Composition de Mathématiques

Le 4 février 2015 – De 13 heures à 17 heures

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

❖ I – Questions de cours ❖

1. L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique et muni de sa structure euclidienne canonique. Soit P, le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ et $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$.

1. a. Calculer une équation cartésienne de P.

1. b. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur P.

1. c. Calculer la distance de $x_0 = (-1, 1, 2)$ à P.

2. Donner un exemple de matrice $A \in O_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal soit égal à $X^3 - 1$. *On donnera une justification géométrique.*

❖ II – Problème ❖

Toute matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sera identifiée au vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ qu'elle représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$, défini par

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle X | Y \rangle = {}^tXY.$$

L'ensemble des matrices symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite **positive** lorsque

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad {}^tXSX \geqslant 0$$

et on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques positives.

Une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite **définie positive** lorsque

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad {}^tXSX > 0.$$

L'ensemble des matrices symétriques définies positives est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

On dit que deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont **codiagonalisables** lorsqu'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que les deux matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

Partie A. Une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

1. Soient X, Y dans $\mathbb{R}^n$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Établir les égalités suivantes.

1. a. ${}^tXY = {}^tYX$

1. b. $({}^tXY)^2 = {}^tX(Y{}^tY)X = {}^tY(X{}^tX)Y$

1. c. ${}^tXSY = \langle X | SY \rangle = \langle SX | Y \rangle$

2. Démontrer les propriétés suivantes.

2. a. La somme de deux matrices symétriques positives est une matrice symétrique positive.

2. b. La somme d'une matrice symétrique positive et d'une matrice symétrique définie positive est une matrice symétrique définie positive.

2. c. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tAA$ est symétrique positive.

3. a. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad {}^tXSX = 0.$$

Démontrer que toute valeur propre de S est nulle et en déduire que $S = 0$.

3. b. Donner un exemple de matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, non nulle, telle que

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \quad {}^tXMX = 0.$$

4. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

4. a. Démontrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives.

4. b. On suppose que S est semblable à une matrice symétrique positive. Que peut-on en déduire sur S ?

5. On munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de la relation $\leqslant$ définie par

$$S_1 \leqslant S_2 \iff (S_2 - S_1) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

et de la relation $<$ définie par

$$S_1 < S_2 \iff (S_2 - S_1) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

5. a. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

5. b. Vérifier que, pour $n \geqslant 2$, cette relation n'est pas une relation d'ordre total sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

5. c. La relation $<$ est-elle une relation d'ordre ?

5. d. Trouver deux matrices S_1 et S_2 de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leqslant S_2$ et $S_1 \neq S_2$ sans que $S_1 < S_2$.

6. Soient u et v, deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ diagonalisables et tels que

$$u \circ v = v \circ u.$$

6. a. Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

6. b. Soient

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p,$$

les valeurs propres de u et

$$E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_p},$$

les sous-espaces propres de u qui leur sont respectivement associés. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, on note v_k, l'endomorphisme de E_{λ_k} induit par restriction de v.

Démontrer que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, il existe une base $\mathscr{B}_k$ de E_{λ_k} formée de vecteurs propres de v. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que les matrices de u et de v dans cette base soient toutes deux diagonales.

7. a. Soient A et B, deux matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que A et B sont codiagonalisables si, et seulement si, $AB = BA$.

7. b. On considère les deux matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A et B sont codiagonalisables. Expliciter une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

8. Soient S_1 et S_2, deux matrices symétriques positives telles que $S_1S_2 = S_2S_1$. Démontrer que S_1S_2 est une matrice symétrique positive.

9. a. Soient S_1 et S_2, deux matrices symétriques telles que $S_1S_2 = S_2S_1$. On suppose que

$$0 \leqslant S_1 \leqslant S_2.$$

Démontrer que

$$S_1^2 \leqslant S_2^2.$$

9. b. On considère les deux matrices symétriques suivantes.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $0 \leqslant S_1 \leqslant S_2$. L'inégalité $S_2^2 \geqslant S_1^2$ est-elle vraie ?

Partie B. Factorisation d'une matrice symétrique définie positive

10. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes.

10. a. La matrice S est définie positive.

10. b. Toutes les valeurs propres de S sont strictement positives.

10. c. La matrice S est positive et inversible.

10. d. Il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tMM$.

11. On considère les matrices symétriques A_n et B_n définies par

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et par

$$A_n = 2I_n - B_n.$$

11. a. Démontrer que

$${}^tXA_nX = x_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1})^2 + x_n^2$$

pour tout $X = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.

11. b. En déduire que $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

11. c. Expliciter une matrice inversible de la forme

$$M_n = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

telle que $A_n = {}^tM_nM_n$.

12. Soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$S = {}^tMM.$$

On note $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_n)$, la famille des colonnes de M et, pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, on note p_k, la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel

$$\text{Vect}(U_1, U_2, \dots, U_k).$$

12. a. Démontrer que $\mathcal{U}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

12. b. On définit la famille $\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_n)$ en posant $V_1 = U_1$ et

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, \quad V_k = U_k - p_{k-1}(U_k).$$

Démontrer que $\mathcal{V}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

12. c. La famille

$$\mathcal{W} = (W_1, \dots, W_n)$$

définie par

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad W_k = \frac{1}{\|V_k\|} V_k$$

est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathcal{U}$ est triangulaire supérieure.

12. d. Soit P, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{W}$. Démontrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure inversible T telle que

$$M = PT$$

et que $S = {}^tTT$.

12. e. Démontrer que la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

admet une décomposition de la forme $S = {}^tTT$ où T est une matrice triangulaire supérieure inversible. En déduire que la matrice symétrique S est définie positive.

Source : CCP 2003 PC 1 (partiel)

Solution I — Questions de cours

1. a. Le vecteur $n = u \wedge v = (-1, 1, 1)$ est normal à P, donc
$$P = [-x + y + z = 0].$$

1. b. La projection orthogonale sur $P^{\perp} = \mathbb{R} \cdot n$ est définie par
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad q(x) = \frac{(\,n\,|\,x\,)}{\|n\|^2} \cdot n$$
donc la projection orthogonale sur P est définie par
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad p(x) = x - q(x) = x - \frac{(\,n\,|\,x\,)}{\|n\|^2} \cdot n.$$
La base canonique étant orthonormée, ce qui précède se traduit matriciellement par
$$\forall\, X \in \mathbb{R}^3, \quad PX = X - \frac{{}^tNX}{{}^tNN} \cdot N = \Big(I_3 - \frac{N\,{}^tN}{{}^tNN}\Big)X$$
où ${}^tN = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice cherchée est donc
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. c. La distance de $x_0 = (-1, 1, 2)$ à P est la norme du vecteur d'origine x_0 et d'extrémité $p(x_0) = \frac{1}{3}(1, -1, 2)$, c'est-à-dire
$$\frac{1}{3}\sqrt{(1+3)^2 + (-1-3)^2 + (2-6)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

2. Si r est la rotation d'angle $\theta = 2\pi/3$ autour de la droite dirigée et orientée par $n = (1, 0, 0)$, alors r^3 est la rotation d'angle 3θ autour de cette droite, donc $r^3 = I_E$. Donc le polynôme minimal de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$$
est un diviseur de $(X^3 - 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)$.

On voit sur la première colonne de cette matrice que 1 est valeur propre, donc son polynôme minimal est divisible par $(X - 1)$.

Si le polynôme minimal de A était un diviseur strict de $(X^3 - 1)$, alors il serait égal à $(X - 1)$ et il faudrait alors que $A = I_3$, ce qui est évidemment faux.

Donc le polynôme minimal de A est bien $(X^3 - 1)$.

Solution II — Caractérisations des matrices définies positives

Partie A. Une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

1. a. Le produit ${}^tXY$ est une matrice carrée de taille 1. Elle est donc égale à sa transposée, qui est ${}^tYX$.

1. b. D'après **1.a.** et l'associativité du produit matriciel,
$$({}^tXY)^2 = ({}^tXY)({}^tYX) = {}^tX(Y\,{}^tY)X$$
et de la même manière
$$({}^tXY)^2 = ({}^tYX)({}^tXY) = {}^tY(X\,{}^tX)Y.$$

1. c. Par définition du produit scalaire,
$${}^tXSY = {}^tX(SY) = \langle\, X \,|\, SY \,\rangle.$$
Le produit matriciel ${}^tXSY$ est une matrice carrée de taille 1, elle est donc égale à sa transposée et comme la matrice S est symétrique :
$${}^tXSY = {}^tY\,{}^tSX = {}^tYSX = \langle\, Y \,|\, SX \,\rangle$$
donc ${}^tXSY = \langle\, SX \,|\, Y \,\rangle$ par symétrie du produit scalaire.

2. On sait tout d'abord que la somme de deux matrices symétriques est encore une matrice symétrique.

2. a. Soient S_1 et S_2, deux matrices symétriques positives. Alors
$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \quad {}^tX(S_1 + S_2)X = \underbrace{{}^tXS_1X}_{\geqslant 0} + \underbrace{{}^tXS_2X}_{\geqslant 0} \geqslant 0,$$
donc la matrice symétrique $(S_1 + S_2)$ est positive.

2. b. Si $S_1 \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ et $S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors
$${}^tX(S_1 + S_2)X = \underbrace{{}^tXS_1X}_{\geqslant 0} + \underbrace{{}^tXS_2X}_{> 0} > 0$$
pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, donc la matrice symétrique $(S_1 + S_2)$ est définie positive.

2. c. La matrice ${}^tAA$ est carrée, de taille n et symétrique car :
$${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA.$$
D'autre part,
$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \quad {}^tX({}^tAA)X = \langle\, AX \,|\, AX \,\rangle = \|AX\|^2 \geqslant 0,$$
donc ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

3. a. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ de S. Alors
$$0 = {}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\|X\|^2$$
et comme $X \neq 0$, alors $\|X\| > 0$. Ainsi, toute valeur propre de S est nulle.

☙ La matrice S, comme toute matrice symétrique réelle, est diagonalisable. Comme sa seule valeur propre est 0, la matrice S est semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle.

3. b. Pour $X = (x, y, z)$ et
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
on vérifie que
$${}^tXMX = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = 0.$$
Plus généralement, toute matrice antisymétrique convient (et on peut vérifier que seules les matrices antisymétriques conviennent).

4. a. On suppose que S est positive et on s'inspire du **3.a.** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de S et $X \in \mathbb{R}^n$, un vecteur propre associé à λ. Alors

$$0 \leqslant {}^tXSX = \lambda\|X\|^2.$$

Comme $X \neq 0$, alors $\|X\| > 0$, donc $\lambda \geqslant 0$.

❧ Réciproquement, supposons que toutes les valeurs propres de S sont positives. Comme S est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable et par conséquent, tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ peut se décomposer en une somme de la forme

$$X = X_1 + \cdots + X_p$$

avec $SX_k = \lambda_k X_k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$ et $\langle X_i \,|\, X_j \rangle = 0$ quels que soient $i \neq j$. Alors

$${}^tXSX = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k {}^tX_k X_k = \sum_{k=1}^{p} \underbrace{\lambda_k}_{\geqslant 0} \underbrace{\|X_k\|^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0,$$

donc la matrice symétrique S est positive.

Finalement, une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive si, et seulement si, ses valeurs propres sont toutes positives.

4. b. Deux matrices semblables ont même spectre. Si S est semblable à une matrice positive, alors toutes les valeurs propres de S sont positives et par conséquent, S est positive.

5. a. La matrice nulle appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc $\leqslant$ est une relation réflexive.

Si $(S_2 - S_1)$ et $(S_1 - S_2)$ sont deux matrices positives, alors leurs valeurs propres sont positives, alors qu'elles sont deux à deux opposées. Par conséquent, $S_2 - S_1 = 0$ et la relation $\leqslant$ est antisymétrique.

Enfin, d'après **2.a.**, la somme de deux matrices symétriques positives est une matrice symétrique positive, donc la relation $\leqslant$ est transitive.

La relation $\leqslant$ est donc une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

5. b. La matrice symétrique

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

n'est pas supérieure à 0 (car elle n'est pas positive), ni inférieure à 0 (car $-S$ n'est pas non plus positive). La relation $\leqslant$ n'est donc pas une relation d'ordre total.

Remarque. *Si $n = 1$, on peut identifier $\mathbb{R}$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et la relation $\leqslant$ n'est autre que la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$.*

---

5. c. Comme la matrice nulle n'est pas définie positive, la relation $<$ n'est pas réflexive : ce n'est donc pas une relation d'ordre.

En revanche, la relation $<$ est antisymétrique et transitive.

5. d. Prenons $S_1 = 0$ et

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $S_1 \neq S_2$. D'autre part, $S_1 \leqslant S_2$ puisque les valeurs propres de $S_2 = S_2 - S_1$ sont positives, mais S_2 n'est pas définie positive puisque

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} S_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

donc la propriété $S_1 < S_2$ est fausse.

6. a. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de u et E_λ, le sous-espace propre de u associé à λ. Pour tout $x \in E_\lambda$,

$$u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) = v(\lambda x) = \lambda v(x),$$

donc $v(x) \in E_\lambda$.

Ainsi, tout sous-espace propre de u est stable par v.

6. b. Comme v est diagonalisable et que E_{λ_k} est stable par v, alors l'endomorphisme v_k induit par restriction de v à E_{λ_k} est bien défini et lui aussi diagonalisable. Il existe donc une base $\mathscr{B}_k$ de E_{λ_k} formée de vecteurs propres de v_k, qui sont aussi des vecteurs propres de v.

Comme u est diagonalisable, alors

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$$

et par conséquent, la famille

$$\mathscr{B} = \bigcup_{k=1}^{p} \mathscr{B}_k$$

est une base de E. Les vecteurs de $\mathscr{B}$ sont des vecteurs propres de u (puisqu'ils appartiennent aux sous-espaces propres E_{λ_k}) aussi bien que des vecteurs propres de v (puisque les vecteurs qui forment les familles $\mathscr{B}_k$ sont des vecteurs propres de v). Par conséquent, les matrices de u et de v relatives à cette base $\mathscr{B}$ sont toutes les deux diagonales.

7. a. Soient u et v, les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ représentés par les matrices A et B dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.

❧ D'après **6.**, si $AB = BA$, alors u et v commutent et il existe une matrice inversible

$$P = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B})$$

telle que les matrices

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = P^{-1}BP$$

soient diagonales. Dans ce cas, les matrices A et B sont codiagonalisables.

❧ Réciproquement, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que les deux matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales, alors ces matrices commutent et

$$\begin{aligned} P^{-1}(AB - BA)P &= (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) - (P^{-1}BP)(P^{-1}AP) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc A et B commutent.

7. b. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Son polynôme caractéristique est égal à $X^2(3 - X)$. Le noyau de A est représenté par l'équation cartésienne

$$x + y - z = 0$$

et le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(A - 3I_3)$ est dirigé par le vecteur

$$(1, 1, -1).$$

❧ Le polynôme caractéristique de la matrice B est égal à $(X-4)^2(X-1)$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est le plan représenté par l'équation cartésienne
$$2x - y + z = 0.$$
Le sous-espace propre de B associé à la valeur propre 1 est dirigé par le vecteur
$$(1, 1, 2).$$
Donc B est diagonalisable.
❧ Les matrices A et B commutent : $AB = BA = 4A$, elles sont donc codiagonalisables.
❧ Comme A et B commutent, la droite propre de A associée à la valeur propre 3 est stable par B et la droite propre de B associée à la valeur propre 1 est stable par A. Par conséquent, les vecteurs $(1, 1, -1)$ et $(1, 1, 2)$ sont des vecteurs propres communs à A et B.

Enfin, il existe un vecteur qui est à la fois un vecteur propre de A pour la valeur propre 0 et un vecteur propre de B pour la valeur propre 4 : on le trouve en résolvant le système
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$
Le vecteur $(0, 1, 1)$ convient.
❧ On forme la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
qui est évidemment inversible (sa première colonne est un vecteur propre de A associé à 3 et ses deux dernières colonnes, qui ne sont pas proportionnelles, sont des vecteurs propres de A associés à 0)et il est clair d'après ce qui précède que
$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(3, 0, 0) \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \mathrm{Diag}(4, 1, 4).$$

8. Le produit S_1S_2 est une matrice symétrique car
$${}^t(S_1S_2) = {}^tS_2{}^tS_1 = S_2S_1 = S_1S_2.$$
Les matrices S_1 et S_2 sont symétriques réelles, donc diagonalisables. Comme elles commutent, par **7.a.**, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}S_1P$ et $P^{-1}S_2P$ sont diagonales et leurs coefficients diagonaux sont positifs par **4.a.** Il est alors clair que
$$P^{-1}(S_1S_2)P = (P^{-1}S_1P)(P^{-1}S_2P)$$
est diagonale et que ses coefficients diagonaux sont positifs (en tant que produits de réels positifs). Par conséquent, la matrice symétrique S_1S_2 est positive.

9. a. Comme S_1 et S_2 sont symétriques et commutent, alors (S_2+S_1) et (S_2-S_1) sont symétriques et commutent. La somme (S_2+S_1) est positive par **2.a.** La différence (S_2-S_1) est positive par hypothèse. Par **8.**, leur produit
$$(S_2+S_1)(S_2-S_1) = S_2^2 - S_1^2$$
est une matrice symétrique et positive.

9. b. Les valeurs propres de $S_1 = S_1 - 0$ sont 0 et 2, donc $0 \leqslant S_1$ par **4.a.**

Les valeurs propres de
$$S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
sont 0 et 5/2, donc $S_1 \leqslant S_2$ par **4.a.**

En revanche, le déterminant de
$$S_2^2 - S_1^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$
est strictement négatif, donc ses valeurs propres ne sont pas toutes positives. Donc la propriété $S_1^2 \leqslant S_2^2$ est fausse.

Partie B. Factorisation d'une matrice symétrique définie positive

10. On suppose que S est définie positive et on reprend la méthode du **4.a.**

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de S et $X \in \mathbb{R}^n$, un vecteur propre associé à λ, alors $X \neq 0$, donc
$$0 < {}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\|X\|^2,$$
donc $\lambda > 0$. Donc **a** $\Longrightarrow$ **b**.
❧ Si toutes les valeurs propres de S sont strictement positives, alors elles sont toutes positives et S est positive d'après **4.a.**. D'autre part, 0 n'est pas valeur propre de S, donc S est inversible. Donc **b** $\Longrightarrow$ **c**.
❧ Si la matrice symétrique S est positive et inversible, on peut raisonner comme au **4.a.** On suppose que les valeurs propres de S sont strictement positives, rangeons-les par ordre croissant :
$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p.$$
Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, il existe une décomposition
$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$$
où les vecteurs $X_1, \ldots, X_p$ vérifient
$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad SX_k = \lambda_k X_k$$
et
$$\forall\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant p, \quad \langle X_i \,|\, X_j \rangle = 0,$$
de telle sorte que
$${}^tXSX = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \|X_k\|^2 \geqslant \lambda_1 \sum_{k=1}^{p} \|X_k\|^2 = \lambda_1 \|X\|^2.$$
En conséquence, ${}^tXSX > 0$ pour tout vecteur $X \neq 0$ et S est définie positive. Ainsi **c** $\Longrightarrow$ **a**.
❧ On a donc démontré l'équivalence de **a**, **b** et **c**.
❧ La matrice $S = {}^tMM$ est symétrique et positive d'après **2.c.** Elle est inversible comme produit de deux matrices inversibles. Donc **d** $\Longrightarrow$ **c**.
❧ Réciproquement, d'après **b**, il existe une une matrice diagonale $\Delta = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que
$$S = {}^tP\Delta P \quad \text{et} \quad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \lambda_k > 0.$$

Avec $\Delta_r = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ et $M = {}^t P\Delta_r P$, on obtient ${}^t MM = S$ et la matrice M, produit de matrices inversibles, est bien inversible. Ainsi **b** $\Longrightarrow$ **d**.

❧ L'équivalence des quatres propriétés est établie.

11. a. Il suffit de remarquer que

$$x_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1})^2 + x_n^2 = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}.$$

11. b. D'après **11.a.**, l'expression ${}^t XA_n X$ est positive pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ (on l'a écrite comme une somme de carrés), donc la matrice symétrique A_n est positive.

❧ Si ${}^t XA_n X = 0$, alors une somme de carrés est nulle, donc tous les termes sont nuls et donc

$$x_1 = x_n = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, 1 \leqslant k < n, \quad x_k = x_{k+1}.$$

On en déduit que $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n = 0$ et donc que $X = 0$. Par conséquent, la matrice A_n est définie positive.

11. c. Avec une matrice M_n de la forme donnée par l'énoncé, l'équation $A_n = {}^t M_n M_n$ se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} & u_1^2 = 2 \\ \forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, & u_k^2 + v_{k-1}^2 = 2 \\ \forall\, 1 \leqslant k < n, & u_k v_k = -1 \end{cases}$$

qu'on résout sous la forme

$$\begin{cases} & u_1^2 = 2 \\ \forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, & u_k^2 = 2 - {}^1\!/_{u_{k-1}^2} \\ \forall\, 1 \leqslant k < n, & v_k = {}^{-1}\!/_{u_k}. \end{cases}$$

On peut alors en déduire que

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{1}{u_k^2 - 1} = 1 + \frac{1}{u_{k-1}^2 - 1},$$

donc que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{1}{u_k^2 - 1} = k$$

et finalement que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad u_k = \sqrt{\frac{k+1}{k}}$$

convient.

12. a. Rappelons qu'on identifie les matrices colonnes aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Comme la matrice M est inversible, ses n colonnes sont linéairement indépendantes et forment donc une base de $\mathbb{R}^n$.

12. b. Comme la famille $(U_1, \ldots, U_{k-1}, U_k)$ est une famille libre, le vecteur U_k n'appartient pas au sous-espace $\mathrm{Vect}(U_1, \ldots, U_{k-1})$ et par conséquent $U_k \neq p_{k-1}(U_k)$, donc

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, \quad V_k \neq 0.$$

Comme $U_1 \neq 0$, alors $V_1 \neq 0$ également.

❧ Soient $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Comme p_{j-1} est une projection orthogonale, les vecteurs

$$p_{j-1}(V_i) \in \mathrm{Im}\, p_{j-1} \quad \text{et} \quad V_j = (I_E - p_{j-1})(U_j) \in \mathrm{Ker}\, p_{j-1}$$

sont orthogonaux. Or, par définition, le vecteur V_i appartient au sous-espace engendré par U_1, …, U_i. Comme $j > i$, alors $j - 1 \geqslant i$ et donc

$$V_i = p_{j-1}(V_i).$$

Donc $V_i \perp V_j$.

❧ La famille $\mathcal{V}$ est une famille orthogonale de n vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$, c'est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Remarque. *On aura reconnu l'algorithme de Gram–Schmidt.*

---

12. c. La matrice de passage de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{V}$ est triangulaire supérieure, puisque

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad V_k \in \mathrm{Vect}(U_1, \ldots, U_k)$$

par construction. La matrice de passage de la base orthogonale $\mathcal{V}$ à la base orthonormée $\mathcal{W}$ est diagonale. Par conséquent, la matrice de passage de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{W}$ est triangulaire supérieure et la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathcal{U}$ est triangulaire supérieure (en tant qu'inverse d'une matrice triangulaire supérieure).

12. d. La matrice M peut être vue comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{U}$. En notant T, la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathcal{U}$, on a alors $M = PT$ et T est triangulaire supérieure d'après la question précédente.

Remarque. *On peut se rappeler que*

$$\mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathcal{U}) = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathcal{W}) \times \mathfrak{Mat}(\mathcal{W} \to \mathcal{U})$$

par la formule

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{U},\mathscr{B}_0}(I) = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{W},\mathscr{B}_0}(I) \times \mathfrak{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(I),$$

compliquée certes, mais finalement simple à mémoriser puisqu'elle traduit seulement $I = I \circ I$.

❧ Comme la base canonique et la base $\mathcal{W}$ sont des bases orthonormées (pour le produit scalaire canonique), la matrice de passage P est une matrice orthogonale. On en déduit que

$$S = {}^t MM = ({}^t T\, {}^t P)(PT) = {}^t T({}^t PP)T = {}^t TT.$$

12. e. Un calcul des plus bourrins montre que la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

convient. On déduit alors de **10.d.** que la matrice symétrique S est définie positive.