Devoir de Mathématiques

Pour le 6 janvier 2015

❖ Problème ❖

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Il existe donc une suite réelle $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^n.$$

Un réel $\alpha > 0$ étant fixé, on considère l'équation différentielle suivante.

$$xy' + \alpha y = F(x) \qquad (\mathcal{E}_\alpha)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène

$$xy' + \alpha y = 0$$

sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ qui ne contient pas 0.

2. On pose

$$I =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\,.$$

2. a. L'ensemble I est-il un intervalle ?

2. b. Résoudre l'équation différentielle homogène

$$xy' + \alpha y = 0$$

sur I.

2. c. Quelles sont les solutions sur I de cette équation différentielle qui admettent une limite finie au voisinage de 0 ?

3. **Pour 5/2 uniquement.** Soient a et b, deux réels.

Démontrer qu'il existe une, et une seule, application $f : I \to \mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\alpha)$ sur I et telle que

$$f(-1) = a \quad \text{et} \quad f(1) = b.$$

4. Démontrer que l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\alpha)$ admet au plus une solution sur I ayant une limite finie au voisinage de 0.

5. On considère une fonction f, développable en série entière au voisinage de 0. Il existe donc une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $R > 0$ tels que

$$\forall\, x \in]-R, R[\,, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

5. a. On suppose que f est une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\alpha)$ sur $]-R, R[$. Exprimer les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction des coefficients $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que peut-on dire alors de R ?

5. b. Démontrer réciproquement que l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\alpha)$ admet une, et une seule, solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

☞ *On introduira la fonction g définie par*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n+\alpha} x^n$$

en commençant par déterminer son ensemble de définition.

5. c. Préciser le résultat de la question **4.**

6. Dans cette question, on suppose que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = e^x$$

et on pose

$$\forall\, x \in]0, +\infty[\,, \quad h(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} e^t \, dt.$$

6. a. Vérifier que h est bien définie sur $]0, +\infty[$.

6. b. Vérifier que h est bien une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\alpha)$ sur $]0, +\infty[$.

6. c. Démontrer que h admet une limite finie au voisinage de 0 et préciser la valeur de cette limite.

6. d. En déduire que

$$\forall\, x > 0, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+\alpha)n!}.$$

e3a 2007 MP 2 (exercice 1)

Solution ❀ Résolution d'une équation différentielle

1. Comme l'intervalle J ne contient pas 0, l'équation de l'énoncé équivaut à l'équation suivante.

$$y' + \frac{\alpha}{x} y = 0$$

Le cours donne la formule générale des solutions de ce type d'équation (linéaire, homogène, du premier ordre) : y est une solution de cette équation sur l'intervalle J si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in J, \quad y(x) = K \exp(-\alpha \ln|x|) = \frac{K}{x^\alpha}.$$

2. a. L'ensemble I n'est pas un intervalle. En effet, $1 \in I$, $-1 \in I$, mais $0 \notin I$ alors que $-1 < 0 < 1$.

2. b. On connaît depuis **1.** la forme générale des solutions sur l'intervalle $I_+ =]0, +\infty[$ (qui ne contient pas 0) et celle des solutions sur l'intervalle $I_- =]-\infty, 0[$ (qui ne contient pas non plus 0). On en déduit que, si $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ est une solution sur I, alors il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que

$$\forall\, x < 0, \quad y(x) = \frac{K_1}{|x|^\alpha}, \quad \text{et} \quad \forall\, x > 0, \quad y(x) = \frac{K_2}{x^\alpha}.$$

La réciproque est évidente : toute fonction y de la forme précédente est une solution sur I.

REMARQUE.— En particulier, il faut remarquer que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 2 (alors même que l'équation est du premier ordre).

2. c. Comme $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|^\alpha} = +\infty.$$

Par conséquent, une solution y sur I est bornée au voisinage de 0 si, et seulement si, les deux constantes K_1 et K_2 sont nulles.

La fonction nulle est donc la seule solution sur I qui soit bornée au voisinage de 0.

3. Comme $I = I_- \cup I_+$, une fonction $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ est une solution de $(\mathcal{E}_\alpha)$ sur I si, et seulement si, les restrictions de y à I_- et à I_+ sont des solutions de $(\mathcal{E}_\alpha)$ sur I_- et sur I_+ (respectivement).

L'équation $(\mathcal{E}_\alpha)$ est une équation linéaire du premier ordre sur l'intervalle I_- et $-1 \in I_-$. Cette équation admet donc une seule solution sur I_- telle que $y(-1) = a$ (théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire).

De même, I_+ est un intervalle qui contient 1. L'équation $(\mathcal{E}_\alpha)$ admet une seule solution sur I_+ telle que $y(1) = b$.

Ainsi, l'équation $(\mathcal{E}_\alpha)$ admet une, et une seule, solution sur I telle que $y(-1) = a$ et $y(1) = b$.

4. Si deux solutions g_1 et g_2 de $(\mathcal{E}_\alpha)$ sur I ont une limite finie en 0, alors leur différence

$$f = g_1 - g_2$$

a une limite finie en 0 et est une solution sur I de l'équation homogène. Par **2.b.**, la fonction f est identiquement nulle, donc $g_1 = g_2$.

5. a. Comme $R > 0$, la fonction f est indéfiniment dérivable terme à terme sur $]-R, R[$. Donc

$$\forall\, x \in]-R, R[, \quad xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$$

et l'équation $(\mathcal{E}_\alpha)$ se traduit alors par

$$\forall\, x \in]-R, R[, \quad \alpha a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n a_n + \alpha a_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^n.$$

Comme $R > 0$, on peut identifier terme à terme les deux développements en série entière :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n + \alpha) a_n = \beta_n$$

et comme $\alpha > 0$, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{\beta_n}{n + \alpha}.$$

REMARQUE.— Il est fondamental de comprendre que l'hypothèse $(R > 0)$ sert deux fois : une première fois pour justifier la dérivabilité terme à terme ; une seconde fois pour justifier l'identification terme à terme des deux développements.

❧ D'après les calculs précédents, *la seule* solution développable en série entière au voisinage de 0 *possible* est la somme de la série entière

$$\sum \frac{\beta_n}{n + \alpha} x^n.$$

L'équation $(\mathcal{E}_\alpha)$ admet donc *au plus une* solution développable en série entière au voisinage de 0.

❧ Il est clair que $a_n = o(\beta_n)$ et comme le rayon de convergence de la série entière $\sum \beta_n x^n$ est infini par hypothèse, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est infini lui aussi.

5. b. Comme on l'a vu plus haut, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et dérivable terme à terme sur $\mathbb{R}$, si bien que

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad xg'(x) + \alpha g(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \Big(\frac{n}{n + \alpha} + \frac{\alpha}{n + \alpha} \Big) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^n = F(x), \end{aligned}$$

donc la fonction g est bien une solution, développable en série entière sur $\mathbb{R}$ par définition, de l'équation $(\mathcal{E}_\alpha)$.

L'unicité d'une telle solution ayant été démontrée plus haut, le résultat est établi.

5. c. Une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ est en particulier continue en 0. L'équation $(\mathcal{E}_\alpha)$ admet donc une solution sur I qui a une limite finie au voisinage de 0.

D'après **4.**, l'équation $(\mathcal{E}_\alpha)$ admet une, et une seule, solution sur I qui a une limite finie au voisinage de 0.

6. La fonction exp est développable en série entière sur $\mathbb{R}$: on peut donc appliquer ce qui précède avec

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \beta_n = \frac{1}{n!}.$$

6. a. Soit $x > 0$. La fonction $\left[t \mapsto t^{\alpha-1}e^t\right]$ est continue sur $]0, x]$, équivalente à $t^{\alpha-1}$ au voisinage de 0 et comme $\alpha > 0$, elle est intégrable sur $]0, x]$. La fonction h est donc bien définie sur $]0, +\infty[$.

6. b. Comme la fonction $\left[t \mapsto t^{\alpha-1}e^t\right]$ est continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable au voisinage de 0, la fonction

$$\left[x \mapsto \int_0^x t^{\alpha-1}e^t\, dt\right]$$

est, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la primitive qui tend vers 0 au voisinage de 0 de la fonction

$$\left[x \mapsto x^{\alpha-1}e^x\right].$$

Par conséquent, la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned}\forall\, x \in\,]0, +\infty[, \quad h'(x) &= \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} \int_0^x t^{\alpha-1}e^t\, dt + \frac{e^x}{x} \\ &= -\frac{\alpha}{x}h(x) + \frac{e^x}{x},\end{aligned}$$

donc h est bien une solution de $(\mathcal{E}_\alpha)$ sur $]0, +\infty[$.

6. c. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0, 1]$ à la fonction exp. Alors

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad 0 \leqslant e^t - 1 \leqslant t \sup_{s\in[0,1]} \left|\exp(s)\right| = et.$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$0 \leqslant h(x) - \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1}\, dt \leqslant \frac{e}{x^\alpha}\int_0^x t^\alpha\, dt$$

pour tout $0 < x \leqslant 1$ et donc que

$$\forall\, x \in\,]0, 1], \quad \frac{1}{\alpha} \leqslant h(x) \leqslant \frac{1}{\alpha} + \frac{ex}{\alpha+1}.$$

Par conséquent, la fonction h tend vers $1/\alpha$ au voisinage de 0.

REMARQUE.— La fonction $d_{x,\alpha}$ définie par

$$\forall\, t \in\,]0, x[, \quad d_{x,\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha x^\alpha}$$

et $d_{x,\alpha}(t) = 0$ pour tout $t \geqslant x$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$. Comme

$$\int_0^{+\infty} d_{x,\alpha}(t)\, dt = 1,$$

c'est une densité de probabilité sur $]0, +\infty[$ et $h(x)$ est la moyenne de la fonction exp relative à la densité $d_{x,\alpha}$. La propriété établie dans cette question est alors une conséquence du fait que la densité $d_{x,\alpha}$ converge (en tant que densité de probabilité) vers la masse de Dirac en 0 lorsque x tend vers 0 (convergence étroite des mesures de probabilité sur $]0, +\infty[$).

On peut en effet obtenir le résultat voulu en exploitant seulement le fait que exp est continue en 0 (au lieu de l'inégalité de Taylor-Lagrange).

6. d. D'après **4.**, la fonction h est *l'unique* solution de $(\mathcal{E}_\alpha)$ sur $]0, +\infty[$ ayant une limite finie au voisinage de 0. D'après **5.**, c'est donc la restriction à $]0, +\infty[$ de l'unique solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\forall\, x > 0, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+\alpha)n!}.$$