Devoir de Mathématiques

Pour le 24 mars 2015

❖ Problème ❖

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$, on pose

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x).$$

1. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos t) = \cos nt.$$

2. Expliciter T_0, T_1 et T_2.

3. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [-1, 1], \quad T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0.$$

4. En déduire que les T_n sont des applications polynomiales à coefficients entiers. Préciser leur parité, leur degré et leur coefficient dominant.

Le polynôme T_n est appelé n-ième **polynôme de Tchebychev** (de première espèce).

5. Déduire de **1.** que T_n est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre.

6. Pour toute fonction f continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} \big|f(x)\big|.$$

6. a. Calculer $\|T_n\|_\infty$.

6. b. Démontrer par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, u \in \mathbb{R}, \quad |\sin nu| \leqslant n|\sin u|.$$

6. c. En déduire que $\|T_n'\|_\infty = n^2$.

7. Soit $x > 1$.

7. a. Démontrer que

$$\forall\, r > 0, \quad T_n\Big(\frac{r + r^{-1}}{2}\Big) = \frac{r^n + r^{-n}}{2}.$$

☞ *On pourra poser* $r = e^t$.

7. b. Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$x = \frac{r + r^{-1}}{2}.$$

7. c. En déduire que

$$1 \leqslant T_n(x) \leqslant \big(x + \sqrt{x^2 - 1}\big)^n.$$

8. On note $(L_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$, la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la subdivision $(a_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ de $[-1, 1]$ définie par

$$\forall\, 0 \leqslant j \leqslant n, \quad a_j = \cos\Big(1 - \frac{j}{n}\Big)\pi.$$

8. a. Résoudre l'équation $|T_n(x)| = 1$ sur $\mathbb{R}$.

8. b. Calculer $T_n'(a_j)$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$.

8. c. Démontrer que

$$T_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} L_j.$$

8. d. En déduire que

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \big|L_j(x)\big|.$$

8. e. Démontrer que

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad \big|P(x)\big| \leqslant \|P\|_\infty \big(x + \sqrt{x^2 - 1}\big)^n$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

Extrait de Centrale 2002 MP 1

Solution ❁ Polynômes de Tchebychev

1. Par définition d'Arccos,

$$\forall\, t \in [0,\pi], \quad \operatorname{Arccos}(\cos t) = t$$

donc

$$\forall\, t \in [0,\pi], \quad T_n(\cos t) = \cos[n \operatorname{Arccos}(\cos t)] = \cos(nt).$$

Les deux membres de cette égalité sont des fonctions paires et 2π-périodiques de t : comme elles coïncident sur $[0,\pi]$, elles coïncident en fait sur $\mathbb{R}$.

2. Il est clair que $T_0 = 1$ et $T_1 = X$. Pour $x \in [-1,1]$,

$$T_2(x) = \cos(2\operatorname{Arccos} x) = 2\cos^2(\operatorname{Arccos} x) - 1 = 2x^2 - 1$$

donc $T_2 = 2X^2 - 1$.

3. Soit $x \in [-1,1]$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos t$ (le réel $t = \operatorname{Arccos} x$ convient) et

$$\begin{aligned} 2xT_{n+1}(x) &= 2\cos t \cos(n+1)t \\ &= \cos[(n+1)t + t] + \cos[(n+1)t - t] \\ &= T_{n+2}(x) + T_n(x) \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Par **2.**, il est clair que T_0 et T_1 sont des polynômes à coefficients entiers, que $\deg T_0 = 0$ et $\deg T_1 = 1$, que le coefficient dominant de T_0 est égal à 2^0 et celui de T_1 est égal à 2^1.

Il existe donc un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que T_n et T_{n+1} soient des polynômes à coefficients entiers, que $\deg T_n = n$ et $\deg T_{n+1} = n+1$, que le coefficient dominant de T_n est égal à 2^n et celui de T_{n+1} est égal à 2^{n+1}.

Par **3.**,

$$T_{n+2} = \underbrace{2XT_{n+1}}_{\text{degré } n+2} - \underbrace{T_n}_{\text{degré } n},$$

ce qui prouve que T_{n+2} est à coefficients entiers, que son degré est égal à $(n+2)$ et que son coefficient dominant est égal à $2.2^{n+1} = 2^{n+2}$. L'hypothèse de récurrence est ainsi vérifiée au rang $(n+1)$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✎ Il est clair que T_0 est un polynôme pair et que T_1 est impair.

Il existe donc un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que T_{2p} soit pair et que T_{2p+1} soit impair.

Par **3.**,

$$T_{2p+2} = 2XT_{2p+1} - T_{2p}$$

est donc pair (le produit de deux polynômes impairs est pair) et

$$T_{2p+3} = 2XT_{2p+2} - T_{2p+1}$$

est donc impair (le produit d'un polynôme pair et d'un polynôme impair est impair). L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée au rang $(p+1)$ et donc pour tout $p \in \mathbb{N}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions T_n sont polynomiales donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Dérivons la relation **1.** :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad -\sin t\, T_n'(\cos t) = -n \sin nt$$

et dérivons à nouveau :

$$\sin^2 t\, T_n''(\cos t) - \cos t\, T_n'(\cos t) = -n^2 \cos nt$$

c'est-à-dire, d'après **1.**,

$$(1 - \cos^2 t)T_n''(\cos t) - \cos t\, T_n'(\cos t) + n^2 T_n(\cos t) = 0.$$

On en déduit que

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

Comme il s'agit d'une identité polynomiale, le fait qu'elle soit vérifiée sur un ensemble infini (le segment $[-1,1]$) suffit pour qu'elle soit vraie partout :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

6. a. Par définition, il est clair que $|T_n(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in [-1,1]$ et par **1.**, il existe des réels de $[-1,1]$ (qui seront précisés au **8.a.**) tels que $|T_n(x)| = 1$. Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n\|_\infty = 1.$$

6. b. L'encadrement est évident pour $n = 0$ et pour $n = 1$. En supposant qu'il soit vérifié pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} |\sin(n+1)u| &= |\sin nu \cos u + \sin u \cos nu| \\ &\leqslant |\sin nu||\cos u| + |\sin u||\cos nu| \\ &\leqslant n|\sin u| + |\sin u| = (n+1)|\sin u|. \end{aligned}$$

6. c. On dérive l'égalité **1.** : pour tout $0 < t < \pi$,

$$T_n'(\cos t) = \frac{-n \sin nt}{\sin t}$$

et d'après la majoration précédente,

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad \left|T_n'(x)\right| \leqslant n^2$$

donc $\|T_n'\|_\infty \leqslant n^2$.

En outre, la fonction (*polynomiale*) T_n' est continue en $t = 1$ et $T = -1$ donc, par composition de limites,

$$T_n'(1) = \lim_{t \to 0} T_n'(\cos t) = -n^2$$

et

$$T_n'(-1) = \lim_{t \to \pi} T_n'(\cos t) = (-1)^n n^2$$

puisque, lorsque h tend vers 0,

$$\frac{-n \sin n(\pi + h)}{\sin(\pi + h)} = \frac{(-1)^{n+1} n \sin nh}{-\sin h} \sim (-1)^n n^2.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n'\|_\infty = n^2.$$

7. a. D'une part, $T_0(\operatorname{ch} t) = 1 = \operatorname{ch} 0t$ et $T_1(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch} 1t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'autre part,

$$2 \operatorname{ch} t \operatorname{ch}(n+1)t = \operatorname{ch}(n+2)t + \operatorname{ch} nt$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ puisque

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(a \pm b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b.$$

On déduit alors de **3.** que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad T_n(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch} nt.$$

Soit $r > 0$. Il existe donc $t = \ln r \in \mathbb{R}$ tel que $r = e^t$ et

$$\frac{r + r^{-1}}{2} = \operatorname{ch} t$$

et par conséquent,

$$T_n\Big(\frac{r + r^{-1}}{2}\Big) = \operatorname{ch} nt = \frac{r^n + r^{-n}}{2}.$$

7. b. Pour $r > 0$, les équations

$$x = \frac{r + r^{-1}}{2} \quad \text{et} \quad r^2 - 2xr + 1 = 0$$

ont mêmes solutions :

$$r = x \pm \sqrt{x^2 - 1} > 0$$

et le produit de ces solutions est égal à 1 (relations entre coefficients et racines d'une équation polynomiale) : elles sont donc inverses l'une de l'autre.

En particulier, $r = 1$ si, et seulement si, $x = 1$.

7. c. Par **7.a.** et **7.b.**, comme $x > 1$, il existe $r > 0$ tel que

$$T_n(x) = \frac{r^n + r^{-n}}{2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} T_n(x) > 1 &\iff r^{2n} - 2r^n + 1 > 0 \\ &\iff (r^n - 1)^2 > 0 \end{aligned}$$

et par conséquent que $T_n(x) > 1$ pour tout $x > 1$.

☙ On conserve les mêmes notations. D'après la remarque finale de **7.b.**,

$$\begin{aligned} \frac{r^n + r^{-n}}{2} &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2} \\ &\leqslant (x + \sqrt{x^2 - 1})^n \end{aligned}$$

donc $T_n(x) \leqslant (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ pour tout $x > 1$.

8. Comme cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, les a_j sont deux à deux distincts et

$$-1 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1.$$

Les polynômes $(L_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ sont donc bien définis.

8. a. D'après **7.c.**, on sait que $|T_n(x)| = 1$ n'a pas de solution sur $]1, +\infty[$. Cette équation n'a pas non plus de solution sur $]-\infty, -1[$ (par parité/imparité de T_n). On se restreint donc au segment $[-1, 1]$.

☙ Soit $x \in [-1, 1]$. Par définition de T_n,

$$T_n(x) = 1 \iff \cos(n \operatorname{Arccos} x) = 1$$

et comme $0 \leqslant \operatorname{Arccos} x \leqslant \pi$, on en déduit que

$$T_n(x) = 1 \iff \exists\, 0 \leqslant 2k \leqslant n, \quad \operatorname{Arccos} x = \frac{2k\pi}{n}.$$

De même, $T_n(x) = -1 \iff \cos(n \operatorname{Arccos} x) = -1$ donc $T_n(x) = -1$ si, et seulement si, il existe un entier k tel que $0 \leqslant 2k + 1 \leqslant n$ et $\operatorname{Arccos} x = \frac{(2k+1)\pi}{n}$.

Finalement,

$$|T_n(x)| = 1 \iff \exists\, 0 \leqslant p \leqslant n, \quad x = \cos \frac{p\pi}{n}.$$

Les solutions de $|T_n(x)| = 1$ sont donc les $a_0, \ldots, a_n$ et, comme on l'a vu,

– si $n - j$ est pair, alors $T_n(a_j) = 1$;
– si $n - j$ est impair, alors $T_n(a_j) = -1$

donc

$$\forall\, 0 \leqslant j \leqslant n, \quad T_n(a_j) = (-1)^{n-j}.$$

8. b. On a vu au **6.c.** que

$$T_n'(a_0) = (-1)^n n^2 \quad \text{et que} \quad T_n'(a_n) = -n^2.$$

Pour $1 \leqslant j < n$, on reprend **1.** avec $0 < t = (1 - {}^j\!/_n)\pi < \pi$:

$$\underbrace{-\sin t}_{>0}\, T_n'(\cos t) = -n \underbrace{\sin nt}_{=0}$$

donc

$$\forall\, 1 \leqslant j < n, \quad T_n'(a_j) = 0.$$

8. c. Comme $\deg T_n = n$ par **4.**, le polynôme T_n est une combinaison linéaire des polynômes interpolateurs $L_0, \ldots, L_n$:

$$T_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j L_j$$

où les coefficients α_j sont des valeurs particulières de T_n :

$$\forall\, 0 \leqslant j \leqslant n, \quad T_n(a_j) = \alpha_j = (-1)^{n-j}$$

comme on l'a vu au **8.a.**

8. d. On sait que

$$L_j(x) = \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} \frac{x - a_i}{a_j - a_i}.$$

Pour $x \geqslant 1$, on a $x \geqslant 1 \geqslant a_i$, donc tous les numérateurs sont positifs. Comme la famille $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est décroissante, on en déduit que le facteur $(a_j - a_i)$ est négatif si, et seulement si, $j < i$: il y a donc autant de facteurs négatifs au dénominateur qu'il y a d'entiers i tels que $j < i \leqslant n$, donc

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad |L_j(x)| = (-1)^{n-j} L_j(x).$$

On déduit de la décomposition précédente que

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \big|L_j(x)\big|.$$

8. e. Comme $\deg P \leqslant n$, le polynôme P est une combinaison linéaire des polynômes interpolateurs $L_0, \ldots, L_n$:

$$P = \sum_{j=0}^{n} \beta_j L_j$$

et les coefficients β_j sont des valeurs particulières de T_n :

$$P = \sum_{j=0}^{n} P(a_j) L_j.$$

Comme les a_j appartiennent tous au segment $[-1, 1]$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \big|P(x)\big| &\leqslant \sum_{j=0}^{n} \big|P(a_j)\big|\, \big|L_j(x)\big| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n} \|P\|_\infty \sum_{j=0}^{n} \big|L_j(x)\big|. \end{aligned}$$

D'après la question précédente et **7.c.**,

$$\big|P(x)\big| \leqslant \|P\|_\infty\, T_n(x) \leqslant \|P\|_\infty\, (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$$

pour tout $x \geqslant 1$.