Composition de Mathématiques

Le 1er avril 2015 – De 13 heures à 17 heures

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

❖ Problème ❖

Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère deux applications continues

$$A : I \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B : I \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que la continuité des fonctions A et B signifie que les coefficients des matrices $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions continues sur I.

On considère ici l'équation différentielle :

$$\forall\, t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \tag{E}$$

et l'équation homogène associée à (E) :

$$\forall\, t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) \tag{E_0}$$

où l'inconnue X est une fonction dérivable sur I à valeurs dans l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes.

On notera S_0, l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0). On appelle **système fondamental** de solutions de (E_0) toute base $(X_1, \dots, X_n)$ de S_0. La **matrice wronskienne** d'un système fondamental $(X_1, \dots, X_n)$ de solutions de (E_0) est la matrice $W(t)$ dont les colonnes sont les valeurs

$$X_1(t), \dots, X_n(t)$$

à l'instant t des éléments de ce système fondamental.

1. Questions de cours. On donnera des réponses précises, mais sans les justifier.

1. a. Quelle est la structure algébrique de S_0 ?

1. b. Comment décrire les solutions de (E) à l'aide des éléments de S_0 ?

1. c. Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à (E).

2. Soit X, une solution de (E) sur I. Démontrer que X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (au sens où les coefficients $X_i(t)$ de $X(t)$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de t).

Partie A. Cas d'une matrice constante

On suppose dans cette partie que $I = \mathbb{R}$ et que A est une application constante, ce qu'on notera (abusivement)

$$\forall\, t \in I, \quad A(t) = A.$$

3. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, un vecteur non nul. Démontrer que la fonction définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = e^{\lambda t}V$$

est une solution de (E_0) si, et seulement si, V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

4. On suppose ici que $n = 4$ et on considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \\ -te^t \end{pmatrix}.$$

4. a. Avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. En déduire un système fondamental de solutions de (E_0), puis l'expression générale des solutions complexes de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

4. b. Avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on cherche les solutions de (E) sous la forme

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}.$$

Écrire le système d'équations vérifié par les fonctions $x_k(t)$.

En déduire successivement $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_1(t)$ et $x_4(t)$ (dans cet ordre), puis l'expression générale des solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}$.

Préciser la solution X de (E) telle que

$$X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Partie B. Matrice résolvante

On revient au cas général où A est une fonction continue de $t \in I \subset \mathbb{R}$.

Pour tout $t_0 \in I$, on considère l'application

$$\Phi_{t_0} : S_0 \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

définie par

$$\forall\, X \in S_0, \quad \Phi_{t_0}(X) = X(t_0).$$

On *rappelle* (théorie de Cauchy-Lipschitz) que Φ_{t_0} est un isomorphisme de S_0 sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

5. Soient $t_0 \in I$, $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X \in S_0$, la solution de (E_0) telle que

$$X(t_0) = V.$$

Démontrer que

$$\forall\, t \in I, \quad (\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1})(V) = X(t).$$

6. Soit $t_0 \in I$.

6. a. On choisit un système fondamental

$$\mathscr{B} = (X_1, \dots, X_n)$$

de solutions de (E_0) et on munit $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de sa base canonique $\mathscr{C} = (E_1, \dots, E_n)$.

Relier l'isomorphisme Φ_{t_0} à la matrice wronskienne
$$W(t_0) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}\big(X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)\big).$$

6. b. Pour tout $t \in I$, on pose
$$R(t, t_0) = W(t)[W(t_0)]^{-1}.$$
Démontrer que la matrice $R(t, t_0)$, dite **matrice résolvante de** (E_0), ne dépend pas du système fondamental choisi.

7. Soient t, t_0, t_1 et t_2 dans I.

7. a. On note $R'(t, t_0)$, la dérivée de $R(t, t_0)$ par rapport à t.

Vérifier que $R'(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$.

En déduire que, pour tout $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la matrice
$$X(t) = R(t, t_0)V$$
est la solution de (E_0) telle que $X(t_0) = V$.

7. b. Démontrer que
$$R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0).$$
En déduire que
$$[R(t, t_0)]^{-1} = R(t_0, t).$$

8. Soit $t_0 \in I$. On cherche une solution particulière de (E) en procédant par analyse et synthèse.

8. a. On suppose qu'il existe une solution particulière X de la forme
$$\forall\, t \in I, \quad X(t) = R(t, t_0)V(t)$$
où $V : I \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une application dérivable.

Démontrer que
$$\forall\, t \in I, \quad R(t, t_0)V'(t) = B(t).$$
En déduire que
$$\forall\, t \in I, \quad V(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t_0, u)B(u)\, du.$$

8. b. Démontrer que
$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} R(t, u)B(u)\, du$$
est une solution particulière de (E).

Partie C. Une application de la résolvante

Dans toute cette partie, on considère des fonctions à valeurs réelles ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

9. On considère ici l'équation différentielle
$$t(t-1)y''(t) + 3y'(t) - 6y(t) = 0 \qquad (e_0)$$
où l'inconnue y est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I.

9. a. Déterminer les fonctions polynomiales qui vérifient l'équation (e_0) sur $\mathbb{R}$.

☞ *On commencera par déterminer avec soin le degré de ces polynômes.*

Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme P qui vérifie (e_0) et la condition $P(0) = 1$. (On explicitera ce polynôme.)

9. b. Démontrer que la fonction Q définie par
$$\forall\, t \in]-1, 1[, \quad Q(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$$
est une solution de (e_0) sur $]-1, 1[$.

9. c. On cherche les solutions de (e_0) qui sont développables en série entière :
$$\forall\, t \in]-R, R[, \quad y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$$
où $R > 0$.

Déterminer une relation de récurrence entre a_k et a_{k+1}.

Déterminer les solutions de (e_0) qui sont développables en série entière au voisinage de l'origine à l'aide de P et Q.

9. d. Déterminer l'ensemble des solutions de (e_0) sur $]-1, 1[$. La théorie de Cauchy-Lipschitz peut-elle s'appliquer sur cet intervalle ? Qu'observe-t-on ?

10. On considère maintenant l'équation différentielle
$$t(t-1)y''(t) + 3y'(t) - 6y(t) = 20t^4 \qquad (e)$$
sur l'intervalle $I =]0, 1[$.

10. a. Expliciter les matrices $A(t)$ et $B(t)$ qui permettent d'écrire l'équation différentielle (e) sous la forme (E).

10. b. Soit (f, g), une base de l'espace des solutions sur I de l'équation homogène (e_0). Les fonctions
$$\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$$
forment alors un système fondamental de solutions sur I de (E_0) et la matrice wronskienne qui lui est associée est
$$W(t) = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix}.$$
Expliciter les coefficients de $[W(t_0)]^{-1}$ et de la résolvante $R(t, t_0)$.

☞ *On se simplifiera la tâche en notant* f, g, f' *et* g' *au lieu de* $f(t)$, $g(t)$, $f'(t)$ *et* $g'(t)$, *ainsi que* f_0, g_0, f'_0 *et* g'_0 *au lieu de* $f(t_0)$, $g(t_0)$, $f'(t_0)$ *et* $g'(t_0)$.

10. c. On applique les résultats précédents aux fonctions $f = P$ et $g = Q$ (où P et Q ont été définies respectivement au **9.a.** et au **9.b.**).

Expliciter le déterminant de $W(u)$ et la valeur de
$$Q(t)P(u) - P(t)Q(u)$$
pour $0 < t, u < 1$.

10. d. Déduire de ce qui précède qu'une solution particulière de (e) sur $]0, 1[$ est donnée par
$$y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \int_{t_0}^{t} (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4)\, du.$$
En déduire l'expression d'une solution particulière *simple* de (e) sur $]0, 1[$.

Source : CCP 2012 PSI

Solution ❁ Équations différentielles matricielles

1. a. L'ensemble S_0 des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension n.
1. b. Si la fonction X_0 est une solution particulière de (E), alors une fonction X est solution de (E) si, et seulement si, il existe une solution $Y \in S_0$ de l'équation homogène telle que $X = X_0 + Y$.
1. c. Pour toute condition initiale $(t_0, V) \in I \times \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une, et une seule, solution X de (E) sur I telle que $X(t_0) = V$.
2. Par hypothèse, les composantes X_i sont toutes dérivables sur I. D'après (E),

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \quad X_i'(t) = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(t)X_k(t) + B_i(t)$$

et comme les composantes $A_{i,k}$ et B_i sont toutes continues par hypothèse, on en déduit que les X_i' sont continues sur I et donc que X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Partie A. Cas d'une matrice constante

3. La fonction X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = \lambda e^{\lambda t} V.$$

❧ Si X est une solution de (E_0), alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \lambda e^{\lambda t} V = A(e^{\lambda t} V) = e^{\lambda t} AV.$$

Or $e^{\lambda t} \neq 0$ et $V \neq 0$, donc V est un vecteur propre de A associé à λ.
❧ Réciproquement, si V est un vecteur propre de A associé à λ, alors

$$X'(t) = e^{\lambda t}(\lambda V) = e^{\lambda t}(AV) = A(e^{\lambda t} V) = AX(t)$$

donc X est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.
4. a. Calculons le polynôme caractéristique : avec $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, on obtient

$$\det(A - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

et en développant par la première ligne (*sans développer !*)

$$\det(A - \lambda I_4) = (2-\lambda)(1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1 - \lambda)$$

donc le polynôme caractéristique de A est égal à

$$(X-2)(X-1)(X-i)(X+i) = (X-2)(X-1)(X^2+1).$$

En tant que matrice *complexe*, la matrice A admet 4 valeurs propres distinctes : elle est donc diagonalisable et ses quatre sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

En écrivant la matrice $A - \lambda I_4$ pour $\lambda = 1, 2$ et $\pm i$, on constate que les sous-espaces propres de A associés à 1, 2, i et $-i$ sont respectivement dirigés par

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \; V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

(Il est utile de remarquer que $V_4 = \overline{V_3}$ puisque A est en fait une matrice à coefficients *réels*.)
❧ Par **3.**, les fonctions définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$X_1(t) = e^t V_1, \qquad X_2(t) = e^{2t} V_2,$$
$$X_3(t) = e^{it} V_3, \qquad X_4(t) = e^{-it} V_4$$

sont des vecteurs de S_0. Comme (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{C})$, ces fonctions sont linéairement indépendantes et comme $\dim S_0 = 4$ (**1.a.**), elles constituent une base de S_0, c'est-à-dire un système fondamental de solutions de (E_0).

Autrement dit, une fonction $X : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ est une solution *complexe* de (E_0) si, et seulement si, il existe quatre complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ tels que

$$\forall\, t \in I, \quad X(t) = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k X_k(t).$$

4. b. L'équation (E_0) se traduit naturellement par le système suivant.

$$\begin{cases} x_1' = \quad - x_2 + x_3 - x_4 + te^t \\ x_2' = \quad 2x_2 \quad + e^t \\ x_3' = \quad x_2 + x_3 \\ x_4' = x_1 - x_2 + x_3 \quad - te^t \end{cases}$$

La seconde équation est une équation du premier ordre en x_2 : sa solution générale est

$$x_2(t) = K_2 e^{2t} - e^t.$$

Cela résolu, la troisième équation devient une équation du premier ordre en x_3 :

$$x_3' - x_3 = K_2 e^{2t} - e^t$$

dont la solution générale est

$$x_3(t) = K_1 e^t + K_2 e^{2t} - te^t.$$

Les deux autres équations ne peuvent être découplées (puisque A n'est pas diagonalisable en tant que matrice *réelle*). On remarque alors que x_4 peut se déduire de x_1 (par la première équation) et que x_1 apparaît ainsi comme une solution d'une équation du second ordre :

$$x_1'' + x_1 = 2te^t$$

dont la solution générale est

$$x_1(t) = K_3 \cos t + K_4 \sin t + (t-1)e^t$$

ce qui nous donne enfin

$$\begin{aligned} x_4(t) &= -x_1'(t) + K_1 e^t + e^t \\ &= K_3 \sin t - K_4 \cos t + K_1 e^t + (1-t)e^t. \end{aligned}$$

La solution générale *réelle* de (E) est donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} K_3 \cos t + K_4 \sin t + (t-1)e^t \\ K_2 e^{2t} - e^t \\ K_2 e^{2t} + K_1 e^t - te^t \\ K_3 \sin t - K_4 \cos t + K_1 e^t + (1-t)e^t \end{pmatrix}$$

où $K_1, \dots, K_4$ sont des réels. On comprend plus clairement cette solution en la présentant comme la somme d'une solution de l'équation homogène

$$K_1 e^t V_1 + K_2 e^{2t} V_2 + K_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix} + K_4 \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

et d'une solution particulière de l'équation complète

$$\begin{pmatrix} (t-1)e^t \\ -e^t \\ -te^t \\ (1-t)e^t \end{pmatrix}.$$

❧ La condition initiale donnée permet de trouver facilement les constantes d'intégration :

$$K_1 = -1, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_4 = 0$$

donc

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Partie B. Matrice résolvante

5. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que, pour toute condition initiale $(t_0, V) \in I \times \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une, et une seule, fonction $X \in S_0$ telle que $X(t_0) = V$: c'est ce qui prouve que Φ_{t_0} est un isomorphisme de S_0 sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Par définition de X, la solution $\Phi_{t_0}^{-1}(V)$ est égale à X et par définition de Φ_{t_0}, la matrice colonne $\Phi_t(X)$ est égale à $X(t)$, donc

$$\forall\, t \in I, \quad (\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1})(V) = X(t).$$

6. a. Par construction, Φ_{t_0} est une application linéaire de S_0, muni de la base $\mathscr{B}$, dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, muni de la base $\mathscr{C}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\Phi_{t_0}) &= \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}\big(\Phi_{t_0}(X_1), \dots, \Phi_{t_0}(X_n)\big) \\ &= \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}\big(X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)\big) \\ &= W(t_0). \end{aligned}$$

6. b. Par **6.a.**,

$$\begin{aligned} R(t, t_0) &= W(t)\big[W(t_0)\big]^{-1} \\ &= \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\Phi_t) \times \big[\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\Phi_{t_0})\big]^{-1} \\ &= \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\Phi_t) \times \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\Phi_{t_0}^{-1}) \\ &= \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}) \end{aligned}$$

ce qui prouve que la matrice $R(t, t_0)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$ dans S_0.

7. a. Les colonnes de la matrice $W(t)$, c'est-à-dire $X_1(t)$, …, $X_n(t)$, sont par hypothèse des fonctions $\mathscr{C}^1$ de t en tant que solutions d'une équation différentielle du premier ordre. Par conséquent, $[t \mapsto W(t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ ainsi que $[t \mapsto R(t, t_0)]$ (produit d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par une fonction constante) et

$$\begin{aligned} R'(t, t_0) &= W'(t)\big[W(t_0)\big]^{-1} \\ &= \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}\big(X_1'(t), \dots, X_n'(t)\big)\big[W(t_0)\big]^{-1} \\ &= \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}\big(A(t)X_1(t), \dots, A(t)X_n(t)\big)\big[W(t_0)\big]^{-1} \\ &= A(t)W(t)\big[W(t_0)\big]^{-1} \\ &= A(t)R(t, t_0) \end{aligned}$$

puisque

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(x_1), \dots, f(x_n)\big) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

pour tout endomorphisme f d'un espace V de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}$ et pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E (qu'il s'agisse ou non d'une base).

❧ En tant que produit d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par une fonction constante, la fonction définie par

$$X = [t \mapsto R(t, t_0)V]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et d'après les calculs précédents,

$$\forall\, t \in I, \quad X'(t) = A(t)R(t, t_0)V = A(t)X(t).$$

En outre,

$$\forall\, s \in I, \quad R(s, s) = W(s)\big[W(s)\big]^{-1} = I_n$$

donc

$$X(t_0) = R(t_0, t_0)V = V,$$

donc cette fonction X est bien la solution de (E_0) telle que $X(t_0) = V$.

REMARQUE.— C'est bien sûr cette propriété qui explique le terme de **résolvante** utilisé pour désigner $R(t, t_0)$.

7. b. On revient à la définition de la résolvante.

$$\begin{aligned} R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) &= W(t_2)W(t_1)^{-1}W(t_1)W(t_0)^{-1} \\ &= W(t_2)W(t_0)^{-1} = R(t_2, t_0) \end{aligned}$$

❧ En particulier,

$$\begin{aligned} R(t_0, t_1)R(t_1, t_0) &= R(t_0, t_0) = I_n \\ R(t_1, t_0)R(t_0, t_1) &= R(t_1, t_1) = I_n \end{aligned}$$

donc les matrices $R(t_0, t_1)$ et $R(t_1, t_0)$ sont inverses l'une de l'autre.

8. a. La fonction X est dérivable sur I en tant que produit d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ (**7.a.**) et de la fonction dérivable V. D'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} X'(t) &= R'(t, t_0)V(t) + R(t, t_0)V'(t) \\ &= A(t)X(t) + R(t, t_0)V'(t) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) &\iff R(t, t_0)V'(t) = B(t) \\ &\iff V'(t) = R(t_0, t)B(t) \end{aligned}$$

d'après **7.b.**

❧ Cette expression prouve que V' est continue (en tant que produit de fonctions continues) et donc que V est de classe $\mathscr{C}^1$. D'après le théorème fondamental,

$$\forall\, t \in I, \quad V(t) = V(t_0) + \int_{t_0}^{t} V'(s)\,ds.$$

Or
$$X(t_0) = R(t_0, t_0)V(t_0) = V(t_0)$$
donc
$$\forall\, t \in I, \quad V(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} V'(s)\,ds.$$

8. b. D'après **7.b.**,
$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_{t_0}^{t} R(t,u)B(u)\,du \\ &= \int_{t_0}^{t} R(t,t_0)R(t_0,u)B(u)\,du \\ &= R(t,t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0,u)B(u)\,du \end{aligned}$$
par linéarité de l'intégrale (la matrice $R(t, t_0)$ est un facteur indépendant de la variable d'intégration u).

Cette fonction Y est le produit d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ (**6.a.**) et d'une primitive d'une fonction continue, donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$. On déduit de la formule de Leibniz et du théorème fondamental que
$$Y'(t) = R'(t,t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0,u)B(u)\,du + R(t,t_0)R(t_0,t)B(t)$$
puis de **7.a.** et **7.b.** que
$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t).$$
On a ainsi trouvé une solution particulière de (E).

Partie C. Une application de la résolvante

9. a. Soit y, une solution polynomiale de degré d de (e_0). Comme (e_0) est une équation linéaire et homogène, on peut supposer que le polynôme associé à y est unitaire :
$$\exists\, Q \in \mathbb{R}_{d-1}[X], \quad y(t) = t^d + Q(t).$$
On en déduit que, à un polynôme de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ près,
$$y'(t) = dt^{d-1} \quad \text{et} \quad t(t-1)y''(t) = d(d-1)adt^d.$$
Si y est solution de (e_0), alors
$$[d(d-1) - 6]t^d = 0$$
(toujours à un polynôme de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ près), donc $d(d-1) = 6$ et finalement $d = 3$ ou $d = -2$ (ce dernier cas étant évidemment impossible).

☙ Nous allons donc chercher une solution de la forme
$$y(t) = t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0.$$
En substituant cette expression dans (e_0), on obtient
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad (-4a_2 + 3)t^2 + (4a_2 - 6a_1)t + (3a_1 - 6a_0) = 0$$
ce qui donne les valeurs de a_2, a_1 et a_0 (dans cet ordre). On déduit de ce qui précède que les seules solutions polynomiales de (e_0) sont de la forme
$$\lambda\Big(t^3 + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\Big)$$
et il est clair (sur les derniers calculs effectués) que toutes ces expressions polynomiales sont bien des solutions de l'équation linéaire et homogène (e_0).

☙ On en déduit enfin que la seule solution polynomiale P telle que $P(0) = 1$ est
$$P(t) = 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1.$$

Remarque.— Comme toute solution polynomiale non nulle de (e_0) est de degré 3, alors toutes les solutions polynomiales sont proportionnelles ! En effet, si y_1 et y_2 sont des solutions polynomiales *unitaires* de degré 3, alors la différence $y_1 - y_2$ est encore une solution polynomiale dont le degré est strictement inférieur à 3 (principe de superposition), donc $y_1 = y_2$. (Remarque intéressante, mais sans utilité pour la suite.)

9. b. On injecte
$$Q'(t) = \frac{2}{(1-t)^3} \quad \text{et} \quad Q''(t) = \frac{6}{(1-t)^4}$$
dans (e_0) et ça marche sur $]-1, 1[$... mais aussi sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$!

9. c. Comme on fait l'hypothèse $R > 0$, on peut dériver y deux fois terme à terme :
$$\begin{aligned} y'(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} ka_kt^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}t^k \\ ty''(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)a_{k+1}t^k \\ t^2y''(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)a_kt^k \end{aligned}$$
et l'équation (e_0) devient
$$3(a_1 - 2a_0) + \sum_{k=1}^{+\infty}(k+3)[(k+2)a_k - (k+1)a_{k+1}]t^k = 0.$$
Cette égalité étant vérifiée sur un voisinage de l'origine (puisque $R > 0$), on peut identifier terme à terme en prenant garde à ne pas diviser par 0 :
$$\forall\, k \neq 3, \quad a_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}a_k$$
(le cas particulier $a_1 = 2a_0$ ne se distinguant pas du cas général).

Pour $t > 0$, on en déduit que
$$\frac{a_{k+1}t^{k+1}}{a_kt^k} \sim t$$
ce qui prouve que la série $\sum a_kt^k$ converge absolument pour $|t| < 1$ et diverge grossièrement pour $|t| > 1$ (règle de D'Alembert). Par conséquent, $R = 1$ et les calculs précédents sont finalement justifiés.

☙ On peut chercher à résoudre la relation de récurrence : l'absence de relation entre a_3 et a_4 fait que les solutions sont en bijection avec les couples (a_0, a_4). On trouve ainsi deux solutions développables en série entière non proportionnelles.

❧ Il est plus malin de tirer parti des calculs déjà faits ! Le polynôme P donne une solution développable en série entière. La fonction Q donne une solution sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ qui est développable en série entière sur $]-1,1[$. Enfin, il est clair que ces deux solutions ne sont pas proportionnelles (l'une est polynomiale, pas l'autre).

D'après le principe de superposition (l'équation différentielle étudiée est linéaire et homogène), toute combinaison linéaire $\alpha P+\beta Q$ est une solution développable en série entière sur $]-1,1[$ de (e_0).

Il reste à vérifier qu'il n'y en a pas d'autre : considérons maintenant une solution f développable en série entière sur un voisinage V de l'origine.

L'équation différentielle (e_0) est linéaire du second ordre et le coefficient de y'' ne s'annule qu'en $t=0$ et $t=1$. Par conséquent, le théorème de Cauchy-Lipschitz peut être invoqué sur chacun des trois intervalles

$$I_0=]-\infty,0[,\quad I_1=]0,1[,\quad I_2=]1,+\infty[.$$

Il existe donc quatre réels λ_0, μ_0, λ_1 et μ_1 tels que

$$\forall\, t\in V\cap I_0,\quad f(t)=\lambda_0P(t)+\mu_0Q(t)$$
$$\forall\, t\in V\cap I_1,\quad f(t)=\lambda_1P(t)+\mu_1Q(t).$$

En particulier, puisque $\deg P=3$,

$$\forall\, t\in V\cap I_0,\quad f^{(4)}(t)=\mu_0Q^{(4)}(t)=\frac{5!\mu_0}{(1-t)^6}$$
$$\forall\, t\in V\cap I_1,\quad f^{(4)}(t)=\mu_1Q^{(4)}(t)=\frac{5!\mu_1}{(1-t)^6}$$

et par continuité de $f^{(4)}$ en $t=0$, on en déduit que $\mu_1=\mu_0$. Le même raisonnement (avec P à la place de Q) montre que $\lambda_1=\lambda_0$ et donc que f est bien une combinaison lin'eaire de P et Q.

REMARQUE.— La relation de récurrence ne nous a pas servi explicitement. Cependant, elle prouve que P et Q ont le même développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et c'est pour cette raison qu'il a fallu étudier $f^{(4)}$ pour comparer les coefficients b_0 et b_1.

9. d. On reprend le même raisonnement qu'à la question précédente. Sur $]-1,0]$ et sur $[0,1[$, la fonction f coïncide avec des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

$$\forall\, t\in]-1,0[,\quad f(t)=\alpha_0P(t)+\beta_0[Q(t)-P(t)]$$
$$\forall\, t\in]0,1[,\quad f(t)=\alpha_1P(t)+\beta_1[Q(t)-P(t)]$$

(La raison du changement de base : $(P,Q)\leftarrow(P,Q-P)$ apparaîtra plus loin.)

Par conséquent, le raccord entre les deux expressions est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$ si, et seulement si,

$$f(0-)=f(0+),\quad f'_g(0)=f'_d(0)\quad\text{et}\quad f''_g(0)=f''_d(0)$$

c'est-à-dire : si les deux expressions ont le même développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Par un calcul direct ou en exploitant la relation de récurrence entre les a_k, on trouve

$$\alpha_0=\alpha_1$$

puisque $Q(t)-P(t)=o(t^3)$ au voisinage de 0. (Le changement de base est expliqué !)

Finalement, une fonction f est une solution de (e_0) de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$ si, et seulement si, il existe trois scalaires α, β_0 et β_1 tels que

$$\forall\, t\in]-1,0[,\quad f(t)=\alpha P(t)+\beta_0[Q(t)-P(t)]$$
$$\forall\, t\in]0,1[,\quad f(t)=\alpha P(t)+\beta_1[Q(t)-P(t)].$$

❧ L'espace des solutions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$ est donc de dimension 3 alors que l'équation est du second ordre : cela contredit la conclusion du théorème de Cauchy-Lipschitz, ce qui s'explique par la présence d'une singularité en $t=0$ (facteur t de y'').

❧ On peut présenter cette singularité à l'aide de problèmes de Cauchy :

- Pour les conditions initiales $(t_0,x_0,v_0)=(0,x_0,2x_0)$ qui sont cohérentes avec le développement limité à l'ordre deux de P, il existe une infinité de solutions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$ (choix arbitraire de β_0 et de β_1).
- Pour les conditions initiales $(t_0=0,x_0,v_0\neq 2x_0)$, qui ne sont pas cohérentes avec le développement limité à l'ordre deux de P, il n'existe pas de solution de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$.

10. a.

$$A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{6}{t(t-1)} & \dfrac{-3}{t(t-1)}\end{pmatrix}\qquad B(t)=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{20t^4}{t(t-1)}\end{pmatrix}$$

10. b. D'après les formules de Cramer,

$$W(t_0)^{-1}=\frac{1}{f_0g'_0-f'_0g_0}\begin{pmatrix}g'_0 & -g_0\\ -f'_0 & f_0\end{pmatrix}$$

(on ne divise pas par zéro, mais par le déterminant de la matrice $W(t_0)$ qui est inversible) et donc

$$R(t,t_0)=\frac{1}{f_0g'_0-f'_0g_0}\begin{pmatrix}fg'_0-gf'_0 & gf_0-fg_0\\ f'g'_0-g'f'_0 & g'f_0-f'g_0\end{pmatrix}.$$

10. c. On trouve

$$\det W(u)=P(u)Q'(u)-P'(u)Q(u)=\frac{20u^3}{(1-u)^3}$$

(par un calcul direct, surtout pas en tentant de résoudre l'équation différentielle vérifiée par le wronskien) et

$$Q(t)P(u)-P(t)Q(u)=\frac{4u^5-5u^4-4t^5+5t^4}{(1-t)^2(1-u)^2}.$$

10. d. Ce qui précède permet d'appliquer **8.b.** pour trouver une solution particulière de (E) On se contente de calculer le strict minimum : en posant

$$R(t,u)B(u)=\begin{pmatrix}y_1(u)\\ y_2(u)\end{pmatrix},$$

une solution particulière de (E) est donnée par

$$Y(t)=\begin{pmatrix}y(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int_{t_0}^t y_1(u)\,du\\ \int_{t_0}^t y_2(u)\,du\end{pmatrix}$$

et comme seule $y(t)$ nous intéresse, il suffit de calculer $y_1(u)$ et donc de simplifier le produit suivant :

$$\frac{1}{\det W(u)}\begin{pmatrix} * & Q(t)P(u)-P(t)Q(u) \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{20u^4}{u(u-1)} \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$y_1(u) = \frac{-(4u^5-5u^4-4t^5+5^4)}{(1-t)^2}.$$

On en déduit effectivement qu'une solution particulière de (e) est

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0}^{t} y_1(u)\,du \\ &= \frac{1}{(1-t)^2}\int_{t_0}^{t}(4t^5-5t^4-4u^5+5u^4)\,du. \end{aligned}$$

On calcule cette intégrale en se limitant là encore au strict minimum : il existe une constante C_0 telle que

$$y(t) = Q(t)\Big[\frac{10}{3}t^6-4t^5+t_0(5t^4-4t^5)+C_0\Big].$$

Le terme $C_0Q(t)$ est une solution de l'équation homogène : on peut l'omettre. Par ailleurs, une division euclidienne nous réserve une bonne surprise !

$$5t^4-4t^5 = -(1-t)^2P(t)+1$$

donc

$$t_0(5t^4-4t^5)Q(t) = -t_0P(t)+t_0Q(t)$$

et ce terme apparaît aussi comme une solution de l'équation homogène.

On obtient alors la solution particulière de (e) la plus simple :

$$\frac{1}{(1-t)^2}\Big(\frac{10}{3}t^6-4t^5\Big).$$