

## Devoir de Mathématiques

Pour le 17 février 2015

### ❖ Problème ❖

On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes, de même loi et presque sûrement positives :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X_n \geq 0) = 1.$$

On définit alors la **marche aléatoire**  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant  $S_0 = 0$  et

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

1. Soit  $\omega \in \Omega$ , fixé. Que dire du comportement de la suite de terme général  $S_n(\omega)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

#### Partie A. Étude d'un cas particulier

2. On suppose dans cette seule question que

$$\mathbf{P}(X_0 \in \mathbb{N}) = 1.$$

2.a. Démontrer que l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  tels que la suite de terme général  $S_n(\omega) \in \mathbb{N}$  converge est l'événement

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geq n} [X_k = 0].$$

2.b. Démontrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend presque sûrement vers  $+\infty$  au sens où il existe  $\Omega_0 \in \mathcal{A}$  tel que  $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$  et que

$$\forall \omega \in \Omega_0, \quad S_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

#### Partie B. Cas général

3. On pose  $\theta = \mathbf{E}(e^{-X_0})$ .

3.a. Justifier l'existence de  $\theta$  et que  $0 \leq \theta \leq 1$ .

3.b. On suppose que  $\mathbf{P}(X_0 = 0) < 1$ . Démontrer qu'il existe deux réels  $0 < \varepsilon \leq 1$  et  $\alpha > 0$  tels que

$$\mathbf{P}(X_0 \geq \alpha) \geq \varepsilon,$$

puis que  $\mathbf{E}(e^{-X_0}) < 1$ .

3.c. Démontrer que  $\theta = 1$  si, et seulement si, la variable aléatoire  $X_0$  est presque sûrement nulle :  $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$ .

3.d. On suppose que  $X_0$  suit la loi géométrique de paramètre  $0 < p < 1$ . Expliciter la valeur de  $\theta$  en fonction de  $p$  et vérifier que  $\theta \leq 1/e$ .

4. Dédurre de l'inégalité de Markov que

$$\forall n \geq 1, \forall t > 0, \quad \mathbf{P}(S_n \leq t) \leq e^{-t\theta^n}.$$

5. Nous pouvons maintenant étendre le résultat du 2. en supposant que  $\mathbf{P}(X_0 = 0) < 1$ .

5.a. Démontrer que

$$A = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [S_k \leq t]$$

est un événement négligeable.

5.b. En déduire que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend presque sûrement vers  $+\infty$  (au sens défini au 2.b.).

#### Partie C. Processus de comptage associé

On suppose que  $\mathbf{P}(X_0 \geq 0) = 1$  et que  $\mathbf{P}(X_0 = 0) < 1$ .

Soit  $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ , un événement presque sûr tel que  $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$  tende vers  $+\infty$  pour tout  $\omega \in \Omega_0$ . Pour tout réel  $t > 0$ , on pose

$$\forall \omega \in \Omega_0, \quad \nu_t(\omega) = \min\{n \geq 1 : S_n(\omega) > t\}$$

et  $\nu_t(\omega) = 0$  pour  $\omega \in \Omega_0^c$ .

6. Démontrer que l'application  $\nu_t : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  est bien définie.

7. Vérifier que  $[\nu_t = 0] = \Omega_0^c$ ,  $[\nu_t = 1] = [t < S_1]$  et plus généralement que

$$\forall n \geq 2, \quad [\nu_t = n] \in \mathcal{A}$$

de telle sorte que  $\nu_t$  est bien une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  pour tout  $t > 0$ .

8. On s'intéresse maintenant à l'espérance de  $\nu_t$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $t > 0$ , on pose  $F_n(t) = \mathbf{P}(S_n \leq t)$ .

8.a. Démontrer que la série  $\sum F_n(t)$  converge.

8.b. Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}(\nu_t = n) = F_{n-1}(t) - F_n(t).$$

8.c. Vérifier que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N F_N(t) = 0.$$

8.d. En déduire que  $\nu_t$  est une variable aléatoire d'espérance finie et que

$$\mathbf{E}(\nu_t) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t).$$

9. On considère ici la famille  $(\nu_t)_{t > 0}$  comme un **processus aléatoire à temps continu** : on étudie les **trajectoires** de ce processus en fixant  $\omega \in \Omega_0$ . On a dans ce cas l'habitude d'omettre  $\omega$  : on écrira  $\nu_t$  et  $S_n$  au lieu de  $\nu_t(\omega)$  et  $S_n(\omega)$ .

9.a. La fonction  $[t \mapsto \nu_t(\omega)]$  est croissante.

☞ On remarquera que  $S_{\nu_t} > t$ .

9.b. La fonction  $[t \mapsto \nu_t(\omega)]$  est continue à droite (on parle de **processus càdlàg**).

☞ On remarquera qu'il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $S_{\nu_t} > t + \varepsilon$  et que, par conséquent,  $\nu_{t+\varepsilon} \leq \nu_t$ .

D'après G2E 1999 (extrait)

**Solution** ✨ **Étude asymptotique d'une marche aléatoire**

1. La suite  $(S_n(\omega))$  est la suite des sommes partielles d'une série de terme général positif : c'est une suite croissante ; elle est convergente si, et seulement si, elle est majorée.

**Partie A. Étude d'un cas particulier**

2.a. Comme les variables aléatoires  $X_k$  sont à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , la suite  $(S_n(\omega))$  est une suite croissante d'entiers : elle est convergente si, et seulement si, elle est stationnaire ; autrement dit, elle converge si, et seulement si, la suite  $(X_k(\omega))$  est nulle à partir d'un certain rang (qui dépend de  $\omega$ ).

La convergence de la suite  $(S_n(\omega))$  se traduit donc formellement par

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq n, X_k(\omega) = 0$$

et donc de manière ensembliste par

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geq n} [X_k = 0].$$

2.b. L'ensemble

$$\Omega_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} [X_k \neq 0]$$

appartient à  $\mathcal{A}$ , puisque  $[X_k = 0] \in \mathcal{A}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  (les  $X_k$  sont des variables aléatoires) et que  $\mathcal{A}$  est stable par passage au complémentaire, par union dénombrable et par intersection dénombrable.

✨ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les ensembles

$$\bigcap_{k=n}^{n+m} [X_k = 0]$$

forment une suite décroissante d'événements et, comme les variables aléatoires  $X_k$  sont indépendantes,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+m} [X_k = 0]\right) = \prod_{k=n}^{n+m} \mathbf{P}(X_k = 0) = [\mathbf{P}(X_0 = 0)]^{m+1}$$

Par continuité décroissante de  $\mathbf{P}$ ,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k \geq n} [X_k = 0]\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} [\mathbf{P}(X_0 = 0)]^{m+1} = 0$$

puisque  $0 \leq \mathbf{P}(X_0 = 0) < 1$ .

En tant qu'union dénombrable d'événements négligeables,

$$\Omega_0^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geq n} [X_k = 0]$$

est un événement négligeable, donc  $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$  et la discussion de la question précédente a montré que  $(S_n(\omega))$  tend vers  $+\infty$  pour tout  $\omega \in \Omega_0$ .

**Partie B. Cas général**

3.a. Comme  $X_0$  est une variable aléatoire discrète positive, alors  $e^{-X_0}$  est une variable aléatoire discrète bornée, donc d'espérance finie et comme  $\mathbf{P}(0 < e^{-X_0} \leq 1) = 1$ , alors  $0 \leq \theta \leq 1$  par positivité de l'espérance.

3.b. La probabilité de l'événement  $[X_0 > 0]$  est strictement positive :

$$\mathbf{P}(X_0 > 0) = 1 - \mathbf{P}(X_0 = 0) > 0.$$

Or  $[X_0 > 0]$  est l'union d'une suite croissante d'événements :

$$[X_0 > 0] = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}_+^*} [X_0 > \alpha]$$

donc, par continuité croissante de  $\mathbf{P}$ ,

$$\mathbf{P}(X_0 > 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{P}(X_0 > \alpha) > 0.$$

Il existe donc  $0 < \varepsilon \leq 1$  et  $\alpha > 0$  tels que

$$\mathbf{P}(X_0 > \alpha) > \varepsilon.$$

✨ Il est clair que, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$X_0(\omega) \geq 0 \cdot \mathbb{1}_{[X_0 \leq \alpha]}(\omega) + \alpha \mathbb{1}_{[X_0 > \alpha]}(\omega)$$

et donc que

$$e^{-X_0(\omega)} \leq \mathbb{1}_{[X_0 \leq \alpha]}(\omega) + e^{-\alpha} \mathbb{1}_{[X_0 > \alpha]}(\omega).$$

Par positivité de l'espérance,

$$\begin{aligned} \theta = \mathbf{E}(e^{-X_0}) &\leq [1 - \mathbf{P}(X_0 > \alpha)] + e^{-\alpha} \mathbf{P}(X_0 > \alpha) \\ &\leq 1 + \underbrace{(e^{-\alpha} - 1)}_{< 0} \mathbf{P}(X_0 > \alpha) \\ &\leq 1 + (e^{-\alpha} - 1)\varepsilon < 1. \end{aligned}$$

3.c. Si  $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$ , alors  $\mathbf{P}(e^{-X_0} = 1) = 1$ , donc  $\theta = 1$ .

✨ Réciproquement, si  $\mathbf{P}(X_0 = 0) < 1$ , alors  $\theta < 1$  d'après la question précédente. L'équivalence est démontrée.

3.d. Si  $X_0$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ , alors

$$\theta = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} p q^{k-1} = \frac{p}{e - q}.$$

✨ Comme  $\mathbf{P}(X_0 \geq 1) = 1$ , alors  $\mathbf{P}(e^{-X_0} \leq e^{-1}) = 1$  et, par positivité de l'espérance,  $\mathbf{E}(e^{-X_0}) \leq e^{-1}$ .

4. Comme la fonction  $[u \mapsto e^{-u}]$  réalise une bijection décroissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,

$$[S_n \leq t] = [e^{-S_n} \geq e^{-t}].$$

En tant que fonction d'une variable aléatoire discrète,  $e^{-S_n}$  est une variable aléatoire discrète, qu'on peut écrire comme le produit de  $n$  variables aléatoires indépendantes, de même loi que  $e^{-X_0}$  et donc d'espérance finie :

$$e^{-S_n} = e^{-X_1} \dots e^{-X_n}.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{E}(e^{-S_n}) = \mathbf{E}(e^{-X_1}) \dots \mathbf{E}(e^{-X_n}) = [\mathbf{E}(e^{-X_0})]^n = \theta^n.$$

Comme  $e^{-S_n}$  est une variable aléatoire positive d'espérance finie, alors

$$\mathbf{P}(e^{-S_n} \geq e^{-t}) \leq e^t \mathbf{E}(e^{-S_n}) = e^t \theta^n$$

d'après l'inégalité de Markov.

**5.a.** Comme  $S_k$  est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , alors  $[S_k \leq t] \in \mathcal{A}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Comme  $\mathcal{A}$  est stable par intersection dénombrable et par union dénombrable, alors  $A \in \mathcal{A}$ .

✦ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il est clair que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [S_k \leq t] \subset [S_n \leq t].$$

Par croissance de  $\mathbf{P}$  et par **4.**, on en déduit que

$$0 \leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [S_k \leq t]\right) \leq \mathbf{P}(S_n \leq t) \leq e^t \theta^n.$$

Or  $0 \leq \theta < 1$ , donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [S_k \leq t]\right) = 0$$

en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ .

En tant qu'union dénombrable d'événements négligeables,  $A$  est négligeable.

**5.b.** Posons  $\Omega_0 = A^c \in \mathcal{A}$ . Comme  $A$  est négligeable, alors  $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$  et comme

$$\Omega_0 = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [S_k > t],$$

alors

$$\omega \in \Omega_0 \iff \forall t \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, S_k(\omega) > t.$$

Cette équivalence signifie que, pour tout  $\omega \in \Omega_0$ , la suite de terme général  $S_k(\omega)$  n'est pas majorée. Comme il s'agit d'une suite croissante **[1.]**, elle tend donc vers  $+\infty$ .

### Partie C. Processus de comptage associé

**6.** Pour tout  $\omega \in \Omega_0$ , l'ensemble

$$\{n \geq 1 : S_n(\omega) > t\}$$

est une partie non vide de  $\mathbb{N}$  (puisque la suite de terme général  $S_n(\omega)$  tend vers  $+\infty$ ), donc il admet un plus petit élément  $\nu_t(\omega) \in \mathbb{N}^*$  :  $\nu_t$  est donc bien définie sur  $\Omega_0$ .

Comme on a aussi défini  $\nu_t$  sur  $\Omega_0$ , cette application est bien définie sur  $\Omega$  et prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

**7.** On a remarqué à la question précédente que

$$[\nu_t = 0] = \Omega_0^c \in \mathcal{A}$$

(puisque  $\Omega_0 \in \mathcal{A}$  et que  $\mathcal{A}$  est stable par passage au complémentaire).

✦ Par définition du minimum,  $\nu_t(\omega) = 1$  si, et seulement si,  $S_1(\omega) > t$  et comme  $S_1$  est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , alors

$$[\nu_t = 1] = [S_1 > t] \in \mathcal{A}.$$

✦ Prenons enfin  $n \geq 2$ . Si  $\nu_t(\omega) = n$ , alors  $S_n(\omega) > t$  et  $S_{n-1}(\omega) \leq t$  (puisque  $(n-1) < n$ ). Réciproquement, si  $S_n(\omega) > t$  et  $S_{n-1}(\omega) \leq t$ , alors

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq k < n, S_k(\omega) &\leq S_{n-1}(\omega) \leq t \\ \forall k \geq n, t < S_n(\omega) &\leq S_k(\omega) \end{aligned}$$

puisque la suite  $(S_k(\omega))$  est croissante. Ainsi,

$$[\nu_t = n] = [S_{n-1} \leq t] \cap [S_n \leq t]^c \in \mathcal{A}$$

car  $S_n$  et  $S_{n-1}$  sont des variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

**8.a.** Par **4.**,

$$\forall n \geq 1, 0 \leq F_n(t) \leq e^t \theta^n$$

et comme  $0 \leq \theta < 1$ , la série  $\sum F_n(t)$  est convergente.

**8.b.** Comme  $S_{n-1}(\omega) \leq S_n(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ , alors

$$[S_n \leq t] \subset [S_{n-1} \leq t]$$

et on déduit de **7.** que

$$[S_{n-1} \leq t] = [S_n \leq t] \cup [\nu_t = n]$$

donc  $\mathbf{P}(\nu_t = n) = F_{n-1}(t) - F_n(t)$  pour tout  $n \geq 2$  et même pour  $n = 1$  (puisque  $S_0$  est identiquement nulle).

**8.c.** Toujours d'après **4.**,

$$NF_N(t) = \mathcal{O}(N\theta^N)$$

avec  $0 \leq \theta < 1$ , donc  $NF_N(t)$  tend vers 0 lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ .

**8.d.** D'après **8.b.**, pour tout  $N \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N n \mathbf{P}(\nu_t = n) &= \sum_{n=1}^N n(F_{n-1}(t) - F_n(t)) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)F_n(t) - \sum_{n=1}^N nF_n(t) \\ &= F_0(t) + \sum_{n=1}^{N-1} F_n(t) - NF_N(t). \end{aligned}$$

On déduit de **8.a.** et de **8.c.** que la série de terme général positif  $\sum n \mathbf{P}(\nu_t = n)$  est (absolument) convergente, donc  $\nu_t$  est une variable aléatoire d'espérance finie, et que

$$\mathbf{E}(\nu_t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbf{P}(\nu_t = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t).$$

**9.a.** Soient  $0 < t_1 < t_2$ . Comme le minimum d'une partie  $A$  appartient à  $A$ , alors  $S_{\nu_{t_2}} > t_2 > t_1$ . Ainsi,  $\nu_{t_2}$  appartient à l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $S_n > t_1$ , ensemble dont le minimum est  $\nu_{t_1}$ . Donc  $\nu_{t_1} \leq \nu_{t_2}$  : cela prouve que  $[t \mapsto \nu_t]$  est une fonction croissante.

**9.b.** Soit  $t > 0$ , fixé. Comme on l'a remarqué plus haut,  $S_{\nu_t} > t$ , donc il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$t < t + \varepsilon < S_{\nu_t}.$$

Cela implique que l'entier  $\nu_t$  appartient à l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $S_n > t + \varepsilon$ , ensemble dont le minimum est  $\nu_{t+\varepsilon}$ . Donc

$$\nu_{t+\varepsilon} \leq \nu_t.$$

Or la fonction  $[t \mapsto \nu_t]$  est croissante, donc

$$\forall 0 < h < \varepsilon, \nu_{t+h} \leq \nu_t \leq \nu_{t+h} \leq \nu_{t+\varepsilon},$$

ce qui prouve que  $[t \mapsto \nu_t]$  est constante sur  $[t, t + \varepsilon[$ . En particulier, la fonction  $[t \mapsto \nu_t]$  est continue à droite (càd) en chaque point et comme elle est croissante, elle admet une limite à gauche (làg) en chaque point.