# Devoir de Mathématiques

Pour le 27 janvier 2015

---

## ❖ Problème ❖

**1.** Calculer ${}^t XSX$ en fonction des composantes de la matrice $S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et de la colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**2.** Une matrice symétrique $S$ est dite **positive**, ce qu'on note $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, lorsque toutes ses valeurs propres sont positives.

Démontrer que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive si, et seulement si,

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t XSX \geqslant 0.$$

**3.** On dit que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est **définie positive**, ce qu'on note $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, lorsque toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démontrer que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si, et seulement si, ${}^t XSX > 0$ pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul.

### Partie A.

Nous allons démontrer que

$$\det S \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i} \tag{$\star$}$$

pour toute matrice $S = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

**4.** Démontrer que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad s_{i,i} \geqslant 0.$$

☞ *On cherchera un vecteur colonne $X_i$ tel que $s_{i,i} = {}^t X_i S X_i$.*

**5.** On suppose que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Démontrer que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad s_{i,i} > 0.$$

**6.** Démontrer l'inégalité $(\star)$ dans le cas où la matrice symétrique $S$ est positive mais pas définie positive.

**7.** On suppose ici que $s_{i,i} = 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

**7. a.** Démontrer que

$$\forall\, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad \Big(\prod_{k=1}^{n} \lambda_k\Big)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

☞ *On utilisera la convexité de la fonction* exp.

**7. b.** En déduire que l'inégalité $(\star)$ est vraie pour $S$.

☞ *On appliquera le théorème spectral à $S$ et on appliquera l'inégalité précédente aux valeurs propres de $S$.*

**8.** Soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ;

$$T = \mathrm{Diag}\Big({}^1\!/\!\sqrt{s_{1,1}}, \cdots, {}^1\!/\!\sqrt{s_{n,n}}\Big) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),$$

et $B = TST \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

**8. a.** Démontrer que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**8. b.** En déduire que l'inégalité $(\star)$ est vérifiée par $S$.

**9.** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

**9. a.** Démontrer que $S = {}^t AA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**9. b.** En déduire l'**inégalité d'Hadamard** :

$$|\det A| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}^2\Big)^{1/2}.$$

### Partie B.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle telle que $a_0 \neq 0$.

**10.** Démontrer qu'il existe une, et une seule, suite réelle $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0.$$

**11.** Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la matrice définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

**11. a.** Vérifier que $A_n \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$.

**11. b.** Calculer le vecteur

$$A_n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

**11. c.** Déterminer une matrice $A_n' \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$b_n = \frac{\det A_n'}{\det A_n}.$$

☞ *Penser aux formules de Cramer.*

**12.** On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que la série $\sum |a_k| r^k$ converge. Démontrer que la série $\sum a_k^2 r^{2k}$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 r^{2k} \leqslant \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k\Big)^2.$$

**13.** Démontrer qu'il existe une constante réelle positive $\alpha$ telle que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad |b_k| \leqslant \frac{1}{|a_0|} \alpha^k.$$

☞ *On considérera la matrice $A_n'' \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ déduite de $A_n'$ en multipliant la $i$-ème ligne de $A_n'$ par $r^{i-1}$ pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et on lui appliquera l'inégalité d'Hadamard.*

**14.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application développable en série entière en 0, telle que $f(0) \neq 0$. Démontrer que

$$g = \frac{1}{f}$$

est définie au voisinage de 0 et développable en série entière en 0.

*e3a 2008 PSI 2 (extrait)*

## Solution ❀ Inégalité d'Hadamard

On note $(E_1, \dots, E_n)$, la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**1.**

$$^t XSX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{i,j}x_i x_j$$

**2.** Comme S est symétrique réelle, il existe une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (où les $\lambda_k$ sont les valeurs propres de S) et une matrice orthogonale P telles que $S = {}^t PDP$. En posant $Y = PX$, on en déduit que

$$^t XSX = {}^t X^t PDPX = {}^t YDY = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$$

où $y_1, \dots, y_n$ sont les composantes de Y.

Par conséquent :

– Si $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors ${}^t XSX \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

– Réciproquement, si ${}^t XSX \geqslant 0$ pour tout X, alors pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on peut choisir $X = {}^t PE_k$, soit $Y = E_k$ et $\lambda_k = {}^t XSX \geqslant 0$.

**3.** Une somme de termes *positifs* est nul si, et seulement si, chaque terme est nul.

Avec les notations précédentes :

– Si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors ${}^t XSX \geqslant 0$ et si ${}^t XSX = 0$, alors $\lambda_k x_k^2 = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ et comme les $\lambda_k$ sont strictement positives, alors $x_k = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, donc $X = 0$.

– Réciproquement, si X est un vecteur propre de S associé à $\lambda$, alors $X \neq 0$, donc

$$0 < {}^t XSX = \lambda {}^t XX = \lambda \|X\|^2$$

et $\|X\|^2 > 0$, donc $\lambda > 0$.

### Partie A.

**4.** Si $X = E_i$,alors $s_{i,i} = {}^t X_i S X_i \geqslant 0$ puisque $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

**5.** Avec les mêmes notations, ${}^t X_i S X_i > 0$ car cette fois $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**6.** Lorsque S est positive mais pas définie positive, alors 0 est valeur propre de S, donc $\det S = 0$ et comme les $s_{i,i}$ sont tous positifs, alors l'inégalité $(\star)$ est évidente.

**7. a.** Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose $\mu_k = \ell n \lambda_k$. Par convexité de exp,

$$\exp\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_k\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp \mu_k,$$

ce qui équivaut à l'inégalité demandée.

**7. b.** Comme S est symétrique, définie positive, elle est diagonalisable et en notant

$$0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

les valeurs propres de S, on a

$$\det S = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \quad \text{et} \quad \operatorname{tr} S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{i=1}^{n} s_{i,i} = n.$$

D'après **4.a.**,

$$\det S \leqslant 1 = \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.$$

**8. a.** Comme S et T sont symétriques,

$$^t B = {}^t T^t S^t T = TST = B,$$

donc B est symétrique.

La matrice T est diagonale et ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0, donc elle est inversible. Comme $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, pour toute colonne X,

$$^t XBX = {}^t(TX)S(TX) \geqslant 0$$

donc B est positive. Enfin, si ${}^t XBX = 0$, alors $TX = 0$ (puisque S est définie positive) et donc $X = 0$ puisque T est inversible, donc B est définie positive.

**8. b.** Quels que soient les indices i et j,

$$b_{i,j} = {}^1\!/\!_{\sqrt{s_{i,i}}} s_{i,j} {}^1\!/\!_{\sqrt{s_{j,j}}}.$$

Les coefficients diagonaux de B sont donc tous égaux à 1 et

$$\det B = \det(TST) \leqslant 1$$

d'après **4.** Par conséquent,

$$\det S \leqslant \frac{1}{(\det T)^2} = \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.$$

**9. a.** La matrice S est symétrique :

$$^t S = {}^t({}^t AA) = {}^t A^t({}^t A) = {}^t AA = S.$$

Pour toute colonne X,

$$^t XSX = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2 \geqslant 0,$$

donc $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

**9. b.** On applique l'inégalité $(\star)$ à $S = {}^t AA$. D'une part,

$$\det S = (\det A)^2.$$

D'autre part, d'après la formule du produit matriciel, le $i$-ème coefficient diagonal de S est égal à

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 \geqslant 0.$$

L'inégalité d'Hadamard se déduit alors de l'inégalité $(\star)$.

### Partie B.

**10.** Comme le réel $a_0$ n'est pas nul, il est inversible : il existe un, et un seul, réel $b_0$ tel que $a_0 b_0 = 1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, si $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ sont connus, comme $a_0 \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \iff b_n = \frac{-1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

donc $b_n$ est connu à son tour.

L'existence et l'unicité de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont ainsi démontrées par récurrence.

**11. a.** La matrice $A_n$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0, donc $A_n$ est inversible.

**11. b.**

$$A_n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 b_0 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} b_0 + \cdots + a_0 b_{n-1} \\ a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**11. c.** D'après les formules de Cramer,

$$b_n = \frac{1}{\det A_n} \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & \ddots & \ddots & a_0 & 0 \\ a_n & & a_2 & a_1 & 0 \end{vmatrix}$$

et comme la matrice $A_n$ est triangulaire, $\det A_n = a_0^{n+1}$.

**12.** Comme la série $\sum |a_k| r^k$ converge, son terme général tend vers 0, donc il existe un rang $N_0$ tel que

$$\forall\, k \geqslant N_0, \quad 0 \leqslant a_k^2 r^{2k} \leqslant |a_k| r^k \leqslant 1.$$

Par comparaison, la série $\sum a_k^2 r^{2k}$ est donc (absolument) convergente.

D'autre part, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\Big[\sum_{k=0}^{N} |a_k| r^k\Big]^2 = \sum_{k=0}^{N} a_k^2 r^{2k} + 2 \underbrace{\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant k} |a_i|\,|a_j| r^{i+j}}_{\geqslant 0}$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{N} a_k^2 r^{2k}.$$

Les deux séries étant convergentes, on peut alors faire tendre N vers $+\infty$ et en déduire que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 r^{2k} \leqslant \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k\Big)^2.$$

**13.** L'indication nous suggère de considérer la matrice suivante.

$$A''_n = \begin{pmatrix} a_0 & & & & 1 \\ a_1 r & a_0 r & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n-1} r^{n-1} & \cdots & \cdots & a_0 r^{n-1} & 0 \\ a_n r^n & \cdots & \cdots & a_1 r^n & 0 \end{pmatrix}.$$

En factorisant ligne par ligne le déterminant de $A''_n$, on arrive à l'égalité suivante :

$$\det A''_n = r^{n(n+1)/2} \det A'_n$$

et d'après l'inégalité d'Hadamard,

$$(\det A''_n)^2 \leqslant \prod_{j=0}^{n} \Big[\sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,j}^2\Big]$$

avec, pour $j = n$ (dernière colonne de $A''_n$) :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,j}^2 = 1$$

et pour tout $0 \leqslant j < n$, d'après **10.**,

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,j}^2 = r^{2j} \sum_{k=0}^{n-j} (a_k r^k)^2$$
$$\leqslant r^{2j} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k\Big)^2.$$

Ainsi,

$$|\det A''_n| \leqslant r^{n(n-1)/2} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k\Big)^n$$

donc

$$|\det A'_n| = \frac{|\det A''_n|}{r^{n(n+1)/2}} \leqslant \Big(\frac{1}{r} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k\Big)^n$$

et d'après **9.c.**

$$|b_n| = \frac{1}{|a_0|} \Big(\frac{1}{|a_0| r} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k\Big)^n.$$

**14.** Comme $f(0) \neq 0$ et que f est continue en 0 (en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence strictement positif), alors f reste non nulle au voisinage de 0, donc $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de 0.

Comme f est développable en série entière au voisinage de 0, alors il existe une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un réel $R > 0$ tels que

$$\forall\, x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

En particulier, $a_0 = f(0) \neq 0$.

Comme $a_0 \neq 0$, d'après **8.**, il existe une, et une seule, suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_0 b_0 = 1$ et que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0.$$

Pour tout $0 < r < R$, la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente et, d'après **10.** et **11.**, il existe $\alpha > 0$ tel que le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ soit supérieur à $\alpha^{-1}$.

Soit alors $\rho = \min\{\alpha^{-1}, R\} > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \rho$, les deux séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont absolument convergentes et d'après la formule du produit de Cauchy,

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\Big) = 1$$

ce qui revient à :

$$\forall\, x \in \left]-\rho, \rho\right[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{1}{f(x)}.$$

Comme $\rho > 0$, on en conclut que la fonction $1/f$ est développable en série entière en 0.