Devoir de Mathématiques

Pour le 20 janvier 2015

❖ Problème ❖

On note $\mathcal{D}$, l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers strictement négatifs :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*.$$

On étudie dans ce problème la série de fonctions $\sum u_n$ où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-n\}, \quad u_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathcal{D}$.

On note U, la somme de cette série de fonctions :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}, \quad U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

U_n, sa n-ième somme partielle et R_n, son reste d'ordre n :

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

de telle sorte que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathcal{D}, \quad R_n(x) = U(x) - U_n(x).$$

Partie A. Régularité et ordre de grandeur de U

2. a. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer l'expression de $u_n^{(p)}(x)$, dérivée p-ième de $u_n(x)$.

2. b. Soient $-1 < a < b$. Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$.

2. c. En déduire que U est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

3. a. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $U(x)$ en fonction de $U_N(x)$ et de $U(x+N)$.

3. b. En déduire que la fonction U est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-(N+1), -N[$, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.

4. Soit $p \geqslant 2$, un entier. Établir une expression de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$$

en fonction de p et de $U^{(p-2)}(x)$.

5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $-N$.

6. a. Démontrer que U est strictement décroissante sur l'intervalle ouvert $]-1, +\infty[$.

6. b. Démontrer que

$$\forall\, x > 0, \quad \int_{x+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leqslant U(x) \leqslant \int_{x}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}.$$

En déduire un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7. Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathcal{D}, \quad 4U(x) = U\left(\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Partie B. Expression intégrale de U

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère la fonction

$$f_p : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^*, \quad f_p(t) = \frac{t^{p+1}}{e^t - 1}.$$

8. Déterminer l'unique prolongement continu sur $\mathbb{R}$ de f_p. Ce prolongement sera encore noté f_p.

9. Donner un équivalent simple de $f_p(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

10. On considère la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} f_0(t) e^{-xt}\, dt.$$

Démontrer que φ est définie sur $]-1, +\infty[$, et seulement sur cet intervalle.

11. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a > -1$.

11. a. Vérifier que

$$\forall\, x \geqslant a,\ \forall\, t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant f_p(t) e^{-xt} \leqslant f_p(t) e^{-at}.$$

11. b. Démontrer que la fonction $\left[t \mapsto f_p(t) e^{-at}\right]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

12. Démontrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

13. Calculer la limite de φ au voisinage de $+\infty$.

14. a. Démontrer que

$$\forall\, x > -1, \quad \varphi(x) - \varphi(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

14. b. En déduire que

$$\forall\, x > -1, \quad \varphi(x) = U(x).$$

15. Soit $p \geqslant 2$, un entier. Pour tout $x > -1$, exprimer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$$

à l'aide de p et de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1} e^{-xt}}{e^t - 1}\, dt.$$

CCP 2010 PC 2 (extrait)

Solution ✿ Étude d'une série de fonctions

1. Pour tout $x \in \mathcal{D}$ fixé, on a

$$u_n(x) \sim \frac{1}{n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$ et comme la série $\sum 1/n^2$ est absolument convergente, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente et donc convergente. La somme U de cette série de fonctions est donc bien définie sur $\mathcal{D}$.

Partie A. Régularité et ordre de grandeur de U

2. a. On vérifie par récurrence que

$$\forall\, p \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathcal{D}, \quad u_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p (p+1)!}{(n+x)^{p+2}}$$

et cette formule est encore vraie pour $p = 0$ (en convenant que $u_n^{(0)} = u_n$).

2. b. Pour $-1 \leqslant a \leqslant x \leqslant b$ et pour $p \in \mathbb{N}$, il est clair que

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| = \frac{(p+1)!}{(n+x)^{p+2}} \leqslant \frac{(p+1)!}{(n+a)^{p+2}}.$$

Les réels a et p étant fixés, le majorant est $\mathcal{O}(1/n^{p+2})$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme la série $\sum 1/n^{p+2}$ est convergente, on en déduit que la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$ (et en fait sur $[a, +\infty[$).

2. c. La série $\sum u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$, qui converge simplement sur $]-1, +\infty[$ et les dérivées successives $\sum u_n^{(p)}$ convergent normalement sur $[a, b] \subset]-1, +\infty[$. Par conséquent, la somme U de cette série est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a, b]$ et dérivable terme à terme :

$$\forall\, x \in [a, b],\ \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad U^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(p)}(x).$$

Comme le segment $[a, b]$ est arbitrairement choisi dans $]-1, +\infty[$, on en déduit que U est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et que

$$U^{(p)}(x) = (-1)^p (p+1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{p+2}}$$

pour tout réel $x > -1$ et tout entier $p \in \mathbb{N}$.

3. a. Si $x \in \mathcal{D}$, alors $x + N \in \mathcal{D}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{aligned} U(x) - U(x+N) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+N}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{N} u_k(x) = U_N(x). \end{aligned}$$

3. b. L'intervalle ouvert $]-(N+1), -N[$ est contenu dans $\mathcal{D}$ et, sur cet intervalle,

$$U(x) = U_N(x) + U(N+x).$$

Comme $N + x > -1$, on déduit de la question précédente que le second membre est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc U est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-(N+1), -N[$.

Finalement, U est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et sur l'intervalle $]-(N+1), -N[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, donc U est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur la réunion de ces intervalles, c'est-à-dire sur $\mathcal{D}$.

4. Par **2.c.**, pour tout $x > -1$ et tout entier $p \geqslant 2$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p} = \frac{(-1)^p U^{(p-2)}(x)}{(p-1)!}.$$

La relation du **3.b.** montre que cette égalité est en fait vraie sur $\mathcal{D}$ tout entier.

5. Comme la fonction U est continue en 0, la composée $[x \mapsto U(N+x)]$ tend vers $U(0)$ lorsque x tend vers $-N$. D'autre part, lorsque x tend vers $-N$,

$$U_N(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(N+x)^2} \sim \frac{1}{(N+x)^2}$$

(il s'agit d'une somme finie de termes qui restent tous bornés, sauf un). D'après **3.b.**,

$$U(x) \sim \frac{1}{(N+x)^2}$$

lorsque x tend vers $-N$.

6. a. La fonction U est la somme d'une série de fonctions décroissantes sur $]-1, +\infty[$, donc elle est décroissante sur $]-1, +\infty[$.

Remarque.— On peut aussi invoquer **2.c.** et remarquer que la dérivée de U :

$$U'(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^3}$$

est strictement négative sur $]-1, +\infty[$.

6. b. La fonction $[t \mapsto 1/t^2]$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que, pour tout $x > 0$,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \int_{(n+x)}^{(n+1+x)} \frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \int_{(n-1+x)}^{(n+x)} \frac{dt}{t^2}.$$

(On se restreint à $x > 0$ pour que $(n - 1 + x) > 0$.) En sommant sur n, on en déduit que

$$\frac{1}{x+1} = \int_{x+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leqslant U(x) \leqslant \int_{x}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}.$$

De plus,

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} + o(1/x)$$

et l'encadrement précédent démontre alors que

$$U(x) = \frac{1}{x} + o(1/x) \sim \frac{1}{x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

7. Si $x > -1$, alors $x/2 > -1/2$ et $(x-1)/2 > -1$. S'il existe un entier $N < -1$ tel que $-(N+1) < x < N$, alors

$$-\frac{N+1}{2} < \frac{x}{2} < -\frac{N}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{N+2}{2} < \frac{x-1}{2} < -\frac{N+1}{2},$$

ce qui montre que $x/2$ et $(x-1)/2$ appartiennent tous les deux à $\mathcal{D}$. Par suite,

$$U\Big(\frac{x}{2}\Big)+U\Big(\frac{x-1}{2}\Big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(2n+x)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(2n-1+x)^2}$$
$$=4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}=4U(x).$$

Partie B. Expression intégrale de U

8. Il est clair que f_p est continue sur $\mathbb{R}^*$. Au voisinage de $t=0$, on a $e^t-1\sim t$, donc $f_p(t)\sim t^p$. L'unique prolongement de f_p qui soit continu sur $\mathbb{R}$ est donc défini par

$$f_p(0)=\left|\begin{array}{l}1 \text{ si } p=0,\\ 0 \text{ si } p\in\mathbb{N}^*.\end{array}\right.$$

9. Lorsque t tend vers $+\infty$, on a $f_p(t)\sim t^{p+1}e^{-t}$.

10. Posons
$$\psi(x,t)=f_0(t)e^{-xt}.$$
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $[t\mapsto\psi(x,t)]$ est continue sur $[0,+\infty[$ (puisque f_0 est continue sur cet intervalle). De plus,
$$\psi(x,t)\sim te^{-(x+1)t}$$
lorsque t tend vers $+\infty$. On *sait* que $[t\mapsto te^{-\alpha t}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, $\alpha>0$. Donc $[t\mapsto\psi(x,t)]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $(x+1)>0$, c'est-à-dire $x>-1$.

11. a. Pour $t\geqslant 0$, il est clair que

$$\forall\, x\geqslant a,\quad 0\leqslant e^{-xt}\leqslant e^{-at}$$

et comme la fonction f_p est positive sur $]0,+\infty[$, l'encadrement demandé en découle.

11. b. La fonction $[t\mapsto f_p(t)e^{-at}]$ est continue sur $[0,+\infty[$ (puisque f_p l'est par **8.**) et, lorsque t tend vers $+\infty$,

$$f_p(t)e^{-at}\sim t^{p+1}e^{-(a+1)t}=o(e^{-(a+1)t/2}).$$

Comme $(a+1)/2>0$, cela prouve que $[t\mapsto f_p(t)e^{-at}]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

12. Soit $a>-1$.

Pour tout $t\in[0,+\infty[$, la fonction $[x\mapsto\psi(t,x)]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$ et

$$\frac{\partial^p\psi}{\partial x^p}(t,x)=(-t)^pf_0(t)e^{-xt}=(-1)^pf_p(t)e^{-xt}$$

pour tout $p\in\mathbb{N}$.

Pour tout $x\in[a,+\infty[$ et tout $p\in\mathbb{N}$, la fonction

$$\Big[t\mapsto\frac{\partial^p\psi}{\partial x^p}(t,x)\Big]$$

est intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après **11.b.**

D'après **11.a.**, la condition de domination est vérifiée pour tout $p\in\mathbb{N}$, tout $x\in[a,+\infty[$ et tout $t\in[0,+\infty[$.

Par conséquent, la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$ et

$$\forall\, x\geqslant a,\ \forall\, p\in\mathbb{N}^*,\quad \varphi^{(p)}(x)=(-1)^p\int_0^{+\infty}f_p(t)e^{-xt}\,dt.$$

Comme $a>-1$ est arbitrairement choisi, on en déduit que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et que

$$\forall\, x>-1,\ \forall\, p\in\mathbb{N}^*,\quad \varphi^{(p)}(x)=(-1)^p\int_0^{+\infty}f_p(t)e^{-xt}\,dt.$$

13. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels qui tend vers $+\infty$: on peut donc supposer que $x_n\geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. La suite de fonctions
$$\psi_n=[t\mapsto\psi(t,x_n)]$$
converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction nulle et la convergence est dominée par **11.a.** :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, t>0,\quad 0\leqslant\psi_n(t)\leqslant\psi(t,0).$$

Par conséquent, $\varphi(x_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été arbitrairement choisie, on en déduit que la fonction φ tend vers 0 en $+\infty$.

14. a. Pour $x>-1$, on a $(x+1)>0>-1$, donc

$$\varphi(x)-\varphi(x+1)=\int_0^{+\infty}t\frac{e^{-xt}-e^{-(x+1)t}}{e^t-1}\,dt$$
$$=\int_0^{+\infty}te^{-(x+1)t}\,dt.$$

En intégrant par parties, on en déduit que

$$\forall\, x>-1,\quad \varphi(x)-\varphi(x+1)=\frac{1}{(x+1)^2}.$$

14. b. Par **14.a.**, pour tout $x>-1$,

$$\sum_{k=0}^{n}\big[\varphi(x+k)-\varphi(x+k+1)\big]=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(k+x)^2}$$

c'est-à-dire (par télescopage)

$$\varphi(x)-\varphi(x+n+1)=U_{n+1}(x).$$

Comme φ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, on en déduit que
$$\forall\, x>-1,\quad \varphi(x)=\lim_{n\to+\infty}U_n(x)=U(x).$$

15. En comparant **2.c.** et **12.** qui donnent les expressions de $U^{(p-2)}$ et de $\varphi^{(p-2)}$ sur $]-1,+\infty[$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^p}=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^{+\infty}f_{p-2}(t)e^{-xt}\,dt$$
$$=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}e^{-xt}}{e^t-1}\,dt.$$