Devoir de Mathématiques

Pour le 13 janvier 2015

❖ Problème ❖

Partie A.

On considère la fonction L définie par

$$L(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.$$

1. Préciser l'ensemble de définition de $L(x)$ et expliciter $L(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

2. Démontrer avec soin que L est continue sur $]-1,1]$. En déduire que $L(1) = \ln 2$.

Partie B. Un cas particulier

On considère la suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ définie par

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad a_n = \left| \begin{array}{l} -2/n \text{ si } n = 0 \pmod 3, \\ 1/n \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

3. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{k=p+1}^{3p} \frac{1}{k} = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{2p} \frac{1}{1 + h/p}.$$

4. a. Déterminer la limite de la somme précédente quand p tend vers $+\infty$.

☞ *On pourra introduire la fonction* f *définie par*

$$f(t) = \frac{1}{1+t}.$$

4. b. En déduire que la somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

est bien définie et préciser sa valeur.

5. En déduire que la série

$$\sum \frac{1}{k} \cos \frac{2k\pi}{3}$$

converge et que sa somme est égale à $-\frac{\ln 3}{2}$.

Partie C. Cas général

Pour $0 < t < 2\pi$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\varphi(t) = \frac{1}{e^{it} - 1} \quad \text{et} \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}.$$

On fixe un réel $\pi \leqslant \alpha < 2\pi$.

6. Démontrer que

$$S_n(t) = \varphi(t)\left[e^{i(n+1)t} - e^{it}\right].$$

7. Démontrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\pi, \alpha]$.

8. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t} \varphi(t)\, dt = 0.$$

9. Déduire de l'intégrale

$$\int_\pi^\alpha S_n(t)\, dt$$

l'existence de la somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\alpha}}{k}$$

et donner sa valeur en fonction de $\ln 2$ et de l'intégrale

$$\int_\pi^\alpha e^{it} \varphi(t)\, dt.$$

10. En déduire une expression simplifiée des sommes

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos k\alpha}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k\alpha}{k}.$$

CCP 2011 PSI 1 (extrait)

Solution ❁ Étude de séries

Partie A.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_k(x) = (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$

Pour tout $x \neq 0$,

$$\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} |x|.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum u_k(x)$ converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$.

Pour $x = 1$, la série converge grâce au critère spécial des séries alternées. Pour $x = -1$, elle diverge (série harmonique).

La fonction L est donc définie sur $]-1, 1]$.

☙ Le cours sur les séries entières nous dit que

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad L(x) = \ln(1 + x).$$

2. On sait que L est continue sur $]-1, 1[$. Le critère spécial des séries alternées est vérifié sur $[0, 1]$, puisque

$$\big|u_k(x)\big| = \frac{x^k}{k}$$

tend vers 0 en décroissant. Par conséquent, on sait majorer le reste de la série :

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\Big| \leqslant \big|u_{n+1}(x)\big| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Le majorant est indépendant de x et tend vers 0, donc la série de fonctions continues $\sum u_k$ converge uniformément sur $[0, 1]$, donc sa somme L est continue sur $[0, 1]$.

La fonction L est donc continue sur $]-1, 1]$.

☙ Comme les deux membres de l'égalité du **1.** sont des fonctions continues de x sur $[0, 1]$, on en déduit par passage à la limite que $L(1) = \ln 2$.

Partie B. Un cas particulier

3. On démontre la première égalité par récurrence : les deux sommes sont nulles pour $p = 0$ (par convention) et on passe du rang p au rang $(p + 1)$ en ajoutant

$$\frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+2} - \frac{2}{3p+3}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+2} + \frac{1}{3p+3} - \frac{1}{p+1}$$

à chaque membre.

La deuxième égalité provient du changement d'indice : $k = p + h$.

4. a. On reconnaît une somme de Riemann relative à la fonction f sur le segment $[0, 2]$. Comme f est continue sur ce segment,

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_0^2 f(t)\,dt = \ln 3.$$

4. b. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $N = 3p+r$, la division euclidienne de N par 3. Alors

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{3p} a_k + \sum_{k=1}^{r} a_{3p+k}$$

avec la convention usuelle : $\sum_{k=1}^{r} \cdots = 0$ si $r = 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=1}^{N} a_k - \ln 3\Big| &\leqslant \Big|\sum_{k=1}^{3p} a_k - \ln 3\Big| + \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{3p+k}\\ &\leqslant \Big|\sum_{k=1}^{3p} a_k - \ln 3\Big| + \frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+2}.\end{aligned}$$

Comme $3p \leqslant N < 3p + 3$, on déduit de la question précédente et du théorème de composition des limites que le majorant tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. Par conséquent, la série $\sum a_k$ est convergente et sa somme est égale à $\ln 3$.

5. Si $k = 3p + r$, alors

$$\cos\frac{2k\pi}{3} = \cos\Big(2p\pi + \frac{2r\pi}{3}\Big) = \left|\begin{array}{ll} 1 & \text{si } r = 0,\\ -1/2 & \text{sinon}\end{array}\right.$$

donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k}\cos\frac{2k\pi}{3} = \frac{-a_k}{2}.$$

On déduit de ce qui précède que la somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\cos\frac{2k\pi}{3}$$

est bien définie et égale à $-\frac{\ln 3}{2}$.

Partie C. Cas général

6. Comme $0 < t < 2\pi$, alors $e^{it} \neq 1$ et l'expression de $S_n(t)$ découle de la formule de la somme géométrique pour la raison e^{it}.

7. Le dénominateur de φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui ne s'annule pas sur $[\pi, \alpha] \subset]0, 2\pi[$.

8. Comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\pi, \alpha]$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,dt = &\Big[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\varphi(t)\Big]_\pi^\alpha\\ &- \int_\pi^\alpha \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\varphi'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Il est clair que le terme intégré tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, la fonction φ' est continue sur le segment $[\pi, \alpha]$, donc bornée et

$$\Big|\int_\pi^\alpha \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\varphi'(t)\,dt\Big| \leqslant (\alpha - \pi)\frac{\|\varphi'\|_\infty}{n+1}$$

d'après l'inégalité de la moyenne, ce qui prouve que l'intégrale tend aussi vers 0. Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,dt = 0.$$

9. Comme il s'agit d'une somme finie, on intègre terme à terme :

$$\begin{aligned}\int_\pi^\alpha S_n(t)\,dt &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ik}(e^{ik\alpha} - e^{ik\pi}) \\ &= -i\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}e^{ik\alpha} - i\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après **6.**,

$$\int_\pi^\alpha S_n(t)\,dt = \int_\pi^\alpha \varphi(t)e^{i(n+1)t}\,dt - \int_\pi^\alpha \varphi(t)e^{it}\,dt.$$

Par conséquent, d'après **2.** et **8.**, la série $\sum e^{ik\alpha}/k$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\alpha}}{k} = -\ln 2 - i\int_\pi^\alpha \varphi(t)e^{it}\,dt.$$

10. On factorise le numérateur et le dénominateur de l'intégrande par l'angle moitié :

$$\begin{aligned}\int_\pi^\alpha e^{it}\varphi(t)\,dt &= \int_\pi^\alpha \frac{e^{it/2}}{2i\sin(t/2)}\,dt \\ &= -i\int_\pi^\alpha \frac{1/2\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\,dt + \int_\pi^\alpha \frac{dt}{2} \\ &= \frac{\alpha-\pi}{2} - i\big[\ln\sin t/2\big]_\pi^\alpha \\ &= \frac{\alpha-\pi}{2} - i\ln\sin\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

On déduit alors de **10.** que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\alpha}}{k} = -\ln 2 - \ln\sin\frac{\alpha}{2} + i\frac{\pi-\alpha}{2}$$

et donc que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos k\alpha}{k} = -\ln(2\sin \alpha/2)$$

(en prenant la partie réelle) et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k\alpha}{k} = \frac{\pi-\alpha}{2}$$

(en prenant la partie imaginaire).