Devoir de Mathématiques

Distribué le 27 janvier 2014

❖ Problème ❖

On note $\mathscr{C}([0,1])$, l'espace vectoriel des fonctions continues du segment $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on note φ_λ, l'élément de $\mathscr{C}([0,1])$ défini par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \varphi_\lambda(x) = x^\lambda.$$

Par convention, la fonction φ_0 est la fonction constante égale à 1.

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite de réels positifs et deux à deux distincts. On note W, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}([0,1])$ engendré par la famille

$$(\varphi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour l'une ou l'autre des normes classiques définies par

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} \left|f(x)\right|$$

et par

$$N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 \left|f(x)\right|^2 \, dx}.$$

1. Démontrer que la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda\geqslant 0}$ est une famille libre de $\mathscr{C}([0,1])$.

Partie A. Déterminants de Cauchy

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux familles $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de réels tels que

$$\forall\, 1 \leqslant j,k \leqslant n, \quad a_j + b_k \neq 0.$$

Pour tout entier $1 \leqslant m \leqslant n$, on note alors D_m, le déterminant de la matrice

$$\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant m} \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{R}),$$

dit **déterminant de Cauchy d'ordre** m.

On définit également la fraction rationnelle

$$R = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X - a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X + b_k)} \in \mathbb{R}(X).$$

2. Démontrer que si R est de la forme

$$R = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X + b_k},$$

alors

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}.$$

☞ *On pourra considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par*

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que

$$D_n = \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_i + b_j)}.$$

Partie B. Distance d'un point à une partie

Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé. On rappelle que la distance d'un point $x \in E$ à une partie non vide $A \subset E$ est le réel $d(x,A)$ défini par

$$d(x,A) = \inf_{y\in A} \|x - y\|.$$

On considère un sous-espace vectoriel V de dimension finie de E et on pose :

$$B = \left\{y \in E \ : \ \|y - x\| \leqslant \|x\|\right\}.$$

4. Démontrer que $d(x,A) = 0$ si, et seulement si, x est adhérent à A.

5. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante de parties de E et

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Démontrer que

$$d(x,A) = \lim_{n\to+\infty} d(x,A_n).$$

6. a. **Pour 5/2 uniquement.** Démontrer que $B \cap V$ est une partie compacte de E.

6. b. En déduire que

$$d(x,V) = d(x, B\cap V)$$

pour tout $x \in E$.

7. En déduire que, pour tout $x \in E$, il existe un élément y de V tel que

$$d(x,V) = \|x - y\|.$$

Partie C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie

Dans cette partie, E est un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et de la norme associée à ce produit scalaire.

8. Soit V, un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Démontrer que, pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur V est l'unique élément $y \in V$ tel que

$$d(x, V) = \|x - y\|.$$

Pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E, on désigne par $G(x_1, \dots, x_n)$, le déterminant de la **matrice de Gram** définie par

$$M(x_1, \dots, x_n) = \big((x_i \,|\, x_j) \big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

9. Démontrer que $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ si, et seulement si, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.

10. On suppose que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et on note V, le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille. Démontrer que

$$\big[d(x, V)\big]^2 = \frac{G(x_1, \dots, x_n, x)}{G(x_1, \dots, x_n)}$$

pour tout $x \in E$.

Partie D. Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de $\mathscr{C}([0,1])$, on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$, les adhérences de A relatives aux normes N_∞ et N_2 respectivement.

Pour $f \in \mathscr{C}([0,1])$, on note $d(f, A)$, la distance de f à A relative à la norme N_2 :

$$d(f, A) = \inf_{g \in A} N_2(f - g).$$

11. Démontrer que

$$\forall\, f \in \mathscr{C}([0,1]), \quad N_2(f) \leqslant N_\infty(f).$$

En déduire que

$$\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$$

pour toute partie A de $\mathscr{C}([0,1])$.

12. Démontrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel V de E est un sous-espace vectoriel fermé de E.

13. On considère l'ensemble

$$V_0 = \big\{ f \in \mathscr{C}([0,1]) \;:\; f(0) = 0 \big\}$$

et on rappelle que φ_0 désigne la fonction constante égale à 1.

13. a. Démontrer que $\varphi_0 \in \overline{V_0}^2$.

13. b. En déduire que V_0 est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour la norme N_2, mais pas pour la norme N_∞.

14. Démontrer qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathscr{C}([0,1])$ est dense pour la norme N_∞ si, et seulement si,

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \varphi_m \in \overline{V}^\infty.$$

15. En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathscr{C}([0,1])$ est dense pour la norme N_2 si, et seulement si,

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \varphi_m \in \overline{V}^2.$$

Partie E. Un critère de densité pour la norme N_2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n, l'espace vectoriel engendré par la famille finie

$$(\varphi_{\lambda_k})_{0 \leqslant k \leqslant n}.$$

16. Démontrer que le sous-espace vectoriel W est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour la norme N_2 si, et seulement si,

$$\forall\, \mu \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to +\infty} d(\varphi_\mu, W_n) = 0.$$

17. Démontrer que

$$d(\varphi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu + 1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$$

pour tout $\mu \geqslant 0$.

18. Soit $\mu \geqslant 0$. Démontrer que la suite

$$\Big(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \Big)_{k \in \mathbb{N}}$$

tend vers 1 si, et seulement si, $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

☞ *On pourra étudier les variations de*

$$\Big[x \mapsto \frac{\mu - x}{x + \mu + 1} \Big]$$

pour $x \in [0, \mu]$.

19. En déduire que l'espace W est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour la norme N_2 si, et seulement si, la série

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$$

est divergente.

Partie F. Un critère de densité pour la norme N_∞

20. On suppose que W est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour la norme N_∞. Démontrer que la série

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$$

est divergente.

21. Soit $\psi \in W_n$: on peut représenter un tel élément sous la forme

$$\psi = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_{\lambda_k}.$$

Démontrer que, si $\lambda_k \geqslant 1$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, alors

$$N_\infty(\varphi_\mu - \psi) \leqslant N_2\Big(\mu \varphi_{\mu - 1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \varphi_{\lambda_k - 1} \Big)$$

pour tout $\mu \geqslant 1$.

22. On suppose que $\lambda_0 = 0$, que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \lambda_k \geqslant 1 \tag{†}$$

et que la série

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{\lambda_k}$$

est divergente. Démontrer que W est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour la norme N_∞.

23. Démontrer que la conclusion reste valable si on substitue la condition

$$\inf_{k \geqslant 1} \lambda_k > 0 \tag{‡}$$

à la condition (†).

Solution ❁ Théorème de Müntz

1. Rappelons que, par définition : la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ est libre si, et seulement si, toute sous-famille *finie* est libre.

Considérons donc, pour un entier $n \geqslant 1$ arbitrairement choisi, une famille

$$0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$$

et une relation de liaison

$$\alpha_1\varphi_{\lambda_1} + \alpha_2\varphi_{\lambda_2} + \cdots + \alpha_n\varphi_{\lambda_n} = \omega.$$

Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, alors on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$ (si tel n'est pas le cas, on peut exclure certains vecteurs de cette famille et réindexer les vecteurs restants). Par conséquent,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad x^{\lambda_1} = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1}x^{\lambda_2} + \cdots + \frac{-\alpha_n}{\alpha_1}x^{\lambda_n}.$$

Comme $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$, alors le second membre est $o(x^{\lambda_1})$ au voisinage de 0, ce qui n'est pas cohérent avec le premier membre. CQFD

VARIANTE.— Soit u, l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ défini par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad u(f)(x) = xf'(x).$$

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, la fonction φ_λ est un vecteur propre de l'endomorphisme u, associé à la valeur propre λ. Comme des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants, on en déduit que la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ est libre.

Partie A. Déterminants de Cauchy

2. Il est clair que $R(a_1) = \cdots = R(a_{n-1}) = 0$. Par conséquent, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & R(a_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & R(a_{n-1}) \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_{n-1}} & R(a_n) \end{vmatrix}$$

est égal à

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0 \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_{n-1}} & R(a_n) \end{vmatrix} = R(a_n)D_{n-1}$$

en développant par la dernière colonne.

En supposant que la fraction rationnelle R admet un développement de la forme indiquée, on peut développer par la dernière colonne le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & R(a_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & R(a_{n-1}) \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_{n-1}} & R(a_n) \end{vmatrix}$$

pour trouver

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_1+b_k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_k} \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_n+b_k} \end{vmatrix}.$$

Pour $1 \leqslant k < n$, le déterminant est nul (la dernière colonne est égale à la k-ième colonne) et il ne reste donc que A_nD_n.

On a ainsi démontré que $A_nD_n = R(a_n)D_{n-1}$.

3. Si les réels b_k ne sont pas deux à deux distincts, alors D_n est nul (il y a deux colonnes égales) et la formule donnée par l'énoncé est nulle elle aussi.

❧ Supposons donc que les réels b_k sont deux à deux distincts. Dans ce cas, la fraction rationnelle R n'a que des pôles *simples* et admet donc une décomposition en éléments simples de la forme

$$R = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X + b_k}$$

où les A_k sont des réels déterminés par la méthode usuelle dans le cas d'une fraction à pôles simples. En particulier, A_n est la limite de $(x + b_n)R(x)$ lorsque x tend vers $-b_n$, c'est-à-dire

$$A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(-b_n - a_k)}{(b_k - b_n)} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(a_k + b_n)}{(b_n - b_k)} \neq 0$$

par hypothèse de l'énoncé.

On déduit alors de **2.** que

$$D_n = \left[\prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_n - b_k}{a_k + b_n}\right]\left[\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_n - a_k}{a_n + b_k}\right]\frac{D_{n-1}}{a_n + b_n}$$

et comme

$$D_1 = \frac{1}{a_1 + b_1},$$

on en déduit *par récurrence* la formule fournie par l'énoncé.

Partie B. Distance d'un point à une partie

4. Comme
$$d(x, A) = \inf_{y\in A} \|x - y\|,$$
il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\|x - y_n\|$ tende vers $d(x, A)$. Si $d(x, A) = 0$, alors $\|x - y_n\|$ tend vers 0, ce qui signifie que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et donc que x est adhérent à A.

Réciproquement, si x est adhérent à A, alors il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Comme une borne inférieure est un minorant, alors
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant d(x, A) = \inf_{y\in A} \|x - y\| \leqslant \|x - y_n\|$$
et comme $\|x - y_n\|$ tend vers 0, alors $d(x, A) = 0$ d'après le théorème d'encadrement.

REMARQUE.— Pour rédiger de façon satisfaisante une telle question de cours, il faut faire apparaître clairement la manière dont on traduit chaque hypothèse : sauter une étape revient à admettre le résultat !

5. Plus l'ensemble des paramètres est grand, plus la borne inférieure est petite (et plus la borne supérieure est grande, mais là n'est pas la question). Ici, $A_n \subset A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad d(x, A) \leqslant d(x, A_n).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $d(x, A)$ comme borne inférieure, il existe $y_\varepsilon \in A$ tel que
$$d(x, A) \leqslant \|x - y_\varepsilon\| \leqslant d(x, A) + \varepsilon.$$
Par définition de A, il existe donc un entier n_0 tel que $y_\varepsilon \in A_{n_0}$ et par conséquent $y_\varepsilon \in A_n$ pour tout $n \geqslant n_0$. En particulier,
$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad d(x, A_n) = \inf_{y\in A_n} \|x - y\| \leqslant \|x - y_\varepsilon\|$$
et finalement
$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0, \quad d(x, A) \leqslant d(x, A_n) \leqslant d(x, A) + \varepsilon.$$
Comme $\varepsilon > 0$ a été arbitrairement choisi, cela signifie que $d(x, A_n)$ tend vers $d(x, A)$ (par valeurs supérieures).

6. a. La partie $B \cap V$ est bornée en tant que partie contenue dans la boule B, qui est bornée (comme toutes les boules). Elle est fermée en tant qu'intersection de deux fermés : la boule fermée B et le sous-espace V de dimension finie.

En tant que partie fermée et bornée de l'espace de dimension finie V, c'est une partie compacte de V et donc une partie compacte de E.

6. b. Comme $B \cap V \subset V$, alors $d(x, V) \leqslant d(x, B \cap V)$ (cf **5.**).

Réciproquement, comme $V = (B\cap V)\cup(B^c \cap V)$, donc
$$d(x, V) = \min\big\{\inf_{y\in B\cap V} \|x - y\|,\ \inf_{y\in B^c\cap V} \|x - y\|\big\}.$$
Comme V est un espace vectoriel, V contient le vecteur nul, donc
$$d(x, V) = \inf_{y\in V} \|x - y\| \leqslant \|x - 0_E\| = \|x\|.$$
Si $y \in B^c \cap V$, alors $\|x - y\| > \|x\| \geqslant d(x, V)$, donc
$$d(x, V) = \inf_{y\in B\cap V} \|x - y\| = d(x, B \cap V).$$

REMARQUE.— Il peut arriver que $B \cap V$ soit réduit à un point : si E est un espace euclidien et si x est orthogonal à V, alors le projeté orthogonal de x sur V est le vecteur nul, donc $B \cap V = \{0_E\}$ et $d(x, V) = \|x\|$.

7. La fonction $[y \mapsto \|x - y\|]$ est continue (elle est lipschitzienne d'après l'inégalité triangulaire), donc elle atteint un minimum sur le compact $B \cap V$: il existe donc un élément y_0 de $B \cap V \subset V$ tel que
$$d(x, V) = \inf_{y\in B\cap V} \|x - y\| = \|x - y_0\|.$$

VARIANTE.— Comme $d(x, V)$ est une borne inférieure, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $B \cap V$ telle que $\|x - u_n\|$ converge vers $d(x, V)$. Comme $B \cap V$ est compacte, il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $y_0 \in B \cap V$ et, par continuité de la norme,
$$\|x - y_0\| = \lim_{n\to+\infty} \|x - u_{\varphi(n)}\| = \lim_{n\to+\infty} \|x - u_n\| = d(x, V).$$

Partie C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie

8. Comme V est un sous-espace de dimension *finie*, le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur V est bien défini.

Par **7.**, il existe $y_0 \in V$ tel que
$$\|x - y_0\| = d(x, V) \geqslant \big\|x - p(x)\big\|$$
puisque $p(x) \in V$. Comme $x - p(x)$ est orthogonal à V, alors
$$\|x - y_0\|^2 = \big\|x - p(x)\big\|^2 + \big\|p(x) - y_0\big\|^2$$
d'après le théorème de Pythagore. Si $y_0 \neq p(x)$, alors $\|p(x) - y_0\| > 0$ donc $\|x - y_0\| > \|x - p(x)\|$, ce qui contredit l'inégalité précédente.

Par conséquent, le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur V est l'unique élément $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$.

9. On note M au lieu de $M(x_1, \dots, x_n)$.

❧ Si $G(x_1, \dots, x_n) = 0$, alors la matrice carrée M n'est pas inversible et il existe une matrice colonne *non nulle*
$$U = \langle\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \,\rangle \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$
telle que $MU = 0$ et donc telle que
$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \Big\|^2 = {}^tUMU = 0.$$
On en déduit que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_E$ et donc que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée (puisque les α_k ne sont pas tous nuls).

❧ Réciproquement, si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors il existe une famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de scalaires non tous nuls telle que
$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_E.$$

Par linéarité à droite du produit scalaire, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_j\,(\,x_i\,|\,x_j\,) = \Big(x_i \,\Big|\, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\Big) = 0$$

ce qui signifie que la matrice colonne (non nulle)

$$U = \langle\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \,\rangle$$

vérifie $MU = 0$. Par suite, la matrice M n'est pas inversible et son déterminant est nul.

10. Par **8.**,

$$\begin{aligned} d(x,V)^2 = \big\|x - p(x)\big\|^2 &= \big(\,x - p(x) + p(x)\,\big|\,x - p(x)\,\big) \\ &= \big(\,x\,\big|\,x - p(x)\,\big) \\ &= \|x\|^2 - \big(\,x\,\big|\,p(x)\,\big) \end{aligned}$$

puisque $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux.

Comme $p(x) \in V$, il existe des scalaires λ_1, ..., λ_n tels que

$$p(x) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

et comme l'opération

$$C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k C_k$$

ne modifie pas la valeur d'un déterminant, on en déduit que le déterminant $G(x_1, \dots, x_n, x)$, égal à

$$\begin{vmatrix} (\,x_1\,|\,x_1\,) & \cdots & (\,x_1\,|\,x_n\,) & (\,x_1\,|\,x\,) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\,x_n\,|\,x_1\,) & \cdots & (\,x_n\,|\,x_n\,) & (\,x_n\,|\,x\,) \\ (\,x\,|\,x_1\,) & \cdots & (\,x\,|\,x_n\,) & (\,x\,|\,x\,) \end{vmatrix}$$

est aussi égal à

$$\begin{vmatrix} (\,x_1\,|\,x_1\,) & \cdots & (\,x_1\,|\,x_n\,) & (\,x_1\,|\,x - p(x)\,) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\,x_n\,|\,x_1\,) & \cdots & (\,x_n\,|\,x_n\,) & (\,x_n\,|\,x - p(x)\,) \\ (\,x\,|\,x_1\,) & \cdots & (\,x\,|\,x_n\,) & (\,x\,|\,x - p(x)\,) \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire à

$$\begin{vmatrix} (\,x_1\,|\,x_1\,) & \cdots & (\,x_1\,|\,x_n\,) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\,x_n\,|\,x_1\,) & \cdots & (\,x_n\,|\,x_n\,) & 0 \\ (\,x\,|\,x_1\,) & \cdots & (\,x\,|\,x_n\,) & \big\|x - p(x)\big\|^2 \end{vmatrix}$$

puisque le vecteur $x - p(x)$ est orthogonal à V, il est orthogonal aux vecteurs x_1, ..., x_n qui engendrent V. En développant par la dernière colonne, on en déduit que

$$G(x_1, \dots, x_n, x) = \big\|x - p(x)\big\|^2 G(x_1, \dots, x_n).$$

Comme la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, le déterminant $G(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas nul (par **9.**), ce qui permet d'en déduire la distance de x à V.

Partie D. Comparaison des normes N_∞ et N_2

11. Toute fonction continue sur un segment est bornée, donc $N_\infty(f)$ est bien définie et c'est un majorant de $|f|$, donc

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t)\big|^2 \leqslant N_\infty(f)^2.$$

Sur le segment $[0,1]$, les fonctions continues et en particulier les fonctions constantes sont intégrables, donc

$$\int_0^1 \big|f(t)\big|^2\,dt \leqslant \int_0^1 N_\infty(f)^2\,dt = N_\infty(f)^2$$

et finalement

$$\forall\, f \in \mathscr{C}([0,1]), \quad N_2(f) \leqslant N_\infty(f).$$

❧ Soit A, une partie de $\mathscr{C}([0,1])$ et g, un point adhérent à A pour la norme N_∞. Il existe donc une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à A telles que $N_\infty(g - f_n)$ tende vers 0.

D'après l'inégalité établie ci-dessus,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant N_2(g - f_n) \leqslant N_\infty(g - f_n)$$

donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g pour la norme N_2, ce qui prouve que g appartient aussi à l'adhérence de A pour N_2.

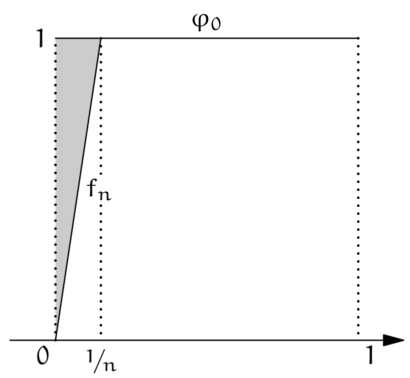
12. On sait que l'adhérence d'une partie quelconque de E est une partie fermée de E.

L'adhérence de V est donc une partie fermée de l'espace vectoriel E, qui n'est pas vide (elle contient V). Il reste à vérifier que cette adhérence est stable par combinaison linéaire.

Soient f et g, deux points adhérents à V : il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent respectivement vers f et g. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda f + g$, donc $\lambda f + g$ appartient bien à l'adhérence de V.

Ainsi, l'adhérence d'un sous-espace de E est un sous-espace fermé de E.

13. a. Une figure suggère de considérer les fonctions f_n définies par $f_n(t) = nt$ pour $t \in [0, 1/n]$ et $f_n(t) = 1$ pour $t \in [1/n, 1]$: ces fonctions sont affines par morceaux et continues sur $[0,1]$ (la fonction f_n est continue à gauche et à droite en $t = 1/n$).



On vérifie la justesse de la figure par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \big|\varphi_0(t) - f_n(t)\big|^2\,dt &= \int_0^{1/n} (1 - nt)^2\,dt \\ &= \frac{1}{n}\int_0^1 u^2\,du = \frac{1}{3n} \end{aligned}$$

en posant $u = 1 - nt$. La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge donc vers φ_0 pour la norme N_2.

13. b. Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$. Comme

$$f = \big[f(0)\cdot\varphi_0\big] + \big[f - f(0)\cdot\varphi_0\big],$$

la fonction f est une combinaison lin'eaire d'une fonction (φ_0) qui appartient à l'adhérence de V_0 pour la norme N_2 et d'une fonction qui appartient à V_0 et donc à l'adhérence de V_0.

Comme V_0 est un espace vectoriel, son adhérence pour la norme N_2 est encore un espace vectoriel (**12.**), donc f appartient à l'adhérence de V_0 pour N_2. Ainsi, le sous-espace V_0 est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour N_2.

❧ Pour tout $f \in V_0$,

$$\begin{aligned} N_\infty(f-\varphi_0) &= \sup_{t\in[0,1]} \big|f(t)-\varphi_0(t)\big| \\ &\geqslant \big|f(0)-\varphi_0(0)\big| = 1. \end{aligned}$$

Il est donc impossible qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V_0 converge vers $\varphi_0 \in \mathscr{C}([0,1])$ pour la norme N_∞. Cela démontre que V_0 n'est pas dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour N_∞.

14. Supposons que V soit dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour une norme N. Comme les fonctions φ_m sont continues sur $[0,1]$, il faut que les fonctions φ_m appartiennent à l'adhérence de V pour la norme N (quel que soit $m \in \mathbb{N}$).

Cette condition nécessaire vaut tant pour la norme $N = N_\infty$ que pour la norme $N = N_2$.

❧ Réciproquement, supposons que φ_m appartienne à $\overline{V}^\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Par **12.**, l'adhérence de V est stable par combinaison linéaire, donc toute fonction polynomiale sur $[0,1]$ appartient à $\overline{V}^\infty$.

D'après le théorème de Weierstrass, toute fonction f continue sur $[0,1]$ est limite pour la norme N_∞ d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales.

Comme $\overline{V}^\infty$ est fermée (**12.**), la limite f de la suite convergente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient encore à V^∞.

Ainsi, V est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour la norme N_∞.

15. La nécessité de cette condition a été justifiée à la question précédente.

❧ Par **14.**, cette condition est suffisante pour que V soit dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour la norme N_∞. Par **11.**,

$$\mathscr{C}([0,1]) = \overline{V}^\infty \subset \overline{V}^2 \subset \mathscr{C}([0,1])$$

donc V est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour la norme N_2.

Partie E. Un critère de densité pour la norme N_2

16. La norme N_2 est associée au produit scalaire

$$(\,f\,|\,g\,) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

si bien qu'on peut appliquer les résultats de la partie C avec $\|\cdot\| = N_2$.

❧ Les sous-espaces vectoriels W_n forment une suite croissante de parties de $\mathscr{C}([0,1])$ telles que

$$W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n.$$

Par **5.**,

$$\forall\,\mu\in\mathbb{N},\quad d(\varphi_\mu, W) = \lim_{n\to+\infty} d(\varphi_\mu, W_n)$$

et par **4.**,

$$\forall\,\mu\in\mathbb{N},\quad d(\varphi_\mu, W) = 0 \iff \varphi_\mu \in \overline{W}^2.$$

Enfin, par **15.**, le sous-espace W est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour la norme N_2 si, et seulement si, $\varphi_\mu \in \overline{W}^2$ pour tout $\mu \in \mathbb{N}$.

Ainsi, le sous-espace W est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour N_2 si, et seulement si,

$$\forall\,\mu\in\mathbb{N},\quad \lim_{n\to+\infty} d(\varphi_\mu, W_n) = 0.$$

17. En tant que famille extraite d'une famille libre (**1.**), la famille $(\varphi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre et, d'après **10.**,

$$d(\varphi_\mu, W_n) = \sqrt{\frac{G(\varphi_{\lambda_1},\ldots,\varphi_{\lambda_n},\varphi_\mu)}{G(\varphi_{\lambda_1},\ldots,\varphi_{\lambda_n})}}$$

et (quelle surprise...)

$$\forall\,a,b\in\mathbb{R}_+,\quad (\,\varphi_a\,|\,\varphi_b\,) = \int_0^1 t^a t^b\,dt = \frac{1}{a+b+1}.$$

Les déterminants de Gram à calculer sont donc des déterminants de Cauchy avec

$$\forall\,1\leqslant i\leqslant n,\quad a_i = b_i = \lambda_i + \frac{1}{2}.$$

En appliquant avec $a_n = b_n = \mu + 1/2$ (et en décalant d'un cran les indices) la formule de récurrence entre D_n et D_{n-1} établie au **3.**, on obtient

$$\frac{G(\varphi_{\lambda_1},\ldots,\varphi_{\lambda_n},\varphi_\mu)}{G(\varphi_{\lambda_1},\ldots,\varphi_{\lambda_n})} = \frac{1}{(2\mu+1)}\prod_{k=1}^{n}\frac{(\mu-\lambda_k)^2}{(\lambda_k+\mu+1)^2}.$$

En prenant la racine carrée, on doit faire apparaître une valeur absolue au numérateur (le signe de $(\lambda_k - \mu)$ est inconnu) mais pas au dénominateur (puisque $\lambda_k+\mu+1 > 0$).

REMARQUE.— La formule donnée par l'énoncé au **3.** ne *sert strictement à rien* ici, seule la relation de récurrence est vraiment utile...

18. Il est clair que : si $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors la suite

$$\Big(\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\Big)_{k\in\mathbb{N}}$$

tend vers 1 (limite à l'infini d'une fonction rationnelle).

❧ La fonction $u = \Big[x \mapsto \frac{\mu-x}{x+\mu+1}\Big]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ (en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et strictement décroissante (le numérateur est strictement décroissant, le dénominateur est strictement croissant *et strictement positif*). De plus, elle est nulle en $x = \mu$ et tend vers -1 au voisinage de $+\infty$.

Par suite, la fonction $|u|$ réalise une bijection de $[0,\mu]$ sur $[0, \mu/\mu+1]$ et une bijection de $[\mu,+\infty[$ sur $[0,1[$. La réciproque de cette seconde bijection, que nous noterons ν, tend vers $+\infty$ au voisinage de 1.

❧ Si la suite $(|u(\lambda_k)|)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1, alors il existe un rang N_0 tel que

$$\forall\, k \geqslant N_0, \quad \frac{\mu}{\mu+1} \leqslant \big|u(\lambda_k)\big| < 1$$

et d'après l'étude précédente de u

$$\forall\, k \geqslant N_0, \quad \lambda_k \geqslant \mu$$

donc

$$\forall\, k \geqslant N_0, \quad \lambda_k = \nu\big(\big|u(\lambda_k)\big|\big).$$

Comme ν tend vers $+\infty$ au voisinage de 1, on déduit du théorème de composition des limites que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

19. D'après l'étude de u au **18.**, la quantité $d(\varphi_\mu, W_n)$ est un produit de réels compris entre 0 (inclus) et 1 (exclus). Par conséquent, c'est une expression positive et décroissante en fonction de n : cette quantité admet une limite positive et nous cherchons maintenant si cette limite est nulle ou strictement positive.

❧ Si un entier μ est l'un des λ_k, alors φ_μ appartient à W et donc à l'adhérence de W. Dans tout ce qui suite, on suppose que l'entier μ n'est pas un terme de la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

❧ **Premier cas :** Supposons que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $+\infty$. Dans ce cas, il existe $0 < r < 1$ et une suite extraite $(\lambda_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{|\lambda_{\psi(k)} - \mu|}{\lambda_{\psi(k)} + \mu + 1} \leqslant r.$$

Par conséquent, puisque tous les facteurs sont compris entre 0 et 1,

$$0 \leqslant \prod_{k=0}^{\psi(n)} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \leqslant \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_{\psi(k)} - \mu|}{\lambda_{\psi(k)} + \mu + 1} \leqslant r^{n+1}$$

et $d(\varphi_\mu, W_n)$ tend vers 0 (puisque cette suite convergente admet une suite extraite de limite nulle).

Dans ce cas, la série $\sum 1/\lambda_k$ est grossièrement divergente.

❧ **Deuxième cas :** Supposons que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$. La distance $d(\varphi_\mu, W_n)$ tend vers 0 si, et seulement si, son logarithme tend vers $-\infty$, ce qui revient à dire que la série *de terme général négatif*

$$\sum \ell n \frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1}$$

est divergente.

Comme il s'agit d'une série dont le terme général est de signe constant, il suffit de calculer un équivalent du terme général pour caractériser la nature de cette série.

Comme $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, on peut supposer que k est assez grand pour que $\lambda_k > \mu$ et donc que

$$\ell n \frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1} = \ell n\Big(1 - \frac{\mu}{\lambda_k}\Big) - \ell n\Big(1 + \frac{\mu+1}{\lambda_k}\Big) \sim \frac{-(2\mu+1)}{\lambda_k}.$$

Par conséquent, les séries

$$\sum \ell n \frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{\lambda_k}$$

sont de même nature.

❧ **Conclusion :** Par **16.**, **17.** et **18.**, l'espace W est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour la norme N_2 si, et seulement si, la série $\sum 1/\lambda_k$ est divergente.

Partie F. Un critère de densité pour la norme N_∞

20. Par **11.**, si W est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour N_∞, alors W est aussi dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour N_2 et, dans ce cas, la série $\sum 1/\lambda_k$ est divergente d'après **19.**

21. Si $\lambda \geqslant 1$, alors φ_λ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et

$$(\varphi_\lambda)' = \lambda\, \varphi_{\lambda-1}.$$

Comme $\mu \geqslant 1$ et $\lambda_k \geqslant 1$ pour tout k, alors $\varphi_\mu(0) = \psi(0) = 0$ et on déduit du théorème fondamental de l'Analyse que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad (\varphi_\mu - \psi)(x) = \int_0^x \mu\varphi_{\mu-1}(t) - \psi'(t)\, dt$$

et de l'inégalité de la moyenne que

$$\begin{aligned}\forall\, x \in [0,1], \quad \big|(\varphi_\mu - \psi)(x)\big| &\leqslant \int_0^x \big|\mu\varphi_{\mu-1}(t) - \psi'(t)\big|\, dt \\ &\leqslant \int_0^1 \big|\mu\varphi_{\mu-1}(t) - \psi'(t)\big|\, dt\end{aligned}$$

(puisque l'intégrande est positif sur $[0,1]$). En appliquant l'inégalité de Schwarz au second membre, on obtient

$$\int_0^1 \big|\mu\varphi_{\mu-1}(t) - \psi'(t)\big|\, dt \leqslant N_2(\mu\varphi_{\mu-1} - \psi')N_2(\mathbb{1}).$$

Comme $N_2(\mathbb{1}) = 1$, on en déduit que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \big|(\varphi_\mu - \psi)(x)\big| \leqslant N_2(\mu\varphi_{\mu-1} - \psi')$$

et donc, en passant à la borne supérieure, que

$$N_\infty(\varphi_\mu - \psi) \leqslant N_2(\mu\varphi_{\mu-1} - \psi')$$

ce qui est bien l'inégalité cherchée.

22. Il existe au plus un k tel que $\lambda_k = 1$: nous supposerons donc dans la suite que k est assez grand pour que $\lambda_k > 1$.

❧ Comme la série $\sum 1/\lambda_k$ est divergente, deux cas se présentent :

Ou bien cette série est grossièrement divergente et, dans ce cas, la série $\sum 1/\lambda_k - 1$ est aussi grossièrement divergente :

$$\frac{1}{\lambda_k - 1} > \frac{1}{\lambda_k} > 0.$$

Ou bien son terme général tend vers 0 et, dans ce cas,

$$\frac{1}{\lambda_k - 1} \sim \frac{1}{\lambda_k}$$

et, comme il s'agit de deux séries *de termes généraux positifs*, la série $\sum 1/\lambda_k - 1$ est divergente.

Dans les deux cas, d'après **19.**, le sous-espace engendré par les $\varphi_{\lambda_k - 1}$ est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour la norme N_2.

❧ Soit $\mu \in \mathbb{N}$.

Comme $\lambda_0 = 0$, alors $\varphi_0 = \varphi_{\lambda_0} \in W$.

Supposons $\mu \geqslant 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n et des scalaires $b_0, \ldots, b_n$ tels que

$$N_2\Big(\varphi_{\mu-1} - \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_{\lambda_k - 1}\Big) \leqslant \frac{\varepsilon}{\mu}.$$

Par **21.**,

$$N_\infty\Big(\varphi_\mu - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu b_k}{\lambda_k}\varphi_{\lambda_k}\Big) \leqslant \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement choisi, cela signifie que φ_μ est adhérent à W pour N_∞.

Ainsi, φ_μ est adhérent à W pour N_∞ quel que soit $\mu \in \mathbb{N}$. Par **14.**, l'adhérence de W pour N_∞ est donc égale à $\mathscr{C}([0,1])$.

23. Le changement de variable $t = x^\alpha$ va nous donner la solution !

- Pour tout $\alpha > 0$, l'application $[x \mapsto x^\alpha]$ est une bijection continue de $[0,1]$ sur $[0,1]$, donc

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1]} \Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_{\lambda_k}(x)\Big| &= \sup_{x\in[0,1]} \Big|f(x^\alpha) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_{\lambda_k}(x^\alpha)\Big| \\ &= \sup_{x\in[0,1]} \Big|f_\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_{\alpha\lambda_k}(x)\Big|\end{aligned}$$

où f_α est la fonction *continue* définie par $f_\alpha(x) = f(x^\alpha)$.

Les égalités précédentes montrent que : si la famille $(\varphi_{\alpha\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour N_∞, alors la famille $(\varphi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour N_∞.

- Si $\inf_{k\geqslant 1} \lambda_k > 0$, alors

$$\forall\, \alpha > \frac{1}{\inf_{k\geqslant 1} \lambda_k},\ \forall\, k \geqslant 1, \quad \alpha\lambda_k > 1$$

donc la famille $(\varphi_{\alpha\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour N_∞ par **22.** et finalement la famille $(\varphi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi dense dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour N_∞.