

## Composition de Mathématiques

Le 9 mars 2016 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**Les calculatrices sont autorisées, mais pas les téléphones portables.**

### ❖ Problème ❖

#### Partie A. Définition de l'exponentielle

Pour toute matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \quad \text{et} \quad \|A\| = n \|A\|_\infty.$$

On rappelle qu'une série de matrices  $\sum A_k$  est **absolument convergente** si, et seulement si, la série numérique  $\sum \|A_k\|_\infty$  est convergente. Dans ce cas, la série des coefficients  $\sum A_k(i,j)$  est absolument convergente pour tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  $1 \leq j \leq n$  et la somme de la série est la matrice  $S = (s_{i,j})$  définie par

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad s_{i,j} = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(i,j).$$

1. Démontrer que

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

2. Soit  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ .

2.a. Démontrer que la série numérique  $\sum \left\| \frac{1}{k!} M^k \right\|$  est convergente.

2.b. Démontrer que la série de matrices  $\sum \frac{1}{k!} M^k$  est absolument convergente.

On rappelle que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k.$$

#### Partie B. Présentation du problème

3. Soit  $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ , une matrice triangulaire. Démontrer que  $\exp(T)$  est une matrice triangulaire. Exprimer les valeurs propres de  $\exp(T)$  en fonction de celles de  $T$ .

4. Soit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ . Démontrer que l'application

$$\Phi = [M \mapsto P^{-1}MP]$$

est continue de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ .

5. Soit  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ .

5.a. Rappeler pourquoi la matrice  $M$  est semblable à une matrice triangulaire  $T$ .

5.b. Démontrer que

$$\det[\exp(M)] = \exp[\text{tr}(M)].$$

6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -1 & -9 & 11 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

6.a. Calculer le déterminant de  $A$ . (Le détail des calculs devra figurer sur la copie.)

6.b. En déduire que l'équation matricielle  $B^2 = A$  d'inconnue  $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  n'a pas de solution.

6.c. L'équation matricielle  $\exp(M) = A$  a-t-elle une solution  $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$  ?

6.d. On *admet* que le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\chi_A = (X-2)^2(X+3).$$

Quel est le polynôme minimal de  $A$  ? (Le détail des calculs devra figurer sur la copie.)

#### Partie C. Objectif et principe de la démarche

Notre objectif est le suivant : si  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice carrée inversible à coefficients réels, alors

– pour tout entier  $p \geq 1$ , il existe une matrice  $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $B^p = A$

– et il existe une matrice  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  telle que

$$\exp(M) = A.$$

Il ne s'agira pas seulement de prouver que de telles matrices existent, mais surtout d'explicitier de telles matrices.

Nous nous restreindrons en pratique au cas des matrices de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  et nous allons maintenant présenter le principe de la démarche sur l'exemple de la matrice  $A$  introduite au 6.

7. On cherche le reste de la division euclidienne de  $X^k$  par le polynôme caractéristique  $\chi_A$  (donné au 6.d.).

7.a. Justifier l'existence d'un polynôme  $Q_k \in \mathbb{R}[X]$  et de trois réels  $a_k, b_k$  et  $c_k$  tels que

$$X^k = Q_k \chi_A + (a_k X^2 + b_k X + c_k).$$

7.b. Pourquoi les réels  $a_k, b_k$  et  $c_k$  vérifient-ils le système suivant ?

$$\begin{cases} 9a_k - 3b_k + c_k = (-3)^k \\ 4a_k + 2b_k + c_k = 2^k \\ 4a_k + b_k = k2^{k-1} \end{cases}$$

7.c. Vérifier que ce système possède une unique solution et qu'il existe une matrice  $R \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} (-3)^k \\ 2^k \\ k2^{k-1} \end{pmatrix}.$$

**7.d.** En déduire qu'il existe trois matrices  $B_0, B_1$  et  $B_2$  dans  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{Q})$  qui commutent à  $A$  et telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = (-3)^k B_0 + 2^k (B_1 + kB_2).$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on pose alors

$$\gamma(t) = 3^t e^{i\pi t} B_0 + 2^t (B_1 + tB_2) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$$

et on peut démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad [\gamma(1/p)]^p = A$$

que  $\gamma(-1) = A^{-1}$  et que  $\exp[\gamma'(0)] = A$  : c'est l'objet de la partie suivante.

#### Partie D. Démonstration

Dans la suite, on note  $F$ , l'espace vectoriel complexe des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  qui peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires des applications de la forme

$$[x \mapsto x^k \rho^x e^{i\theta x}]$$

où  $k \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\rho \in ]0, +\infty[$  et  $\theta \in ]0, 2\pi[$ .

**8.a.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$ , deux constantes complexes. Expliciter une fonction  $f \in F$  telle que

$$f(n) = \alpha(-3)^n + \beta n^2 2^n$$

pour tout entier naturel  $n$ .

**8.b.** Soient  $f \in F$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Démontrer que la fonction

$$\theta_{x_0}(f) = [x \mapsto f(x + x_0)]$$

appartient encore à  $F$ .

**9.a.** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Démontrer que la suite complexe de terme général

$$u_n = n^2 (2/3)^n e^{i\theta n}$$

converge vers 0.

**9.b.** Soient  $k_1$  et  $k_2$ , deux entiers de  $\{0, 1, 2\}$  et  $\rho_1, \rho_2, \theta_1$  et  $\theta_2$  quatre nombres réels tels que

$$0 < \rho_1 \leq \rho_2 \quad \text{et} \quad 0 < \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi.$$

Démontrer que : si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha n^{k_1} \rho_1^n e^{i\theta_1 n} + \beta n^{k_2} \rho_2^n e^{i\theta_2 n} = 0$$

alors  $\alpha = \beta = 0$ .

☞ On distinguera les cas  $\rho_1 < \rho_2$  et  $\rho_1 = \rho_2$ .

**9.c.** On admet que si  $f \in F$  est une fonction telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 0,$$

alors  $f$  est l'application nulle.

Que dire de deux applications  $f$  et  $g$  de  $F$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = g(n)?$$

Dans la suite de cette partie,  $A$  désigne une matrice inversible de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ .

**10.** En s'inspirant de l'exemple présenté plus haut, démontrer qu'il existe neuf fonctions  $\omega_{i,j}$  dans l'espace  $F$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (\omega_{i,j}(n))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

☞ On discutera sur le nombre et la multiplicité des racines du polynôme caractéristique de  $A$ .

**11.** Les fonctions  $\omega_{i,j} \in F$  vérifiant la propriété du **10.**, on pose

$$\gamma(t) = (\omega_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**11.a.** Reconnaitre les matrices  $\gamma(0)$  et  $\gamma(1)$ .

**11.b.** Démontrer que

$$\gamma(m+n) = \gamma(m)\gamma(n)$$

pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**11.c.** Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}$ , on pose

$$f(x) = \omega_{i,j}(x+m) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=1}^3 \omega_{i,k}(x) \omega_{k,j}(m).$$

Démontrer que  $f = g$  et en déduire que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \gamma(x+m) = \gamma(x)\gamma(m).$$

**11.d.** En déduire que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y).$$

**12.** Démontrer que  $\gamma(-1) = A^{-1}$  et que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad [\gamma(1/p)]^p = A.$$

**13.a.** Démontrer que  $\gamma$  est une application dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$  et qu'elle est solution de l'équation différentielle

$$u'(t) = \gamma'(0)u(t)$$

d'inconnue  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}))$ .

**13.b.** Trouver la fonction  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$  telle que  $u(0) = I_3$  et telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = \gamma'(0)u(t)$$

et en déduire que  $\exp[\gamma'(0)] = A$ .

#### Partie E. Exemple

Dans cette partie, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On pourra effectuer les calculs suivants à l'aide d'une calculatrice, sans fournir le détail des calculs.

**14.** Quel est le polynôme caractéristique de  $A$ ? La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?

**15.** Mettre en œuvre la méthode présentée ci-dessus à l'aide d'une calculatrice pour répondre aux questions suivantes.

**15.a.** Expliciter la matrice  $A^{-1}$ .

**15.b.** Expliciter une matrice  $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$  telle que  $B^2 = A$ .

**15.c.** Expliciter une matrice  $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$  telle que

$$\exp(M) = A.$$

## Solution Image de l'exponentielle de matrice

### Partie A. Définition de l'exponentielle

1. Posons  $A = (a_{i,j})$ ,  $B = (b_{i,j})$  et  $AB = (c_{i,j})$ . Alors, d'après la formule du produit matriciel,

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

donc, par inégalité triangulaire et définition de  $\|\cdot\|_\infty$ ,

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad |c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \|B\|_\infty.$$

Par passage au max (l'ensemble d'indices est fini), on en déduit que

$$\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

et le résultat cherché s'en déduit en multipliant les deux membres par  $n \geq 0$ .

2. a. D'après 1.,

$$\forall k \geq 1, \quad 0 \leq \left\| \frac{1}{k!} M^k \right\| \leq \frac{\|M\|^k}{k!}.$$

(Attention ! cette majoration est fautive pour  $k = 0$ ...)

On sait que la série de terme général  $\sum z^k/k!$  est absolument convergente pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . D'après le théorème de comparaison pour les séries de terme général positif, la série  $\sum \left\| \frac{1}{k!} M^k \right\|$  est donc convergente.

2. b. Par définition,

$$\forall k \geq 1, \quad 0 \leq \left\| \frac{1}{k!} M^k \right\|_\infty \leq \frac{1}{n} \left\| \frac{1}{k!} M^k \right\|.$$

On déduit de 2.a. et du théorème de comparaison pour les séries de terme général positif que la série numérique

$$\sum \left\| \frac{1}{k!} M^k \right\|_\infty$$

est convergente et donc, d'après le rappel fait par l'énoncé, que la série de matrices  $\sum \frac{1}{k!} M^k$  est absolument convergente.

### Partie B. Présentation du problème

3. Si  $T$  est triangulaire et admet  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  pour coefficients diagonaux, on sait que  $T^k$  est triangulaire et admet  $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$  pour coefficients diagonaux (pour tout entier  $k$ , y compris  $k = 0$ ).

Par définition de la somme d'une série de matrices (rappelée par l'énoncé), on en déduit que  $\exp(T)$  est une matrice triangulaire et admet pour coefficients diagonaux

$$\exp(\lambda_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!}, \dots, \exp(\lambda_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!}.$$

• On sait que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux. Par conséquent,

$$\text{Sp}[\exp(T)] = \{e^\lambda, \lambda \in \text{Sp}(T)\}.$$

4. Il est clair que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ . Comme  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  est un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que  $\Phi$  est continue (quelle que soit la norme choisie sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ ).

5. a. On sait qu'une matrice  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$ .

Ici,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et d'après le théorème de D'Alembert-Gauss, tout polynôme de degré supérieur à 1 est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$ . Or  $\deg \chi_M = n \geq 1$ , donc  $\chi_M$  est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$  et  $M$  est donc semblable à une matrice triangulaire  $T$ .

• D'après 3.,

$$\begin{aligned} \det[\exp(T)] &= \prod_{\lambda \in \text{Sp}[\exp(T)]} \lambda = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(T)} \exp(\lambda) \\ &= \exp\left(\sum_{\lambda \in \text{Sp}(T)} \lambda\right) = \exp[\text{tr}(T)]. \end{aligned}$$

Comme les matrices  $M$  et  $T$  sont semblables, elles ont même trace :  $\text{tr}(T) = \text{tr}(M)$ . De même,  $\exp(M)$  et  $\exp(T)$  sont semblables, donc  $\det[\exp(T)] = \det[\exp(M)]$ . On a ainsi démontré que

$$\det[\exp(M)] = \exp[\text{tr}(M)]$$

pour toute matrice  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ .

5. b. Il existe donc une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}TP = M$ . On sait alors que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Phi(T^k) = P^{-1}T^kP = M^k$$

et par linéarité de  $\Phi$ ,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \Phi\left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} T^k\right) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} M^k.$$

Par continuité de  $\Phi$  (4.), on en déduit que

$$P^{-1} \exp(T) P = \Phi(\exp(T)) = \exp(M).$$

6. a. On trouve  $\det A = -12$ . (On peut vérifier ce résultat à la machine, mais aussi avec le polynôme caractéristique de  $A$ , donné un peu plus loin par l'énoncé.)

6. b. Si  $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ , alors  $\det(B) \in \mathbb{R}$  et

$$\det(B^2) = (\det B)^2 \geq 0.$$

Comme  $\det(A) < 0$  par 6.a., l'équation  $B^2 = A$  n'a pas de solution dans  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ .

6. c. Par 5.b., si  $A = \exp(M)$  avec  $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ , alors

$$-12 = \det A = \exp[\text{tr}(M)] > 0$$

car  $\text{tr}(M) \in \mathbb{R}$  : c'est absurde.

En revanche, le préambule de la partie C affirme bien qu'il existe une matrice  $M$  à coefficients complexes telle que  $\exp(M) = A$ ...

6. d. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal est un diviseur du polynôme caractéristique.

D'autre part, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont les mêmes racines : les valeurs propres de la matrice.

Enfin, le polynôme minimal est unitaire.

Par conséquent, il n'y a que deux possibilités :

$$\mu_A = (X - 2)(X + 3) \quad \text{ou} \quad \mu_A = (X - 2)^2(X + 3).$$

On calcule alors (avec l'aide éventuelle de la machine) :

$$\begin{aligned} (A - 2I_3)(A + 3I_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & -6 \\ -1 & -11 & 11 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 6 & -6 \\ -1 & -6 & 11 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & -5 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \neq 0_3. \end{aligned}$$

Donc  $\mu_A = (X - 2)^2(X + 3) = \chi_A$ .

**Partie C. Objectif et principe de la démarche**

**7.a.** Le diviseur  $\chi_A$  est un polynôme de degré 3 à coefficients réels puisque  $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ . Le dividende  $X^k$  est un polynôme à coefficients réels. Par conséquent, la division euclidienne

$$X^k = Q_k \chi_A + R_k$$

de  $X^k$  par  $\chi_A$  a un sens ; le quotient  $Q_k$  et le reste  $R_k$  sont des polynômes à coefficients réels et le degré du reste est strictement inférieur au degré du diviseur  $\chi_A$ , donc il existe trois réels  $a_k, b_k$  et  $c_k$  tels que

$$R_k = a_k X^2 + b_k X + c_k.$$

**7.b.** On obtient les deux premières équations en substituant 2 et  $-3$  à  $X$  dans la relation du **7.a.**. Comme ce sont les racines de  $\chi_A$ , il reste seulement

$$R_k(2) = 2^k \quad \text{et} \quad R_k(-3) = (-3)^k.$$

On obtient la dernière équation en dérivant avant de substituer 2 à  $X$ . Comme 2 est une racine double de  $\chi_A$ , on en déduit que  $\chi'_A(2) = 0$  et donc que  $R'_k(2) = k2^{k-1}$ .

**7.c.** Le déterminant de ce système (calculé à la machine) est égal à  $-25$ , donc la matrice de ce système est inversible et en posant

$$R = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

on obtient la solution du système sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} (-3)^k \\ 2^k \\ k2^{k-1} \end{pmatrix}.$$

**7.d.** D'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $\chi_A$  est un polynôme annulateur de  $A$ . On déduit alors de **7.a.** que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = a_k A^2 + b_k A + c_k I_3.$$

Avec  $R = (r_{i,j})$ , on obtient

$$\begin{cases} a_k = (-3)^k r_{1,1} + 2^k r_{1,2} + k2^{k-1} r_{1,3} \\ b_k = (-3)^k r_{2,1} + 2^k r_{2,2} + k2^{k-1} r_{2,3} \\ c_k = (-3)^k r_{3,1} + 2^k r_{3,2} + k2^{k-1} r_{3,3} \end{cases}$$

et donc  $A^k = (-3)^k B_0 + 2^k B_1 + k2^k B_2$  avec

$$B_0 = r_{1,1} A^2 + r_{2,1} A + r_{3,1} I_3,$$

$$B_1 = r_{1,2} A^2 + r_{2,2} A + r_{3,2} I_3,$$

$$B_2 = (r_{1,3} A^2 + r_{2,3} A + r_{3,3} I_3)/2.$$

Les coefficients  $r_{i,j}$  de la matrice  $R$  sont des rationnels (puisque  $R$  est l'inverse d'une matrice à coefficients entiers), donc les matrices  $B_0, B_1$  et  $B_2$  sont à coefficients rationnels.

En tant que polynômes en  $A$ , les matrices  $B_0, B_1$  et  $B_2$  commutent à  $A$  (et commutent entre elles).

REMARQUE.— On peut expliciter les  $r_{i,j}$  (qu'on travaille à la main ou avec une machine) : leur expression exacte importe peu ici.

**Partie D. Démonstration**

**8.a.** On s'inspire de ce qui précède pour répondre ! La fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \alpha \cdot (x^0 3^x e^{i\pi x}) + \beta \cdot (x^2 2^x e^{i0x})$$

appartient à  $F$  (combinaison linéaire de deux fonctions de  $F$ ) et répond bien à la question posée.

REMARQUE.— On rappelle que  $r^x$  est défini – sans restriction sur  $x$  par  $e^{x \ln r}$  si  $r \in \mathbb{R}_+^*$  ; – seulement pour  $x \in \mathbb{Z}$  si  $r \in \mathbb{R}_-^*$ .

**8.b.** L'application  $\theta_{x_0}$  est clairement linéaire. Pour démontrer que  $F$  est stable par  $\theta_{x_0}$ , il suffit de démontrer que l'image par  $\theta_{x_0}$  d'une famille génératrice de  $F$  appartient encore à  $F$ .

• Posons  $f_k(x) = x^k \rho^x e^{i\theta x}$ .

Pour  $k = 0$ , on a

$$f_0(x + x_0) = (\rho^{x_0} e^{i\theta x_0}) \cdot f_0(x)$$

donc  $\theta_{x_0}(f_0) \in \mathbb{C} \cdot f_0 \subset F$ . (Tiens, un vecteur propre !)

Pour  $k = 1$ , on a

$$\begin{aligned} f_1(x + x_0) &= (\rho^{x_0} e^{i\theta x_0}) \cdot (x + x_0) \rho^x e^{i\theta x} \\ &= (\rho^{x_0} e^{i\theta x_0}) \cdot f_1(x) + (x_0 \rho^{x_0} e^{i\theta x_0}) \cdot f_0(x) \end{aligned}$$

donc  $\theta_{x_0}(f_1) \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1) \subset F$ . (Tiens, un plan stable !)

Pour  $k = 2$ ,

$$\begin{aligned} \theta_{x_0}(f_2) &= (\rho^{x_0} e^{i\theta x_0}) \cdot (f_2 + 2x_0 \cdot f_1 + x_0^2 \cdot f_0) \\ &\in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, f_2) \subset F. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que  $F$  est stable par  $\theta_{x_0}$ .

**9.a.** Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$|u_n| = n^2 (2/3)^n = \exp(\underbrace{n \ln 2/3}_{<0} + 2 \ln n).$$

Par croissances comparées,

$$n \ln 2/3 + 2 \ln n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty,$$

donc  $|u_n|$  tend vers 0 par composition de limites. Cela prouve que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

**9.b.** Si  $\beta = 0$ , il est clair que  $\alpha = 0$ .

Supposons donc que  $\beta \neq 0$  et cherchons la contradiction.

– Si  $\rho_1 < \rho_2$ , on déduit de la relation que

$$\forall n \geq 1, \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = n^{k_2 - k_1} (\rho_2 / \rho_1)^n.$$

Cependant, le second membre tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  alors que le premier membre est constant : c'est absurde !

– Si  $\rho_1 = \rho_2$ , le raisonnement précédent montre que  $n^{k_2 - k_1}$  est constant et donc que  $k_1 = k_2$ . Il reste donc

$$\forall n \geq 1, \quad [e^{i(\theta_2 - \theta_1)}]^n = -\alpha/\beta.$$

Le membre de gauche est une suite géométrique de module 1 et le membre de droite nous dit que cette suite est constante : il faut que la raison soit égale à 1.

Or  $0 < \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ , donc

$$0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$$

et par conséquent,  $e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \neq 1$  : la contradiction est établie.

**9.c.** Par définition,  $F$  est un espace vectoriel, donc la différence  $f - g$  appartient à  $F$  et  $(f - g)(n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On déduit de la propriété admise que  $(f - g)$  est identiquement nulle et donc que  $f = g$ .

**10.** Dans  $\mathbb{C}[X]$ , le polynôme caractéristique de  $A$  est un polynôme unitaire, scindé, de degré 3. On doit donc distinguer trois cas :

- Trois racines distinctes :  $\chi_A = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$  ;
- Deux racines distinctes, dont une racine double :  $\chi_A = (X - \alpha)^2(X - \beta)$  ;
- Une seule racine, triple :  $\chi_A = (X - \alpha)^3$ .

Comme  $A$  est supposée inversible, le scalaire  $\alpha$  est nécessairement différent de 0.

✦ Dans tous les cas, on calcule  $A^n$  en effectuant la division euclidienne de  $X^n$  par le polynôme caractéristique

$$X^n = Q_n \chi_A + R_n$$

où le reste de la division est de la forme

$$R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n.$$

On déduit alors du théorème de Cayley-Hamilton que

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3.$$

✦ Si  $\chi_A = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ , on substitue  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  à  $X$  et on remarque que les équations  $R_n(\alpha) = \alpha^n$ ,  $R_n(\beta) = \beta^n$  et  $R_n(\gamma) = \gamma^n$  se traduisent par une matrice de Vandermonde.

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^n \\ \beta^n \\ \gamma^n \end{pmatrix}$$

Comme  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont distincts, on sait que le déterminant de cette matrice est non nul. On en déduit qu'il existe une matrice  $R \in GL_3(\mathbb{C})$ , indépendante de  $n \in \mathbb{N}$ , telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^n \\ \beta^n \\ \gamma^n \end{pmatrix}$$

donc il existe trois matrices  $B_1, B_2$  et  $B_3$  à coefficients complexes, indépendantes de  $n \in \mathbb{N}$ , telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \alpha^n \cdot B_1 + \beta^n \cdot B_2 + \gamma^n \cdot B_3.$$

✦ Si  $\chi_A = (X - \alpha)^2(X - \beta)$ , on substitue  $\alpha$  et  $\beta$  à  $X$  ; puis on dérive la division euclidienne et on substitue encore  $\alpha$  à  $X$ . On obtient un système de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^n \\ n\alpha^{n-1} \\ \beta^n \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à (puisque  $\alpha \neq 0$ )

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 2\alpha^2 & \alpha & 0 \\ \beta^2 & \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^n \\ n\alpha^n \\ \beta^n \end{pmatrix}$$

Le déterminant de ce système est égal à  $-\alpha(\alpha - \beta)^2 \neq 0$ , donc il existe ici aussi une matrice  $R \in GL_3(\mathbb{C})$ , indépendante de  $n \in \mathbb{N}$ , telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^n \\ n\alpha^n \\ \beta^n \end{pmatrix}$$

donc il existe trois matrices  $B_1, B_2$  et  $B_3$  à coefficients complexes, indépendantes de  $n \in \mathbb{N}$ , telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \alpha^n \cdot B_1 + n\alpha^n \cdot B_2 + \beta^n \cdot B_3.$$

✦ Si  $\chi_A = (X - \alpha)^3$ , alors on substitue  $\alpha$  à  $X$  dans la division ; dans la relation obtenue en dérivant et dans la relation obtenue en dérivant deux fois. On obtient un système de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^n \\ n\alpha^{n-1} \\ n(n-1)\alpha^{n-2} \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à (puisque  $\alpha \neq 0$ )

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 2\alpha^2 & \alpha & 0 \\ 2\alpha^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^n \\ n\alpha^n \\ n(n-1)\alpha^n \end{pmatrix}$$

Le déterminant est égal à  $-2\alpha^3 \neq 0$  donc il existe ici encore une matrice  $R \in GL_3(\mathbb{C})$ , indépendante de  $n \in \mathbb{N}$ , telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^n \\ n\alpha^n \\ n(n-1)\alpha^n \end{pmatrix}$$

donc il existe trois matrices  $B_1, B_2$  et  $B_3$  à coefficients complexes, indépendantes de  $n \in \mathbb{N}$ , telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \alpha^n \cdot B_1 + n\alpha^n \cdot B_2 + n^2\alpha^n \cdot B_3.$$

✦ Dans les trois situations, les coefficients de  $A^n$  apparaissent comme des combinaisons linéaires de suites dont les termes généraux sont de la forme  $\alpha^n, n\alpha^n$  ou  $n^2\alpha^n$ . En représentant le complexe  $\alpha$  sous forme polaire :  $\alpha = \rho e^{i\theta}$  (avec  $\rho \in \mathbb{R}_+$  puisque  $\alpha \neq 0$ ), ces suites ont toutes un terme général de la forme  $n^k \rho^n e^{i\theta n}$  où  $k = 0, 1$  ou  $2$ .

Il existe donc bien neuf fonctions de  $F$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (\omega_{i,j}(n))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

**11.a.** Par définition des fonctions  $\omega_{i,j}$ , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma(n) = A^n.$$

En particulier,  $\gamma(0) = A^0 = I_3$  et  $\gamma(1) = A$ .

**11.b.** De même,

$$\gamma(m)\gamma(n) = A^m \times A^n = A^{m+n} = \gamma(m+n)$$

quels que soient  $m$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

**11.c.** Par construction,  $\omega_{i,j} \in F$  et par **8.b.** la fonction  $f$  appartient encore à  $F$ .

D'autre part, la fonction  $g$  est une combinaison linéaire de fonctions de  $F$ , donc  $g \in F$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n)$  est le coefficient de  $\gamma(n+m)$  situé à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne.

D'après la formule du produit matriciel,  $g(n)$  est le coefficient situé à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne du produit  $\gamma(n)\gamma(m)$ , qui est égal à  $\gamma(n+m)$  d'après **11.b.** Ainsi,  $f(n) = g(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $f = g$  d'après **9.c.**

✦ La formule du produit matriciel permet alors de conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}, \quad \gamma(x+m) = \gamma(x)\gamma(m).$$

**11.d.** Fixons maintenant  $x \in \mathbb{R}$ . Pour les raisons exposés ci-dessus, les neuf coefficients des fonctions matricielles

$$[y \mapsto \gamma(x+y)] \quad \text{et} \quad [y \mapsto \gamma(x)\gamma(y)]$$

appartiennent à  $F$  et, d'après la question précédente, ils coïncident deux à deux sur  $\mathbb{N}$ . Ils sont donc égaux sur  $\mathbb{R}$  d'après **9.c.** ce qui prouve que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y).$$

**12.** D'après **11.a.** et **11.b.**,

$$\gamma(-1)A = \gamma(-1)\gamma(1) = \gamma(0) = I_3$$

$$A\gamma(-1) = \gamma(1)\gamma(-1) = \gamma(0) = I_3$$

donc  $\gamma(-1) = A^{-1}$ .

✦ D'après **11.c.** avec  $x = 1/p$ ,

$$[\gamma(1/p)]^p = \gamma(p \cdot 1/p) = \gamma(1) = A.$$

**13.a.** Il est clair que toute fonction appartenant à  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, les fonctions  $\omega_{i,j}$  sont toutes de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , ce qui prouve que la fonction  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

✦ Par **11.d.**, on sait que

$$\forall t, x \in \mathbb{R}, \quad \gamma(x+t) = \gamma(x)\gamma(t).$$

Comme  $\gamma$  est dérivable, on obtient alors

$$\forall t, x \in \mathbb{R}, \quad \gamma'(x+t) = \gamma'(x)\gamma(t)$$

en dérivant par rapport à  $x$ . On peut alors choisir  $x = 0$  et en déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t).$$

**13.b.** L'équation différentielle considérée est une équation différentielle linéaire du premier ordre sur l'intervalle  $I = \mathbb{R}$ . L'espace des phases est  $E = \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ . D'après le

théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une, et une seule, solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  à valeurs dans  $E$  et qui vérifie la condition initiale  $u(0) = I_3$ .

D'après les propriétés de l'exponentielle de matrice étudiées en cours, la fonction  $u$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = \exp[t\gamma'(0)]$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  dans  $E$ , telle que  $u(0) = I_3$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = \gamma'(0)u(t).$$

L'unicité de la solution nous permet alors de conclure :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = \exp[t\gamma'(0)]$$

et en particulier  $A = \gamma(1) = \exp[\gamma'(0)]$  d'après **11.a.**

**Partie E. Exemple**

**14.** Sur la deuxième colonne de  $A$ , on voit que 2 est une valeur propre évidente. On peut alors factoriser facilement le polynôme caractéristique de  $A$  (au cas où la machine ne saurait s'en charger...) :

$$\chi_A = (X-2)(X+1)^2.$$

Avec les notations utilisées plus haut,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (-1)^n \\ n(-1)^n \\ 2^n \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n \\ n(-1)^n \\ 2^n \end{pmatrix}.$$

On définit alors les matrices

$$B_1 = \frac{1}{9}(-A^2 - 2A + 8I_3)$$

$$B_2 = \frac{1}{9}(3A^2 - 3A + 6I_3)$$

$$B_3 = \frac{1}{9}(A^2 + 2A + I_3)$$

et on pose, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\gamma(t) = e^{i\pi t}B_1 + te^{i\pi t}B_2 + 2^t B_3$$

puisque  $-1 = e^{i\pi}$ .

**15.a.** On calcule  $\gamma(-1)$  :

$$A^{-1} = -B_1 + B_2 + \frac{1}{2}B_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 11/2 & 1/2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**15.b.** On calcule  $\gamma(1/2)$  : la matrice  $B$  définie par

$$B = iB_1 + \frac{i}{2}B_2 + \sqrt{2}B_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ 6\sqrt{2}-5i & 2\sqrt{2} & 4\sqrt{2}-3i \\ i & 0 & 3i \end{pmatrix}$$

est telle que  $B^2 = A$ .

**15.c.** Enfin, l'exponentielle de  $\gamma'(0) = i\pi B_1 + B_2 + \ln 2 B_3$ , c'est-à-dire de la matrice

$$\begin{pmatrix} -1+i\pi & 0 & -1 \\ 1+3\ln 2-3i\pi & \ln 2 & 1+2\ln 2-2i\pi \\ 1 & 0 & 1+i\pi \end{pmatrix},$$

est égale à  $A$ .