Séries entières [80.3]

❧ Soit x, une fonction développable en série entière au voisinage de 0 : il existe donc un réel $R > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall\, t \in\,]-R, R[, \quad x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Comme $R > 0$, la fonction x est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on peut dériver terme à terme :

$$x'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}t^n \qquad tx''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}t^n$$

donc x vérifie l'équation différentielle

$$4tx''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0 \tag{$\star$}$$

sur l'intervalle $]-R, R[$ si, et seulement si,

$$\forall\, t \in\,]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\big[4(n+1)n + 2(n+1)\big]a_{n+1} + a_n\big)t^n = 0.$$

Le premier membre est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est supérieur à $R > 0$ (et donc strictement positif) ; le second membre est une fonction constante, donc développable en série entière. Par unicité du développement en série entière, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} a_n$$

et donc que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0.$$

Le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^n$$

est infini puisque le terme général est borné pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On en déduit qu'une fonction développable en série entière x est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\star)$ si, et seulement si, il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^n.$$

En particulier,

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{t})^{2n} = a_0 \cos\sqrt{t}.$$

Ces solutions de $(\star)$ suggèrent le changement de variable que nous allons maintenant effectuer.

❧ La fonction $\varphi = \left[t \mapsto \sqrt{t}\right]$ est une bijection $\mathscr{C}^\infty$ de $I =]0, +\infty[$ sur I, dont la réciproque : $\left[u \mapsto u^2\right]$ est aussi $\mathscr{C}^\infty$ sur I. Par conséquent, la relation $x = y \circ \varphi$ équivaut à $y = x \circ \varphi^{-1}$ (ce qui signifie que la fonction y peut être définie à partir de x et d'un changement de variable) et prouve que x est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I si, et seulement si, y est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

De plus, pour tout $t > 0$,

$$x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, y'(\sqrt{t}) \qquad x''(t) = \frac{1}{4t}\, y''(\sqrt{t}) - \frac{1}{4t\sqrt{t}}\, y'(\sqrt{t})$$

donc

$$4tx''(t) + 2x'(t) + x(t) = y''(\sqrt{t}) + y(\sqrt{t}) = [(y'' + y) \circ \varphi](t).$$

Comme φ réalise une bijection de I sur I, on en déduit que x est solution de $(\star)$ sur I si, et seulement si,

$$\forall\, u \in I, \quad y''(u) + y(u) = 0. \tag{$\ddagger$}$$

Les solutions de cette équation sont connues ! Une fonction y est solution de $(\ddagger)$ sur I si, et seulement si, il existe deux constantes a_0 et b_0 telles que

$$\forall\, u \in I, \quad y(u) = a_0 \cos u + b_0 \sin u.$$

Par conséquent, x est une solution de $(\star)$ sur I si, et seulement si, il existe deux constantes a_0 et b_0 telles que

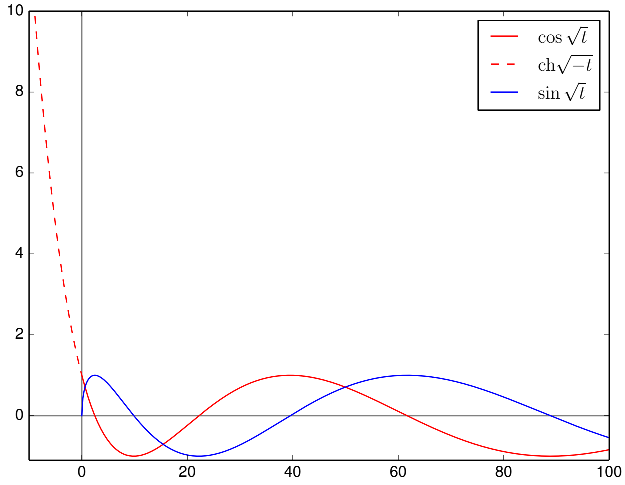
$$\forall\, t \in I, \quad x(t) = y(\sqrt{t}) = a_0 \cos\sqrt{t} + b_0 \sin\sqrt{t}.$$

Remarque.— Il est évident que la fonction $\left[t \mapsto \cos\sqrt{t}\right]$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, mais il n'est pas évident qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. Les calculs de la première partie prouvent qu'elle peut être prolongée en une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et en particulier qu'elle est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$!

Pour tracer le graphe de ce prolongement, il suffit de remarquer que, pour $t < 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{-t})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}\sqrt{-t}.$$

En revanche, la fonction $\left[t \mapsto \sin\sqrt{t}\right]$ n'est pas prolongeable en une fonction développable en série entière au voisinage de l'origine : son graphe admet une tangente verticale à l'origine.



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Taille de la fenêtre
minx, maxx = -10, 100
miny, maxy = -1.1, 10
plt.xlim(minx, xmax=maxx)
plt.ylim(miny, ymax=maxy)

# axe des abscisses
plt.plot([minx, maxx], [0,0], 'gray')
# axe des ordonnées
plt.plot([0,0], [miny, maxy], 'gray')

# échantillons des abscisses
x1 = np.linspace(0, maxx, 500)
x2 = np.linspace(minx, 0, 50)

# échantillons des ordonnées
y1 = np.cos(np.sqrt(x1))
y2 = np.cosh(np.sqrt(-x2))
y3 = np.sin(np.sqrt(x1))

# Pour coder les légendes en TeX
plt.rc('text', usetex=True)

plt.plot(x1, y1, 'r', label='$\cos\sqrt t$')
plt.plot(x2, y2, 'r--', label='$\mathrm{ch}\sqrt{-t}$')
plt.plot(x1, y3, 'b', label='$\sin\sqrt t$')

plt.legend()

plt.show()
```