Composition de Mathématiques

Le 9 mars 2016 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

❖ I – Problème ❖

On s'intéresse à l'équation différentielle suivante.

$$y' - y = \frac{-e^{-1}}{1+x} \qquad (E)$$

1. Soit $\sum a_n x^n$, une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et de somme S.

1. a. Déterminer une condition nécessaire sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la somme S soit une solution de (E) sur $]-1, 1[$.

1. b. On suppose que cette condition est satisfaite. Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{a_0}{n!} - \frac{e^{-1}}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!.$$

1. c. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et conclure.

2. Soit $x > -1$. Démontrer que la fonction

$$F = \left[t \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}\right]$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$.

3. Pour tout $x > -1$, on pose

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt.$$

3. a. Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$:

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

et exprimer les coefficients b_n en fonction des intégrales

$$I_p = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^p}\, dt.$$

3. b. Démontrer que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et calculer $f'(x) - f(x)$ pour tout $x > -1$.

4. En déduire une expression de la somme

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!$$

en fonction des intégrales I_p.

5. Quelles sont les solutions de (E) sur $]-1, +\infty[$? Démontrer que (E) n'admet qu'une seule solution bornée au voisinage de $+\infty$ et préciser le comportement asymptotique de cette solution.

❖ II – Problème ❖

Soit n, un entier naturel. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ qu'on munit du produit scalaire défini par

$$\forall\,(P, Q) \in E \times E, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt,$$

la norme associée à φ étant notée $\|\cdot\|$. On considère l'application f définie par

$$\forall\, P \in E, \quad f(P) = \big((X^2-1)P'\big)'.$$

1. Vérifier que φ est bien un produit scalaire.

2. Démontrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

3. Déterminer le noyau de f. En déduire le rang de f.

4. Dans cette question, on suppose que $n = 2$ et on pose $P_0 = 1 + X$.

4. a. Quel est le projeté orthogonal de P_0 sur $\operatorname{Im} f$?

4. b. Calculer

$$m = \inf_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \big\|P_0 - f(P)\big\|.$$

4. c. Résoudre l'équation

$$\big\|P_0 - f(P)\big\| = m$$

d'inconnue $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

5. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on définit les polynômes L_k en posant $L_0 = 1$ et

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad L_k = \big((X^2-1)^k\big)^{(k)}$$

(le polynôme L_k est la dérivée k-ième de $(X^2-1)^k$).

5. a. Expliciter L_1, L_2 et L_3.

5. b. Déterminer le degré de L_k.

5. c. À l'aide de la formule de Leibniz, exprimer les polynômes

$$\begin{cases} A_k = \big((X^2-1)(X^2-1)^k\big)^{(k+2)} \\ B_k = \big(X(X^2-1)^k\big)^{(k+1)} \end{cases}$$

en fonction de L_k, L'_k et de L''_k.

5. d. Démontrer que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad (X^2-1)L''_k + 2XL'_k - k(k+1)L_k = 0.$$

5. e. En déduire que L_k est un vecteur propre de f, en précisant la valeur propre associée à L_k.

5. f. Démontrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale de E.

Solution I ❁ Résolution d'une équation différentielle

1. a. Comme $R \geqslant 1 > 0$, alors S est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

Si S est solution de (E), alors pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\big[(n+1)a_{n+1} - a_n\big]x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{e}x^n.$$

Deux fonctions développables en série entière qui coïncident sur un intervalle ouvert non vide ayant un même développement en série entière, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{e}.$$

1. b. On suppose donc que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{e}.$$

En particulier,

$$a_1 = a_0 + \frac{-1}{e},$$

donc la propriété de l'énoncé est vérifiée pour $n = 1$.

Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$a_n = \frac{a_0}{n!} - \frac{e^{-1}}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!.$$

Alors, d'après la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{n+1} - \frac{(-1)^n}{e(n+1)} \\ &= \frac{a_0}{(n+1)!} - \frac{e^{-1}}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k! - \frac{e^{-1}(-1)^n n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{a_0}{(n+1)!} - \frac{e^{-1}}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!. \end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{a_0}{n!} - \frac{e^{-1}}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!.$$

1. c. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-2}k! + (n-1)!$$

et comme $k! \leqslant (n-2)!$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant (n-2)$, alors

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!\right| \leqslant (n-1)(n-2)! + (n-1)! = 2(n-1)!.$$

En conséquence, pour tout $n \geqslant 2$,

$$|a_n| \leqslant \frac{|a_0|}{n!} + \frac{2e^{-1}}{n}$$

ce qui prouve que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

❧ Pour un réel a_0 arbitrairement choisi, considérons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{e}.$$

Cette suite tend vers 0, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur à 1 et les calculs du **1.a.** montrent que sa somme est une solution de (E) sur $]-1,1[$.

D'après **1.b.**, pour tout $a_0 \in \mathbb{R}$, l'expression

$$\frac{-1}{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!\right]\frac{x^n}{n!} + a_0 e^x$$

est donc l'expression d'une solution de (E) sur $]-1,1[$.

Comme (E) est une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants, on en déduit que *toutes* les solutions de (E) sont développables en série entière sur $]-1,1[$.

2. La fonction F est continue sur $[-1,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a $F(t) = o(e^{-t})$ et la fonction $[t \mapsto e^{-t}]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc F est intégrable sur $[-1,+\infty[$.

3. a. Soit $|x| < 1$, fixé. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{t}}\,dt \\ &= \int_1^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}x^n\right]dt. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1,+\infty[$, on pose

$$u_n(t) = (-1)^n\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}x^n.$$

➔ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $[1,+\infty[$ et $u_n(t) = o(e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$, donc u_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.

➔ Comme $|x| < 1$ et $t \geqslant 1$, donc $|x/t| < 1$, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[1,+\infty[$ et sa somme, d'expression

$$\frac{e^{-t}}{t+x},$$

est évidemment continue sur $[1,+\infty[$.

➔ Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{+\infty}\big|u_n(t)\big|\,dt = \left[\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\,dt\right]|x|^n$$

et comme, par positivité de l'intégrale,

$$0 < \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\,dt \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{n+1}} = \frac{1}{n},$$

on en déduit que

$$\int_1^{+\infty}\big|u_n(t)\big|\,dt = o(x^n)$$

et donc que la série

$$\sum\left(\int_1^{+\infty}\left|u_n(t)\right|\,dt\right)$$

est convergente puisque $|x|<1$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme (version lebesguienne),

$$\begin{aligned}\forall\,x\in\,]-1,1[,\quad f(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\,dt\right]x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_{n+1}x^n.\end{aligned}$$

3. b. Posons $\Omega=\,]-1,+\infty[$, $I=[1,+\infty[$ et

$$\forall\,(x,t)\in\Omega\times I,\quad \varphi(x,t)=\frac{e^{-t}}{x+t}.$$

➔ Pour tout $t\in I$, la fonction $[x\mapsto\varphi(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)=\frac{-e^{-t}}{(x+t)^2}.$$

➔ On a démontré que, pour tout $x\in\Omega$, la fonction $[t\mapsto\varphi(x,t)]$ est intégrable sur I.

Pour tout $x\in\Omega$, la fonction

$$\left[t\mapsto\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right]$$

est continue sur I et négligeable devant e^{-t} lorsque t tend vers $+\infty$, donc elle est intégrable sur I.

➔ Enfin, pour tout $0<a<1$ et pour tout $x\in[-a,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right|=\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\leqslant\frac{e^{-t}}{(t-a)^2}=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(-a,t)\right|.$$

Comme le majorant est intégrable sur I (d'après le point précédent) et indépendant de x, la condition de domination est assurée et on peut donc invoquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ sur tout intervalle $[-a,+\infty[$.

Par suite, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall\,x>-1,\quad f'(x)=-\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt.$$

❧ On en déduit que, pour tout $x>-1$,

$$\begin{aligned}f'(x)-f(x)&=\int_1^{+\infty}e^{-t}\left(\frac{-1}{(x+t)^2}-\frac{1}{x+t}\right)dt\\&=\int_1^{+\infty}\frac{d}{dt}\left[\frac{e^{-t}}{x+t}\right]dt\\&=\frac{-e^{-1}}{x+1}.\end{aligned}$$

La fonction f est donc bien une solution de (E) sur l'intervalle ouvert $]-1,+\infty[$.

4. D'après **3.a.**, **3.b.** et **1.c.**, il existe $a_0\in\mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_{n+1}x^n=\frac{-1}{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!\right]\frac{x^n}{n!}+a_0e^x$$

pour tout $x\in\,]-1,1[$.

Deux fonctions développables en série entière sur $]-1,1[$ qui coïncident sur cet intervalle ont un même développement en série entière. Par conséquent, $I_1=a_0$ (par identification des termes constants) et

$$\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\quad(-1)^n I_{n+1}=\frac{a_0}{n!}+\frac{-1}{e\,n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!$$

donc

$$\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\quad\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!=e\big[I_1-(-1)^n n!I_{n+1}\big].$$

REMARQUE.— Cette formule peut être établie par récurrence en intégrant I_p par parties.

5. La fonction f est une solution particulière de (E) sur $]-1,+\infty[$. Les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont les fonctions proportionnelles à exp. Par conséquent, g est une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ si, et seulement si, il existe une constante K telle que

$$\forall\,x>-1,\quad g(x)=f(x)+Ke^x.$$

❧ S'il existe deux solutions de (E) qui restent bornées au voisinage de $+\infty$, leur différence est une solution de l'équation homogène : comme Ke^x tend vers l'infini lorsque x tend vers $+\infty$ pour tout $K\neq0$, ces deux solutions doivent être égales. Il existe donc *au plus une* solution de (E) qui reste bornée au voisinage de $+\infty$.

❧ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels positifs qui tend vers $+\infty$. Alors

➔ pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction

$$\left[t\mapsto\frac{e^{-t}}{x_n+t}\right]$$

est intégrable sur $[1,+\infty[$;

➔ pour tout $t\in[1,+\infty[$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-t}}{x_n+t}=0$$

➔ et pour tout $t\in[1,+\infty[$ et tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\frac{e^{-t}}{x_n+t}\right|\leqslant\frac{e^{-t}}{t},$$

où le majorant ne dépend pas de $n\in\mathbb{N}$ et est intégrable sur $[1,+\infty[$ (par **2.**).

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. D'après la caractérisation séquentielle des limites, cela signifie que la fonction f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Par conséquent, la fonction f est l'unique solution de (E) qui reste bornée au voisinage de $+\infty$.

Solution II ❁ Les polynômes de Legendre

1. Comme PQ est continue sur le segment $[-1,1]$, l'intégrale a bien un sens et on en déduit facilement que φ est une forme bilinéaire et symétrique sur E.

Comme P^2 est une fonction continue et positive sur $[-1,1]$, son intégrale est positive et elle est nulle si, et seulement si, $P^2(t)=0$ pour tout $t\in[-1,1]$. Comme P est un polynôme, c'est alors le polynôme nul. Donc φ est définie positive.

2. Il est clair que $f(P)$ est un polynôme. De plus,

$$\begin{aligned}\deg\big[f(P)\big] &\leqslant \deg\big[(X^2-1)P'\big]-1\\ &\leqslant 2+\deg(P')-1\\ &\leqslant 1+\big[\deg(P)-1\big]\end{aligned}$$

donc

$$\forall\, P\in\mathbb{R}_n[X],\quad \deg\big[f(P)\big]\leqslant\deg(P) \tag{1}$$

et $f(P)\in\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$. Enfin, il est clair que f est linéaire, donc f est un endomorphisme de $E=\mathbb{R}_n[X]$.

❧ En intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\varphi\big(f(P),Q\big) &= \int_{-1}^{1}\frac{d\big[(t^2-1)P'(t)\big]}{dt}\,Q(t)\,dt\\ &= \big[(t^2-1)P'(t)Q(t)\big]_{-1}^{1}\\ &\quad -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,dt\\ &= -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,dt.\end{aligned}$$

L'expression trouvée étant symétrique en P et Q, on en déduit que f est un endomorphisme symétrique pour φ.

Remarque.— D'après (1), dans toute base échelonnée en degré, la matrice de f est triangulaire supérieure. Comme f est symétrique, cela prouve que toute base orthonormée pour φ qui est échelonnée en degré est en fait une base de vecteurs propres de f.

3. Si $f(P)=0$, alors $(X^2-1)P'=0$ et donc $P'=0$. On en déduit que le noyau de f est constitué des polynômes constants.

❧ Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $(n+1)$, alors $\operatorname{rg} f=n$ (théorème du rang).

4. a. Comme f est un endomorphisme symétrique,

$$E=\operatorname{Ker} f\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Im} f$$

donc le projeté orthogonal de P_0 sur $\operatorname{Im} f$ est égal à

$$Q_0=P-Q_1$$

où Q_1 est le projeté orthogonal de P_0 sur $\operatorname{Ker} f=\mathbb{R}\cdot 1$.

❧ D'après la formule du cours,

$$Q_1=\frac{\varphi(1,P_0)}{\varphi(1,1)}\,1=1$$

et finalement $Q_0=X$.

4. b. Lorsque P parcourt $\mathbb{R}_2[X]$, le polynôme $f(P)$ parcourt $\operatorname{Im} f$ et, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}\forall\, P\in\mathbb{R}_2[X],\quad &\big\|P_0-f(P)\big\|^2\\ &=\|P_0-Q_0\|^2+\big\|Q_0-f(P)\big\|^2.\end{aligned}\tag{2}$$

Comme $Q_0\in\operatorname{Im} f$, alors

$$\inf_{P\in\mathbb{R}_2[X]}\big\|P_0-f(P)\big\|=\|P_0-Q_0\|=\|1\|=\sqrt{2}.$$

4. c. Toujours d'après (2),

$$\big\|P_0-f(P)\big\|=m\iff f(P)=Q_0$$

et comme $f(X)=2X$, on déduit du principe de superposition que

$$\big\|P_0-f(P)\big\|=m\iff \exists\, a\in\mathbb{R},\quad P=a\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot X.$$

Remarque.— On peut traiter le **4.** (presque) sans théorie, tant les calculs sont simples :

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad \big\|P_0-f(a+bX)\big\|=\|1\|^2+(1-2b)^2\|X\|^2,$$

ce qui montre que $m=\|1\|$ et que ce minimum est atteint pour $b=1/2$ et a quelconque et donc pour $f(P)=X$.

5. a. $L_1=2X$, $L_2=12X^2-4$, $L_3=120X^3-72X$.

5. b. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, le degré de $(X^2-1)^k$ est égal à $2k\geqslant k$, donc $\deg(L_k)=2k-k=k$. Par ailleurs, $\deg(L_0)=0$. Donc

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad \deg(L_k)=k.$$

5. c. Quels que soient les polynômes P et Q, on sait que

$$(QP)^r=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}Q^{(k)}P^{(r-k)}.$$

Considérons $k\in\mathbb{N}^*$. D'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned}\big((X^2-1)P\big)^{(k+2)} &= (X^2-1)P^{(k+2)}+(k+2)(2X)P^{(k+1)}\\ &\quad+\binom{k+2}{2}(2)P^{(k)}\end{aligned}$$

(les autres termes étant nuls) donc

$$A_k=(X^2-1)L_k''+2(k+2)XL_k'+(k+1)(k+2)L_k.$$

De même,

$$\big(XP\big)^{(k+1)}=XP^{(k+1)}+(k+1)P^{(k)}$$

(les autres termes étant nuls) donc

$$B_k=XL_k'+(k+1)L_k.$$

Il est facile de vérifier que ces formules sont encore vraies pour $k=0$: elles sont donc vraies pour tout $k\in\mathbb{N}$.

5. d. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, d'après la formule de dérivation d'un produit,

$$\begin{aligned}A_k &= \big[2X(X^2-1)^k+2kX(X^2-1)^k\big]^{(k+1)}\\ &= 2(k+1)B_k\end{aligned}$$

et il est facile de vérifier que cette formule est encore vraie pour $k = 0$.

On peut alors déduire de la question précédente que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad (X^2 - 1)L_k'' + 2XL_k' - k(k+1)L_k = 0.$$

5. e. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$f(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$$

donc d'après la question précédente

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f(L_k) = k(k+1)L_k.$$

Comme $L_k \neq 0$ (son degré est égal à $k \in \mathbb{N}$), on en déduit que L_k est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $k(k+1)$.

5. f. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $k(k+1) < (k+1)(k+2)$, donc les polynômes L_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, sont associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Comme l'endomorphisme f est symétrique, on en déduit que la famille $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille orthogonale de E.

Comme il s'agit d'une famille orthogonale de $(n+1)$ vecteurs non nuls dans un espace de dimension $(n+1)$, il s'agit bien d'une base orthogonale de E.