La méthode d'Euler

Première partie

Lycée Pierre Corneille – MP

2016-2017

Représentation d'une fonction $y \ : \ [a, b] \to E$

- **Discrétisation du temps**

$$T = [t_0, \dots, t_{N-1}]$$

où $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} = b$

Représentation d'une fonction $y : [a, b] \to E$

- **Discrétisation du temps**

$$T = [t_0, \ldots, t_{N-1}]$$

où $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} = b$

- **Échantillonnage de la fonction**

$$Y = y(T) = \left[y(t_0), \ldots, y(t_{N-1})\right]$$

Représentation de la dérivée

La dérivée y' est définie mathématiquement par

$$\forall\ t \in [a, b], \quad y'(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

Représentation de la dérivée

La dérivée y' est définie mathématiquement par

$$\forall\ t \in [a, b], \quad y'(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

- Si l'expression de la dérivée est connue, on peut échantillonner la dérivée.

$$dY = [y'(t_0), \ldots, y'(t_{N-1})]$$

Représentation de la dérivée

La dérivée y' est définie mathématiquement par

$$\forall\ t \in [a, b], \quad y'(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

- Si l'expression de la dérivée est connue, on peut échantillonner la dérivée.
$$dY = [y'(t_0), \ldots, y'(t_{N-1})]$$
- L'échantillon Y seul ne permet pas de calculer les $y'(t_i)$.

Représentation de la dérivée

La dérivée y' est définie mathématiquement par

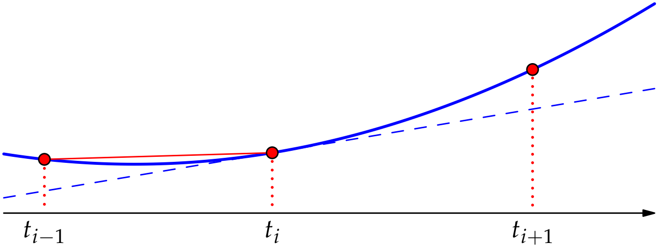
$$\forall\ t \in [a, b], \quad y'(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

- Si l'expression de la dérivée est connue, on peut échantillonner la dérivée.
$$dY = [y'(t_0), \ldots, y'(t_{N-1})]$$
- L'échantillon Y seul ne permet pas de calculer les $y'(t_i)$.
- Si le pas de temps est assez petit,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Représentation de la dérivée

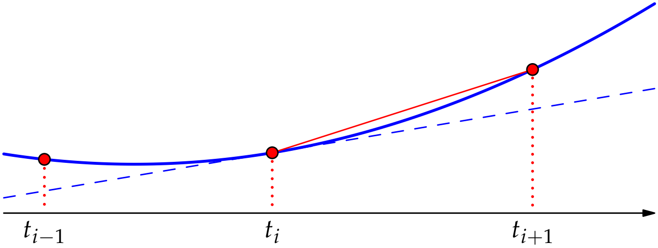
Approximation à gauche



$$\forall\ 0 < i < N, \quad y'(t_i) \approx \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \tag{1}$$

Représentation de la dérivée

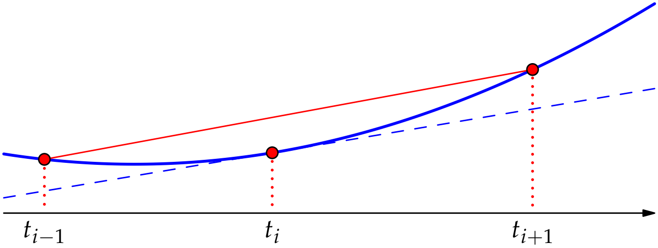
Approximation à droite



$$\forall\ 0 \leqslant i < N-1, \quad y'(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \tag{2}$$

Représentation de la dérivée

Approximation symétrique



$$\forall\ 0 < i < N-1, \quad y'(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}} \tag{3}$$

Problème de Cauchy

Équation différentielle sous forme résoluble

$$y'(t) = F\big(y(t), t\big)$$

Problème de Cauchy

Équation différentielle sous forme résoluble

$$y'(t) = F\big(y(t), t\big)$$

Condition initiale

$$y(a) = y0$$

Problème de Cauchy

Équation différentielle sous forme résoluble

$$y'(t) = F\big(y(t), t\big)$$

Condition initiale

$$y(a) = y0$$

➙ Une seule solution (en général)

Problème de Cauchy

Comment calculer la solution ?

Problème de Cauchy

Comment calculer la solution ?

- Calcul d'une expression littérale exacte (très rare)

Problème de Cauchy

Comment calculer la solution ?

- Calcul d'une expression littérale exacte (très rare)
- Calcul d'une approximation numérique

Problème de Cauchy

Comment calculer la solution ?

- Calcul d'une expression littérale exacte (très rare)
- Calcul d'une approximation numérique
  - Comment ?

Problème de Cauchy

Comment calculer la solution ?

- Calcul d'une expression littérale exacte (très rare)
- Calcul d'une approximation numérique
  - Comment ?
  - Avec quelle qualité d'approximation ?

Schéma explicite

Analogie

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} = F(y_i, t_i) \quad \longleftrightarrow \quad y'(t_i) = F\big(y(t_i), t_i\big)$$

Schéma explicite

Analogie

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} = F(y_i, t_i) \quad \longleftrightarrow \quad y'(t_i) = F\big(y(t_i), t_i\big)$$

Calcul par récurrence :

Schéma explicite

Analogie

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} = F(y_i, t_i) \quad \longleftrightarrow \quad y'(t_i) = F\big(y(t_i), t_i\big)$$

Calcul par récurrence :

- Initialisation avec la condition initiale

$$y_0 = y(t_0) = y0$$

Schéma explicite

Analogie

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} = F(y_i, t_i) \quad \longleftrightarrow \quad y'(t_i) = F\big(y(t_i), t_i\big)$$

Calcul par récurrence :

- Initialisation avec la condition initiale

$$y_0 = y(t_0) = y0$$

- Itération avec

$$\forall\ i \geqslant 0, \quad y_{i+1} = y_i + F(y_i, t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

Schéma implicite

Analogie

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = F(y_i, t_i) \quad \longleftrightarrow \quad y'(t_i) = F\big(y(t_i), t_i\big)$$

Schéma implicite

Analogie

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = F(y_i, t_i) \quad \longleftrightarrow \quad y'(t_i) = F\big(y(t_i), t_i\big)$$

Calcul par récurrence :

Schéma implicite

Analogie

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = F(y_i, t_i) \quad \longleftrightarrow \quad y'(t_i) = F\big(y(t_i), t_i\big)$$

Calcul par récurrence :

- Initialisation avec la condition initiale

$$y_0 = y(t_0) = y0$$

Schéma implicite

Analogie

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = F(y_i, t_i) \quad \longleftrightarrow \quad y'(t_i) = F\big(y(t_i), t_i\big)$$

Calcul par récurrence :

- Initialisation avec la condition initiale

$$y_0 = y(t_0) = y0$$

- Itération avec

$$\forall\ i \geqslant 1, \quad y_i - F(y_i, t_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) = y_{i-1}$$

Schéma implicite

Analogie

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = F(y_i, t_i) \quad \longleftrightarrow \quad y'(t_i) = F\big(y(t_i), t_i\big)$$

Calcul par récurrence :

- Initialisation avec la condition initiale

$$y_0 = y(t_0) = y0$$

- Itération avec

$$\forall\ i \geqslant 1, \quad y_i - F(y_i, t_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) = y_{i-1}$$

équation à résoudre pour obtenir y_i en fonction de y_{i-1}.

Charge d'un condensateur

Équation différentielle :

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y'(t) + \omega y(t) = E$$

```
def F(y,t):
  return E-omega*y
```

Charge d'un condensateur

Équation différentielle :

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y'(t) + \omega y(t) = E$$

```
def F(y,t):
  return E-omega*y
```

Condition initiale :

$$y(0) = 0$$

```
y0 = 0.0
Y = [y0]
```

Charge d'un condensateur : schéma explicite

- Discrétisation du temps avec pas constant $\mathrm{d}t$

```
a, b = 0, 5
omega, E = 2.0, 2.0
N = (b-a)/dt + 1        # Attention !
T = np.linspace(a, b, N)
```

Charge d'un condensateur : schéma explicite

- Discrétisation du temps avec pas constant $\mathrm{d}t$

```
a, b = 0, 5
omega, E = 2.0, 2.0
N = (b-a)/dt + 1        # Attention !
T = np.linspace(a, b, N)
```

- Schéma d'Euler

```
for t in T[1:]:
  y0 = y0 + dt*F(y0,t)
  Y.append(y0)
```

Charge d'un condensateur : schéma explicite

- Discrétisation du temps avec pas constant $\mathrm{d}t$

```
a, b = 0, 5
omega, E = 2.0, 2.0
N = (b-a)/dt + 1        # Attention !
T = np.linspace(a, b, N)
```

- Schéma d'Euler

```
for t in T[1:]:
  y0 = y0 + dt*F(y0,t)
  Y.append(y0)
```

- Tracé

```
plt.plot(T, Y, 'ro')
```

Charge d'un condensateur : schéma implicite

- Même discrétisation du temps, même initialisation

Charge d'un condensateur : schéma implicite

- Même discrétisation du temps, même initialisation
- Après résolution :

$$\forall\ i \geqslant 1, \quad y_i = \frac{y_{i-1} + E \cdot \mathrm{d}t}{1 + \omega \cdot \mathrm{d}t} = G(y_{i-1})$$

```
def G(y):
  return (y+E*dt)/(1+omega*dt)
```

Charge d'un condensateur : schéma implicite

- Même discrétisation du temps, même initialisation
- Après résolution :

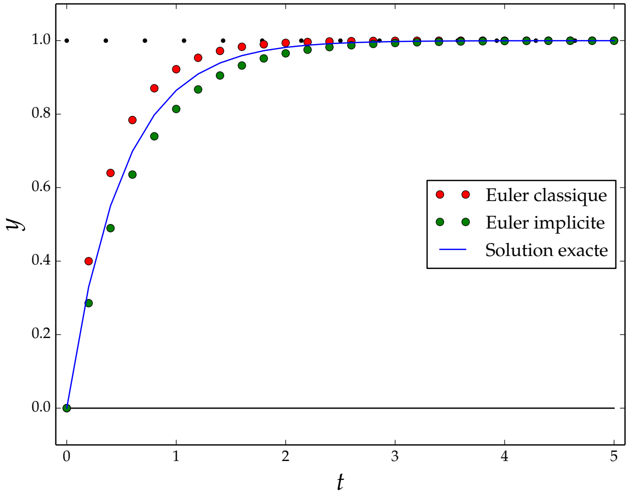
$$\forall\, i \geqslant 1, \quad y_i = \frac{y_{i-1} + E \cdot \mathrm{d}t}{1 + \omega \cdot \mathrm{d}t} = G(y_{i-1})$$

```
def G(y):
  return (y+E*dt)/(1+omega*dt)
```

- Itération

```
for t in T[1:]:
  y0 = G(y0)
  Y.append(y0)
```

Charge d'un condensateur : $\mathrm{d}t = 0,2$



Charge d'un condensateur : $\mathrm{d}t = 0,025$