer. Très peu ont réussi à traiter entièrement la question.

9.a. Cette question facile, de par les connaissances accumulées sur le sujet, n'a pas échappé à grand monde.

9.b. Le caractère $\mathscr{C}^1$ et bijectif du changement de variable doit être vérifié et ne l'est pas souvent.

9.c. Le début de cette question est peu souvent abordé. Si l'existence pose quelques problèmes aux candidats, le prolongement de la fonction sur le domaine complexe est rarement justifié. La seconde partie calculatoire a souvent été assez bien traitée ; la relation est souvent prouvée correctement par ceux qui abordent la question.

Partie C

10.a. Question facile, souvent traitée, mais quelques précisions manquent parfois.

10.b. Certains candidats trichent lors du calcul de la dérivée. Le passage à la valeur en 1 n'est que rarement argumenté.

10.c. Question peu abordée.

12.a. Le passage à la limite dans l'intégration par parties est rarement justifié.

Conclusion

La progressivité des questions a permis un bon étalement des notes. Nous ne pouvons que conseiller aux futurs candidats d'améliorer leur préparation en mathématiques pour se montrer capables de mettre en œuvre, sans erreur, les notions et techniques de base. Une bonne connaissance du cours est indispensable et de nombreuses questions posées sont souvent des applications directes ; l'énoncé propose souvent une démarche de résolution qu'il convient de comprendre et de suivre en montrant son savoir-faire, ce qui est l'objet de l'évaluation.

Solution ❀ Le polylogarithme

Partie A.

1. Posons $u_n(z) = z^n/n^\alpha$. Pour $z \neq 0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = |z|\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|.$$

Par conséquent,

– Si $|z| < 1$, alors $\sum u_n(z)$ converge absolument ;

– Si $|z| > 1$, alors $\sum u_n(z)$ diverge grossièrement.

Donc le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1.

2. La fonction L_α est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1, donc elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

3. Pour $x \in]-1,1[$, on a $(-x) \in]-1,1[$ et $x^2 \in [0,1[$, donc

$$L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^\alpha} x^n = 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)^\alpha}$$

car

$$1+(-1)^n = \left|\begin{array}{l} 2 \text{ si } n \text{ est pair } (n=2p)\,; \\ 0 \text{ sinon.}\end{array}\right.$$

On en déduit que

$$L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) = 2^{1-\alpha}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^p}{p^\alpha} = 2^{1-\alpha}L_\alpha(x^2).$$

4. a. Comme $L_{\alpha+1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et que $L_{\alpha+1}(0) = 0$ (le terme constant du développement en série entière est nul), le théorème fondamental de l'analyse assure que

$$\forall\, |x| < 1, \quad L_{\alpha+1}(x) = \int_0^x L'_{\alpha+1}(t)\,dt.$$

De plus, en tant que somme d'une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1, la fonction $L_{\alpha+1}$ est dérivable terme à terme et

$$\forall\, 0 < |t| < 1, \quad L'_{\alpha+1}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nt^{n-1}}{n^{\alpha+1}} = \frac{L_\alpha(t)}{t}$$

donc

$$\forall\, |x| < 1, \quad L_{\alpha+1}(x) = \int_0^x \frac{L_\alpha(t)}{t}\,dt.$$

REMARQUE.— Il n'est pas utile de justifier l'intégrabilité de $L_\alpha(t)/t$ au voisinage de $t = 0$: on sait que $L'_{\alpha+1}$ est *continue* sur $]-1,1[$.

4. b. Pour $\alpha = 0$, on reconnaît la série géométrique :

$$L_0(x) = \frac{x}{1-x}.$$

❧ Par **4.a.**,

$$\forall\, 0 < |x| < 1, \quad L'_1(x) = \frac{L_0(x)}{x} = \frac{1}{1-x}$$

et donc

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad L_1(x) = -\ell n(1-x).$$

❧ De même,

$$L_{-1}(x) = xL'_0(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

5. Sur $]0,1[$, la fonction L_α est une somme de fonctions positives et croissantes.

En tant que fonction croissante, elle admet donc une limite, *finie ou infinie*, au voisinage gauche de 1.

En tant que somme de termes positifs,

$$\forall\, N \geqslant 1,\ \forall\, 0 < x < 1, \quad L_\alpha(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{x^n}{n}$$

puisque $\alpha \leqslant 1$.

On en déduit que

$$\forall\, N \geqslant 1, \quad \lim_{x\to1} L_\alpha(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

et comme la série (harmonique) $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif,

$$\lim_{x\to1} L_\alpha(x) \geqslant \sup_{N\in\mathbb{N}^*}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = +\infty.$$

Partie B.

6. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|u_n(x)\right| = \frac{1}{n^\alpha}$$

et comme $\alpha > 1$, la série $\sum 1/n^\alpha$ est convergente. La fonction L_α est donc continue sur $[-1,1]$ en tant que somme d'une série entière qui converge normalement sur $[-1,1]$.

REMARQUE.— Le cours sur les séries entières assure que L_α est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ mais ne dit rien sur la régularité de L_α sur $[-1,1]$: c'est le cours sur les séries de fonctions qui, seul, permet justifier ce résultat.

6. b. Comme le rayon de convergence est égal à 1, la fonction L_2 est deux fois dérivable terme à terme sur $]-1,1[$, ce qui montre que L_2 est *convexe* sur $[0,1[$.

❧ D'après la question précédente, la fonction L_2 est continue sur le segment $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, donc

$$\forall\, 0 < \alpha < 1,\ \exists\, \alpha < \beta < 1, \quad \frac{L_2(1)-L_2(\alpha)}{1-\alpha} = L'_2(\beta).$$

Par convexité de L_2 et par **4.a.**

$$\forall\, 0 < \alpha < 1, \quad \frac{L_2(1)-L_2(\alpha)}{1-\alpha} \geqslant L'_2(\alpha) = \frac{-\ell n(1-\alpha)}{\alpha}$$

donc

$$\lim_{\alpha\to1^-}\frac{L_2(1)-L_2(\alpha)}{1-\alpha} = +\infty,$$

ce qui montre que L_2 n'est pas dérivable en 1 et que son graphe présente une tangente verticale au point $(1, L_2(1))$.

7. a. La fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$.

De plus, $\varphi(u) \sim u^{\alpha-2}$ au voisinage de 0 et $\alpha-2 > -1$ (puisque $\alpha > 1$), donc φ est intégrable au voisinage de 0.

Enfin, au voisinage de $+\infty$,

$$\varphi(u) \sum u^{\alpha-1}e^{-u} = o(e^{-u/2})$$

donc φ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Donc φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

7. b. Posons

$$f(x, u) = \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}.$$

Pour tout $x \leqslant 1$, la fonction $[u \mapsto f(x, u)]$ est continue sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall\, u > 0, \quad e^u - x \geqslant e^u - 1 > 0$$

donc

$$\forall\, u > 0, \quad 0 < f(x, y) \leqslant \varphi(u).$$

Comme φ est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors $[u \mapsto f(x, u)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc $K_\alpha(x)$ est bien définie pour tout $x \leqslant 1$.

7. c. Il est clair que, pour tout $u > 0$, la fonction $[x \mapsto f(x, u)]$ est continue sur $]-\infty, 1]$.

L'encadrement de $f(x, u)$ établi à la question précédente pour justifier l'intégrabilité établit en fait la domination sur $]-\infty, 1]$: le majorant est intégrable sur $]0, +\infty[$ et indépendant de x.

Donc la fonction K_α est continue sur $]-\infty, 1]$.

7. d. Pour $x \leqslant 1$ et $u > 0$,

$$0 \leqslant \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2} \leqslant \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - 1)^2} = \Psi(u).$$

La fonction Ψ est continue sur $]0, +\infty[$, vérifie

$$\Psi(u) \sim u^{\alpha-1}e^{-2u} = o(e^{-u})$$

au voisinage de $+\infty$ et est équivalente à $u^{\alpha-3}$ au voisinage de 0. Par conséquent, pour $\alpha > 2$, la fonction Ψ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Dans ce cas, la domination de $\partial f/\partial x$ est réalisée pour $u > 0$ et $x \leqslant 1$. Comme les autres hypothèses de dérivation sous le signe $\int$ ont été vérifiées précédemment, on en déduit que K_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1]$ et que

$$\forall\, \alpha > 2,\ \forall\, x \leqslant 1, \quad K'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2}\, du.$$

7. e. Pour $\alpha > 1$, la majoration utilisée à la question précédente est inutile : le majorant n'est pas intégrable au voisinage de 0.

✎ Posons $a < 1$. Comme plus haut,

$$\forall\, x \leqslant a,\ \forall\, u > 0, \quad 0 \leqslant \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \leqslant \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - a)^2} = \Psi_a(u).$$

La fonction Ψ_a est continue sur $]0, +\infty[$, est $o(e^{-u})$ au voisinage de $+\infty$ et $\mathcal{O}(u^{\alpha-1})$ au voisinage de 0 : elle est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ et on peut donc appliquer le théorème de dérivation sous $\int$ sur tout intervalle $]-\infty, a]$.

Ainsi, la fonction K_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, 1[$ et

$$\forall\, \alpha > 1,\ \forall\, x < 1, \quad K'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2}\, du.$$

8. a. Posons $f(t, \alpha) = t^{\alpha-1}e^{-t}$. Pour tout $\alpha > 1$, la fonction $[t \mapsto f(t, \alpha)]$ est strictement positive et continue sur $]0, +\infty[$, est $o(e^{-t/2})$ au voisinage de $+\infty$ et tend vers 0 au voisinage de 0, donc elle est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\Gamma(\alpha) > 0$.

REMARQUE.— Même si la fonction Γ n'est pas au programme, il faut la connaître...

8. b. Pour $u > 0$ et $|x| \leqslant 1$, on a $|xe^{-u}| < 1$ et d'après la formule de la série géométrique,

$$\frac{1}{e^u - x} = \frac{e^{-u}}{1 - xe^{-u}} = e^{-u}\sum_{n=0}^{+\infty}(xe^{-u})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-(n+1)u}.$$

8. c. D'après la question précédente,

$$xK_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{xu^{\alpha-1}}{e^u - x}\, dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1}u^{\alpha-1}e^{-(n+1)u}\, du.$$

On pose $v_n(u) = x^{n+1}u^{\alpha-1}e^{-(n+1)u}$.

La série $\sum v_n$ est une série de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ et, d'après ce qui précède,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u) = \frac{xu^{\alpha-1}}{e^u - x}$$

est une fonction continue de u sur $]0, +\infty[$.

Chaque fonction v_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \left|v_n(u)\right| du = |x|^{n+1}\int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}e^{-(n+1)u}\, du = |x|^{n+1}\frac{\Gamma(\alpha)}{(n+1)^\alpha}$$

(changement de variable affine : $t = (n+1)u$), donc la série

$$\sum \int_0^{+\infty} \left|v_n(u)\right| du$$

est convergente. Les hypothèses du théorème lebesguien d'intégration terme à terme sont donc vérifiées. Par conséquent,

$$xK_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} v_n(u)\, du = \Gamma(\alpha)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} = L_\alpha(x)\Gamma(\alpha).$$

9. a. Conséquence de **7.c.** (continuité sur $]-\infty, 1]$) et de **7.e.** (classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$).

9. b. La fonction définie par $\varphi(t) = -\ell n\, t$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$. Comme

$$u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$, le théorème du changement de variable prouve que

$$t \mapsto \frac{(-\ell n\, t)^{\alpha-1}}{{}^1\!/_t - x}\ \frac{1}{t} = \frac{(-\ell n\, t)^{\alpha-1}}{1 - tx}$$

est intégrable sur $]0,1[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,du = \int_0^1 \frac{(-\ln t)^{\alpha-1}}{1-tx}\,dt.$$

9. c. Pour $z \in \Omega$, la fonction

$$u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - z}$$

est continue sur $]0,+\infty[$, est $\mathcal{O}(u^{\alpha-2})$ au voisinage de 0 (avec $\alpha - 2 > -1$) et $o(e^{-u/2})$ au voisinage de $+\infty$, donc l'expression

$$\frac{z}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - z}\,du,$$

qui coïncide avec $L_\alpha(x)$ sur $]-\infty,1]$, a bien un sens quel que soit $z \in \Omega$: on peut donc l'utiliser pour prolonger *aussi naturellement que possible* L_α sur Ω.

❧ Pour tout $x \in]1,+\infty[$, l'équation $z^2 = x$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$: $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$. Par conséquent,

$$\Omega' = \mathbb{C} \setminus (]-\infty,-1[\, \cup \,]1,+\infty[).$$

❧ Pour $z \in \Omega' \subset \Omega$, il est clair que $-z \in \Omega$ et $z^2 \in \Omega$, donc les intégrales qui définissent $L_\alpha(z)$, $L_\alpha(-z)$ et $L_\alpha(z^2)$ ont bien un sens. Par linéarité,

$$L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = \frac{z}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} \frac{2zu^{\alpha-1}}{e^{2u} - z^2}\,du$$

et le changement de variable affine $v = 2u$ conduit alors à

$$L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(z^2).$$

Partie C.

10. a. Pour $0 < x < 1$, on a $0 < 1 - x < 1$ et comme L_2 et $\ln$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$, alors Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$.

10. b. Par **4.a.**, la dérivée de Φ :

$$\Phi'(x) = L_2'(x) - L_2'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x}$$

est identiquement nulle sur l'*intervalle* $]0,1[$. Par suite, la fonction Φ est constante sur cet intervalle.

Par **6.a.**, la fonction L_2 est continue sur $[0,1]$ et on sait que $\ln x \ln(1-x) \sim -x\ln x$ au voisinage de 0, donc $\Phi(x)$ tend vers $L_2(0) + L_2(1)$ au voisinage de 0. Comme Φ est constante et que $L_2(0) = 0$, on en déduit que $\Phi(x) = L_2(1)$ pour tout $0 < x < 1$.

❧ Pour $x = 1/2$, on en déduit que

$$2L_2(1/2) + (\ln 2)^2 = L_2(1)$$

et donc que

$$L_2(1/2) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}.$$

10. c. On sait que L_2 est continue sur $[-1,1]$ (par **6.a.**) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ (par **2.**). Par ailleurs, l'expression

$$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

est une fonction décroissante de $x \in [-1,1[$, donc

$$\forall\, x \in [-1, 1/2], \quad -1 \leqslant \frac{x}{x-1} \leqslant -1/2.$$

La fonction auxiliaire Φ définie cette fois par

$$\Phi(x) = L_2(x) + L_2\Big(\frac{x}{x-1}\Big) + \frac{\ln^2(1-x)}{2}$$

sur $[-1,1/2]$ est donc continue sur le segment $[-1,1/2]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]-1,1/2[$ et sa dérivée

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= L_2'(x) - \frac{1}{(x-1)^2}L_2'\Big(\frac{x}{x-1}\Big) - \frac{\ln(1-x)}{1-x} \\
&= \frac{-\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-\frac{x}{x-1})}{\frac{x}{x-1}}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{\ln(1-x)}{1-x} \\
&= -\ln(1-x)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\Big) + \frac{\ln\frac{1}{1-x}}{x(x-1)}
\end{aligned}$$

est identiquement nulle sur $]-1,1/2[$. Cette fonction Φ est donc constante sur $[-1,1/2]$ et comme

$$\Phi(0) = L_2(0) + L_2(0) + \frac{\ln^2 1}{2} = 0,$$

elle est identiquement nulle.

11. On intègre par parties sur $[0,A]$:

$$\int_0^A te^{-t}\,dt = [-te^{-t}]_0^A + \int_0^A e^{-t}\,dt = 1 - e^{-A}.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient $\Gamma(2) = 1$ et, par **8.c.**,

$$K_2(1) = \frac{\Gamma(2)L_2(1)}{1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

12. a. On a démontré au **9.b.** que la fonction

$$s \mapsto \frac{-x\ln s}{1-xs}$$

était intégrable sur $]0,1[$. Pour $x \neq 0$, le changement de variable *affine* $t = xs$ permet d'en déduire que la fonction

$$t \mapsto \frac{-\ln t/x}{1-t}$$

est intégrable sur $]x,0[$ (l'énoncé impose ici $x < 0$) et que

$$L_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln t/x}{1-t}\,dt = \int_x^0 \frac{\ln t/x}{1-t}\,dt.$$

❧ L'égalité qui vient d'être établie prouve que

$$L_2(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_x^\varepsilon \frac{\ln t/x}{1-t}\,dt.$$

Intégrons par parties sur le segment $[x,\varepsilon]$:

$$\begin{aligned}
\int_x^\varepsilon \frac{\ln t/x}{1-t}\,dt &= \big[-\ln t/x \,\ln(1-t)\big]_x^\varepsilon + \int_x^\varepsilon \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt \\
&= -\ln(1-\varepsilon)\ln\frac{\varepsilon}{x} + \int_x^\varepsilon \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt.
\end{aligned}$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$$

est continue sur $[x, 0[$ et tend vers -1 au voisinage de 0, donc elle est intégrable sur $[x, 0[$. Par ailleurs, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$-\ln(1-\varepsilon)\ln\frac{\varepsilon}{x} \sim \varepsilon\ln\frac{\varepsilon}{x} \sim \varepsilon\ln|\varepsilon|$$

(puisque $\varepsilon < 0$...). En faisant tendre ε vers 0, on en déduit que

$$L_2(x) = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt.$$

12. b. On reconnaît une expression de la forme uu' :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^0 \ln(1-t)\frac{-1}{1-t}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln^2(1-t)\right]_x^0 = \frac{-\ln^2(1-x)}{2} \end{aligned}$$

pour tout $x < 0$.

12. c. La fonction définie par

$$f(t) = \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}$$

est continue sur $]-\infty, 0[$ et tend vers 1 au voisinage gauche de 0. De plus,

$$f(t) \sim \frac{\ln t}{t^2} = o\Big(\frac{1}{t\sqrt{t}}\Big)$$

au voisinage de $-\infty$, donc f est intégrable sur $]-\infty, 0[$.

Par ailleurs, pour $t < 0$, on a

$$1-t > 1, \quad \ln(1-t) > 0, \quad t < 0, \quad (t-1) < 0$$

donc $f(t) > 0$ et l'intégrale A est donc strictement positive.

Remarque.— On peut démontrer que $A = \pi^2/6$ en effectuant les changements de variables successifs $u = 1-t$ puis $v = 1/u$ pour obtenir

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u(u-1)}\,du = \int_0^1 \frac{-\ln v}{1-v}\,dv = L_2(1).$$

12. d. Pour tout $x < 0$,

$$L_2(x) - g(x) = -\int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}\,dt \xrightarrow[x\to-\infty]{} -A$$

donc

$$L_2(x) = g(x) - A + o(1)$$

au voisinage de $-\infty$.

Au voisinage de $-\infty$, $g(x)$ tend vers $-\infty$ par **12.b.**, donc $L_2(x) \sim g(x)$ et finalement

$$L_2(x) \sim \frac{-\ln^2|x|}{2}.$$