La méthode d'Euler

Deuxième partie

Lycée Pierre Corneille – MP

2016-2017

Discrétisations du temps avec pas constant $\mathrm{d}t$

On choisit l'*instant initial* $a = 0$ et l'instant final b.

$$\mathrm{d}t = \frac{b-a}{N}$$

Discrétisations du temps avec pas constant $\mathrm{d}t$

On choisit l'*instant initial* $a = 0$ et l'instant final b.

$$\mathrm{d}t = \frac{b-a}{N}$$

- `T = np.arange(a, b, dt)`

$$T = (a, a + \mathrm{d}t, \ldots, a + (N-1)\,\mathrm{d}t < b)$$

Discrétisations du temps avec pas constant $\mathrm{d}t$

On choisit l'*instant initial* $a = 0$ et l'instant final b.

$$\mathrm{d}t = \frac{b-a}{N}$$

- `T = np.arange(a, b, dt)`

$$T = (a, a + \mathrm{d}t, \dots, a + (N-1)\,\mathrm{d}t < b)$$

- `T = np.linspace(a, b, N+1)`

$$T = (a, a + \mathrm{d}t, \dots, a + (N-1)\,\mathrm{d}t, a + N\,\mathrm{d}t = b)$$

Discrétisations du temps avec pas constant $\mathrm{d}t$

On choisit l'*instant initial* $a = 0$ et l'instant final b.

$$\mathrm{d}t = \frac{b-a}{N}$$

- `T = np.arange(a, b, dt)`

$$T = (a, a + \mathrm{d}t, \ldots, a + (N-1)\,\mathrm{d}t < b)$$

- `T = np.linspace(a, b, N+1)`

$$T = (a, a + \mathrm{d}t, \ldots, a + (N-1)\,\mathrm{d}t, a + N\,\mathrm{d}t = b)$$

Attention ! Avec `np.linspace(a, b, N)`,

$$T = (a, a + \mathrm{d}\tau, \ldots, a + (N-1)\,\mathrm{d}\tau = b) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\tau = \frac{b-a}{N-1}$$

Problème de Cauchy

Équation différentielle

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y'(t) + 2ty(t) = 0$$

Problème de Cauchy

Équation différentielle

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y'(t) + 2ty(t) = 0$$

Forme résoluble

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y'(t) = F\big(y(t), t\big) = -2ty(t)$$

Problème de Cauchy

Équation différentielle

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y'(t) + 2ty(t) = 0$$

Forme résoluble

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y'(t) = F\big(y(t), t\big) = -2ty(t)$$

Condition initiale

$$y(0) = 1$$

Problème de Cauchy

Équation différentielle

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y'(t) + 2ty(t) = 0$$

Forme résoluble

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y'(t) = F\big(y(t), t\big) = -2ty(t)$$

Condition initiale

$$y(0) = 1$$

Solution

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad y(t) = e^{-t^2}$$

Schéma d'Euler explicite

Initialisation

```
y0 = 1.0
Y = [y0]
```

Schéma d'Euler explicite

Initialisation

```
y0 = 1.0
Y = [y0]
```

Résolution

```
def F(y,t):
    return -2*t*y
```

Schéma d'Euler explicite

Initialisation

```
y0 = 1.0
Y = [y0]
```

Résolution

```
def F(y,t):
    return -2*t*y

for t in T[1:]:
    y0 = y0 + dt*F(y0,t)
    Y.append(y0)
```

Schéma implicite

- Même discrétisation du temps, même initialisation

Schéma implicite

- Même discrétisation du temps, même initialisation
- Après résolution :

$$\forall\ i \geqslant 1, \quad y_i = \frac{y_{i-1}}{1 + 2t_i\,\mathrm{d}t} = G(y_{i-1}, t_i)$$

```
def G(y, t):
  return y/(1+2*t*dt)
```

Schéma implicite

- Même discrétisation du temps, même initialisation
- Après résolution :

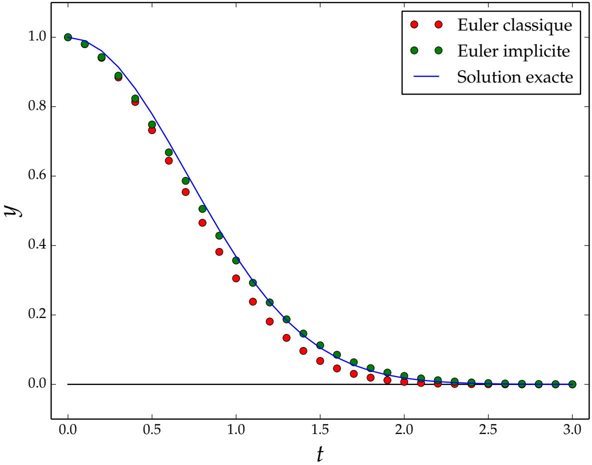
$$\forall\ i \geqslant 1, \quad y_i = \frac{y_{i-1}}{1 + 2t_i\,\mathrm{d}t} = G(y_{i-1}, t_i)$$

```
def G(y, t):
  return y/(1+2*t*dt)
```

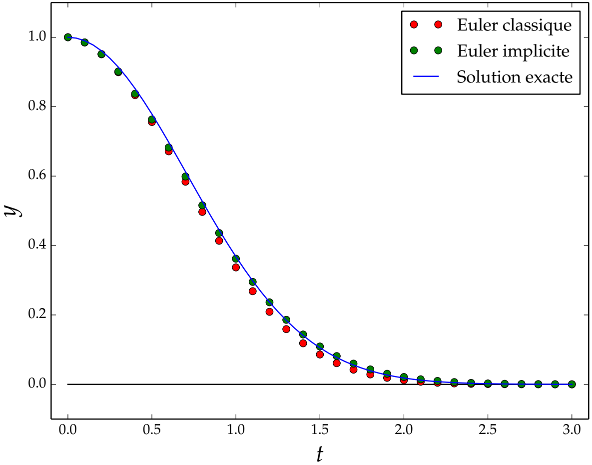
- Itération

```
for t in T[1:]:
  y0 = G(y0, t)
  Y.append(y0)
```

Courbe de Gauss : $\mathrm{d}t = 0,1$



Courbe de Gauss : $\mathrm{d}t = 0,05$



Problème de Cauchy en dimension 2

$$y(t) \leftarrow \big(x(t), y(t)\big)$$

Problème de Cauchy en dimension 2

$$y(t) \leftarrow \big(x(t), y(t)\big)$$

Système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

Problème de Cauchy en dimension 2

$$y(t) \leftarrow \big(x(t), y(t)\big)$$

Système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

Condition initiale

$$x(0) = 2, \qquad y(0) = 0$$

Problème de Cauchy en dimension 2

$$y(t) \leftarrow \big(x(t), y(t)\big)$$

Système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

Condition initiale

$$x(0) = 2, \qquad y(0) = 0$$

Solution

$$\forall\ t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = e^{-t} + e^{-3t} \\ y(t) = e^{-t} - e^{-3t} \end{cases}$$

Schéma d'Euler explicite

Initialisation

```
x0, y0 = 2.0, 0.0
X, Y = [x0], [y0]
```

Schéma d'Euler explicite

Initialisation

```
x0, y0 = 2.0, 0.0
X, Y = [x0], [y0]
```

Résolution $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

```
p, q = 1-2*dt, dt
def F(x, y, t):
  return p*x+q*y, q*x+p*y
```

Schéma d'Euler explicite

Initialisation

```
x0, y0 = 2.0, 0.0
X, Y = [x0], [y0]
```

Résolution $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

```
p, q = 1-2*dt, dt
def F(x, y, t):
  return p*x+q*y, q*x+p*y

for t in T[1:]:
  x0, y0 = F(x0, y0,t)
  X.append(x0)
  Y.append(y0)
```

Schéma d'Euler implicite

Même discrétisation du temps, même initialisation.

Schéma d'Euler implicite

Même discrétisation du temps, même initialisation.
Formule de récurrence

$$\forall\ k \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{(1+2\,\mathrm{d}t)\cdot x_k + \mathrm{d}t\cdot y_k}{1+4\,\mathrm{d}t+3\,\mathrm{d}t^2} \\ y_{k+1} = \dfrac{\mathrm{d}t\cdot x_k + (1+2\,\mathrm{d}t)\cdot y_k}{1+4\,\mathrm{d}t+3\,\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

Schéma d'Euler implicite

Même discrétisation du temps, même initialisation.

Formule de récurrence

$$\forall\, k \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{(1+2\,\mathrm{d}t)\cdot x_k + \mathrm{d}t\cdot y_k}{1+4\,\mathrm{d}t+3\,\mathrm{d}t^2} \\ y_{k+1} = \dfrac{\mathrm{d}t\cdot x_k + (1+2\,\mathrm{d}t)\cdot y_k}{1+4\,\mathrm{d}t+3\,\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

```
Det = 1+4*dt+3*dt**2
p, q = (1+2*dt)/Det, dt/Det
def F(x, y, t):
  return p*x+q*y, q*x+p*y
```

Schéma d'Euler implicite

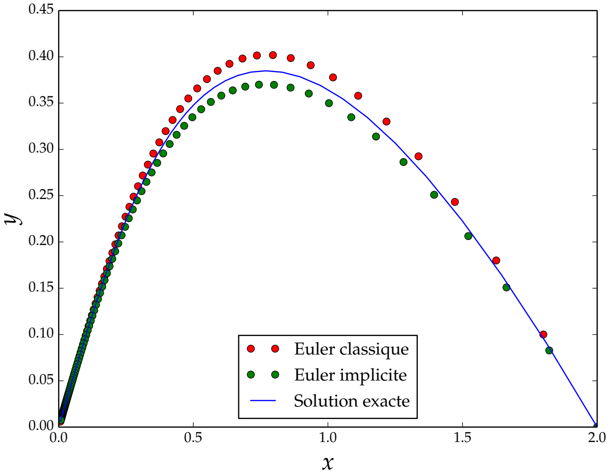
Même discrétisation du temps, même initialisation.
Formule de récurrence

$$\forall\ k \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{(1+2\,\mathrm{d}t)\cdot x_k + \mathrm{d}t\cdot y_k}{1+4\,\mathrm{d}t+3\,\mathrm{d}t^2} \\ y_{k+1} = \dfrac{\mathrm{d}t\cdot x_k + (1+2\,\mathrm{d}t)\cdot y_k}{1+4\,\mathrm{d}t+3\,\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

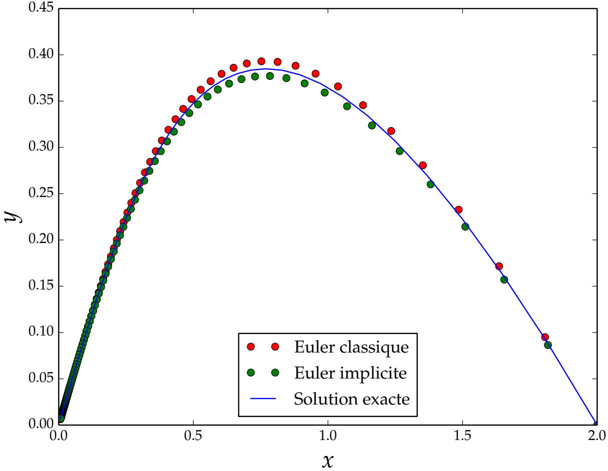
```
Det = 1+4*dt+3*dt**2
p, q = (1+2*dt)/Det, dt/Det
def F(x, y, t):
  return p*x+q*y, q*x+p*y
```

Même résolution

Système différentiel : $\mathrm{d}t = 0,05$



Système différentiel : $\mathrm{d}t = 0,025$



Problème de Cauchy

Mise sous forme résoluble

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \iff \begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\omega^2 x(t) \end{cases}$$

Problème de Cauchy

Mise sous forme résoluble

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \iff \begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\omega^2 x(t) \end{cases}$$

Inconnue $\quad y(t) = \big(x(t), v(t)\big)$

Problème de Cauchy

Mise sous forme résoluble

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \iff \begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\omega^2 x(t) \end{cases}$$

Inconnue $\qquad y(t) = \big(x(t), v(t)\big)$

Condition initiale

$$y(0) = (1,0) \iff \{x(0) = 1, x'(0) = 0\}$$

Problème de Cauchy

Mise sous forme résoluble

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \iff \begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\omega^2 x(t) \end{cases}$$

Inconnue $y(t) = (x(t), v(t))$

Condition initiale

$$y(0) = (1, 0) \iff \{x(0) = 1, x'(0) = 0\}$$

Solution

$$y(t) = (\cos \omega t, -\omega \sin \omega t) \iff x(t) = \cos \omega t$$

Schémas d'Euler

Schéma explicite

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k \cdot \mathrm{d}t \\ v_{k+1} = v_k - \omega^2 \cdot x_k \cdot \mathrm{d}t \end{cases}$$

Schémas d'Euler

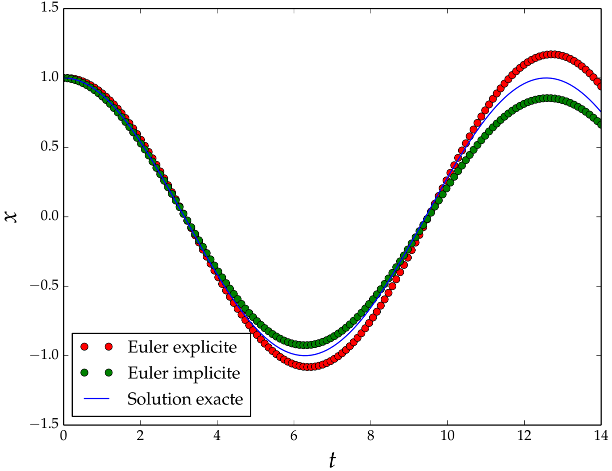
Schéma explicite

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k \cdot \mathrm{d}t \\ v_{k+1} = v_k - \omega^2 \cdot x_k \cdot \mathrm{d}t \end{cases}$$

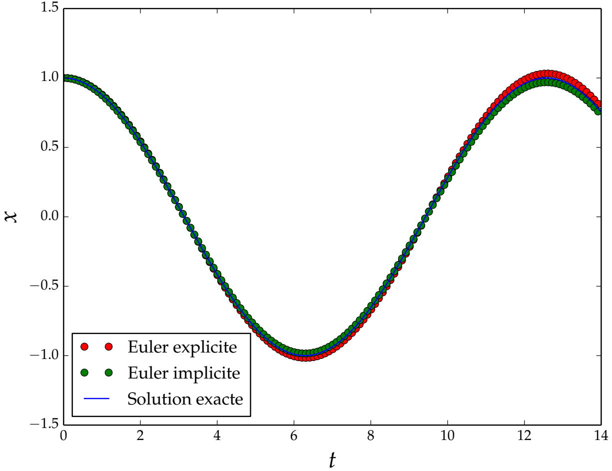
Schéma implicite

$$x_{k+1} = \frac{x_k + v_k \cdot \mathrm{d}t}{1 + (\omega\,\mathrm{d}t)^2} \qquad v_{k+1} = \frac{v_k - \omega^2 x_k\,\mathrm{d}t}{1 + (\omega\,\mathrm{d}t)^2}$$

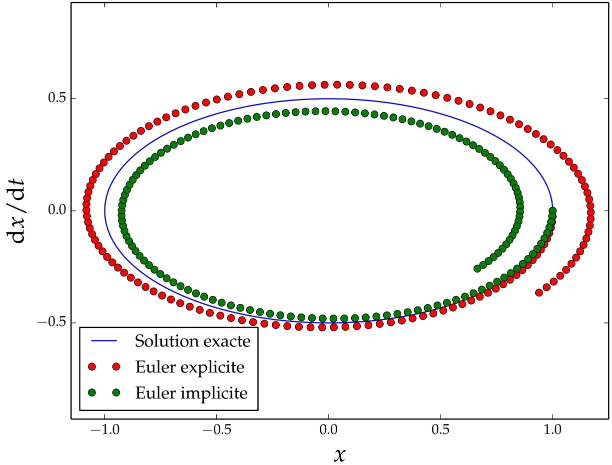
Pendule harmonique : $\mathrm{d}t = 0,1$



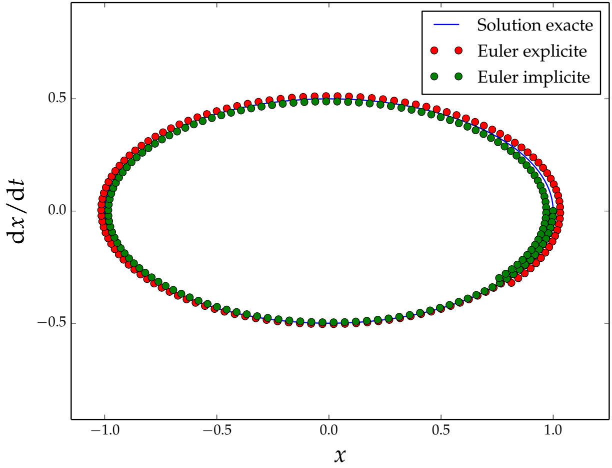
Pendule harmonique : $\mathrm{d}t = 0,02$



Dans l'espace des phases : $\mathrm{d}t = 0,1$



Dans l'espace des phases : $\mathrm{d}t = 0,02$



Avantages

- La qualité d'approximation est meilleure quand le pas de temps $\mathrm{d}t$ diminue.
- Le schéma implicite est légèrement plus précis que le schéma explicite.

Inconvénients

- Quand le pas de temps diminue, le nombre de calculs à effectuer augmente.
- Dans l'espace des phases, on peut perdre des propriétés qualitatives essentielles (périodicité).
- Pour des équations non linéaires, le schéma implicite est lourd en calculs.
- Comment contrôler la qualité de l'approximation quand on ne sait pas résoudre littéralement l'équation ?
- Comment choisir le pas de temps ?