

Exercices de révision

Ce document est conçu pour vous rappeler l'essentiel du programme de MPSI. L'accent porte sur la connaissance des points fondamentaux du cours et la mise en pratique des notions. Les exercices proposés, dans leur grande majorité, sont des exercices de base. Ils ne présentent pas de difficulté si les points centraux du cours sont maîtrisés et si la technique est en place.¹ Bloquer sur une partie importante des exercices d'un chapitre signifie que le cours correspondant doit être revu. Toute erreur est à signaler à l'adresse nicolas.tosel@wanadoo.fr.

Travailler sérieusement ce document devrait vous faciliter l'année de MP*. Il ne vous est pas demandé de les rédiger soigneusement, mais de vérifier que vous savez les faire. Pour tirer un parti optimal de ce travail, il est recommandé de garder en mémoire certains des résultats établis ici, à cause de leur caractère classique et/ou utile (repérés par le symbole *).

Afin de garder à cette sélection déjà longue un volume raisonnable, seuls les chapitres les plus centraux sont abordés dans la partie « obligatoire », constituée des sections **1** à **14** : analyse réelle, polynômes, algèbre linéaire et euclidienne, probabilités.² Pour chacun de ces chapitres, on liste les points essentiels du cours de première année. Acquérir une vraie compréhension des objets demande de maîtriser ces résultats et leurs démonstrations. La section **15** comporte 25 exercices supplémentaires issus d'oraux X-ENS récents, dont certains d'algèbre générale ; certains de ces exercices peuvent nécessiter un temps de recherche important, et la section est réservée aux aficionados !

Pour finir, deux points importants.

Le rôle de la technique.

En mathématiques comme en physique, le calcul joue, bien au delà des concours, un rôle central. On vous demandera surtout d'effectuer rapidement des calculs simples. Pour se lancer dans un calcul et le conduire efficacement, il faut un peu de confiance en soi et une bonne maîtrise de gestes de base. On ne peut acquérir l'une et l'autre que par la pratique : vous trouverez donc ci-dessous un assez grand nombre d'exercices techniques.

En particulier, le calcul asymptotique joue un rôle central dans le programme de seconde année. Plus largement, une bonne maîtrise des techniques asymptotiques est indispensable en analyse. Arriver en seconde année avec de bons automatismes sur le sujet permet de limiter les gammes ennuyeuses et d'appliquer le calcul asymptotique à des problèmes intéressants.

Le rôle du dessin

La représentation géométrique est décisive dans de nombreuses situations mathématiques. Il vous est donc vivement conseillé de dessiner dès que le contexte s'y prête.³

1. Quelques rares exercices sont sans doute plus difficiles. La difficulté étant en partie subjective, je n'ai pas donné d'indication de niveau. J'ai en tout cas évité systématiquement les exercices à astuce.

2. Les amateurs d'algèbre générale peuvent bien sûr me solliciter pour des exercices et/ou des lectures complémentaires.

3. Les rapports de concours déplorent fréquemment le manque de dessins, notamment à l'oral.

Table des matières

1	Nombres complexes	3
2	Asymptotique	4
3	Suites réelles et complexes	5
4	Séries et familles sommables	6
5	Fonctions de variable réelle : continuité	8
6	Fonction de variable réelle : dérivabilité, convexité	9
7	Fonctions de variable réelle : classe C^k	11
8	Intégration et équations différentielles	13
9	Polynômes et fractions rationnelles	15
10	Algèbre linéaire : point de vue géométrique	18
11	Matrices	20
12	Espaces euclidiens	24
13	Probabilités	26
14	Calcul différentiel	29
15	Quelques exercices plus difficiles	30

1 Nombres complexes

Outre les deux types de représentation des nombres complexes (partie réelle et imaginaire, module et argument), il faut connaître :

- la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré ;
- les transformations de $1 + e^{it}$ et $1 - e^{it}$ par « l'arc moitié » ;
- les techniques de calcul de sommes trigonométriques, fondées sur le « passage dans $\mathbb{C}$ » ;
- les racines n -ièmes de 1 et la résolution de l'équation $z^n = a$;
- l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité ;
- l'interprétation géométrique de $\frac{c-a}{b-a}$.

1. * Suites arithmético-géométriques

La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = ax_n + b.$$

Calculer x_n en fonction de x_0, a, b, n .

2. * Noyaux de Dirichlet et Féjer

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, soit

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \quad \text{et} \quad K_n(x) = \sum_{j=0}^n D_j(x).$$

Donner des expressions simples de $D_n(x)$ et $K_n(x)$. Montrer en particulier que $K_n(x) \in \mathbb{R}^+$.

3. * Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$:

$$P(0) = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in U_n} P(\omega).$$

b) Montrer que $|P(0)| \leq \max\{|P(\omega)| ; \omega \in U_n\}$ et caractériser le cas d'égalité.

4. Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

a) Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$, $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Indiquer un polynôme Q de $\mathbb{Q}[X]$ de degré $n-1$ tel que $Q(\omega) = 0$.

b) Soit $x = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. En utilisant a) et en remarquant que

$$x = \omega + \frac{1}{\omega}, \quad \text{avec} \quad \omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right),$$

trouver une équation de degré 2 à coefficients rationnels satisfaite par x , puis calculer x .

5. Soit $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. Montrer que les complexes a, b, c sont, dans cet ordre, les sommets d'un triangle équilatéral de sens direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

2 Asymptotique

On a dit plus haut le rôle central du calcul asymptotique. Les exercices suivants sont donc particulièrement importants. Les douze premiers sont des applications immédiates du cours et devraient être traités très rapidement (une heure pour l'ensemble).

Il est essentiel de bien connaître les développements limités usuels et de savoir mener rapidement un calcul simple de développement limité. Quelques points importants :

- prévoir a priori l'ordre du développement, pour limiter les calculs,
- factoriser les termes prépondérants,
- multiplier si besoin est les calculs intermédiaires,
- ne pas oublier que 1^∞ est une forme aussi indéterminée que $0 \times \infty$,
- se souvenir que les équivalents ne passent pas à l'exponentielle, et plus précisément, que :

$$e^{a_n} \sim e^{b_n} \Leftrightarrow a_n - b_n \rightarrow 0.$$

D'autre part, les deux relations suivantes sont souvent utiles :

- $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2},$
- $\arccos(1-x) \sim \sqrt{2x}$ quand $x \rightarrow 0^+.$

6. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ a-t-on : $e^{(n+1)^\alpha} \sim e^{n^\alpha}$?
7. Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\ln(\cos(x))$.
8. Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{x}{e^x - 1}$.
9. Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\exp(e^x)$.
10. Développement limité à l'ordre 3 en 1 de $\frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$.
11. Équivalent en 0 de $\frac{1}{\tan(x)} + \frac{1}{\sin(x)} - \frac{2}{x}$.
12. Limite en 0 de $(\cos(x))^{\cotan^2(x)}$.
13. Limite en $+\infty$ de $\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.
14. Limite en $+\infty$ de $\left(\frac{2}{\pi} \arctan(x)\right)^x$.
15. Limite en $\pi/4$ de $(\tan(x))^{\tan(2x)}$.
16. Soient a et b deux réels, avec $a > 0$. Équivalent en $+\infty$ de $\ln(\ln(ax+b)) - \ln(\ln(x))$.
17. Soit α dans $\mathbb{R}^{+*}$. Équivalent en $+\infty$ de $(\operatorname{ch}(x))^\alpha - (\operatorname{sh}(x))^\alpha$.
18. Soient u et v dans $\mathbb{R}^{+*}$, (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telles que :

$$a_n^n \rightarrow u, \quad b_n^n \rightarrow v.$$

Déterminer la limite de :

$$\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^n.$$

Les exercices ci-après concernent l'étude asymptotique d'équations à paramètre. L'existence et l'unicité des racines d'une équation s'établissent le plus souvent en étudiant des variations ; l'étude des variations permet aussi, par simple lecture du tableau, de placer un réel par rapport aux racines d'une équation, et donc d'encadrer les racines.

19. Soit :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x + x \end{array}$$

a) Montrer, en citant un théorème précis, que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque f^{-1} est de classe C^∞ .

b) Donner un équivalent de $f^{-1}(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$, puis un développement asymptotique à deux termes.

20. Soit $n \geq 3$ un entier.

a) Montrer que l'équation $x^n e^{-x} = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ admet exactement deux solutions. On les note x_n et y_n avec $x_n < y_n$.

b) Montrer que $(y_n)_{n \geq 3}$ tend vers $+\infty$ et donner un équivalent de y_n .

c) Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ à préciser.

d) Donner un équivalent de $x_n - \ell$.

21. a) Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède, si $n \in \mathbb{N}$, une unique racine x_n dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

b) Donner un équivalent simple de x_n , puis un développement asymptotique à trois termes.

3 Suites réelles et complexes

Les points essentiels sont les suivants :

- définitions de la convergence, de la divergence vers $\pm\infty$;
- théorèmes de limite monotone ;
- étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$;
- théorème de Bolzano-Weierstrass sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass est fondamental. Il est important d'en maîtriser les démonstrations dans les cas réel (dichotomie) et complexe (extractions successives).

22. * Trouver les z dans $\mathbb{C}$ tels que la suite $(z^n)_{n \geq 0}$ converge.

23. * Autour du théorème de Cesàro

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$.

a) Montrer que si $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers le réel ℓ , il en est de même de $(y_n)_{n \geq 0}$. Que se passe-t-il si $(x_n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$?

b) Donner un exemple montrant que « la » réciproque du résultat de a) est fausse. Que dire si on suppose que $(x_n)_{n \geq 0}$ est monotone ?

c) Soient d un entier ≥ 2 . On suppose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+d} = x_n.$$

Montrer que $(y_n)_{n \geq 0}$ converge vers un nombre réel que l'on précisera.

d) On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = (-1)^n \sqrt{n}.$$

Étudier la convergence de $(y_n)_{n \geq 0}$.

e) On suppose que $(y_n)_{n \geq 0}$ converge dans $\mathbb{R}$. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$.

24. * *Théorèmes du point fixe attractif, du point répulsif*

Soit f une application de classe C^1 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans lui-même, $a \in I$ un point fixe de f , $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Dans les questions a) et b), on suppose que $|f'(a)| < 1$. On fixe $k \in]|f'(a)|, 1[$,

a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f soit k -lipschitzienne sur $I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$.

b) Si $u_0 \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers a .

Un dessin est recommandé. On notera que le résultat est local : si u_0 est loin de a , le comportement de $(u_n)_{n \geq 0}$ peut être très différent.

c) Dans cette question, on suppose que $|f'(a)| > 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers a si et seulement si elle est stationnaire.

25. * *Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$*

Soit (x_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une extractrice φ telle que

$$x_{\varphi(n)} \rightarrow +\infty.$$

26. * *Caractérisation des suites convergentes*

a) Montrer qu'une suite complexe bornée converge si et seulement si elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

b) Montrer que cet énoncé est faux si l'on omet l'hypothèse « bornée ».

27. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle bornée telle que

$$u_{n+1} - u_n \rightarrow 0.$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$ est un intervalle.

Prendre a et b deux valeurs d'adhérence avec $a < b$ et c dans $]a, b[$. Un dessin dit pourquoi c est valeur d'adhérence. Il reste à formaliser.

4 Séries et familles sommables

Les points essentiels du cours de première année sont les suivants :

- pour une série à termes positifs, équivalence entre la convergence et le caractère majoré de la suite des sommes partielles ;
- convergence des séries de Riemann ; convergence et somme en cas de convergence d'une série géométrique ;
- la convergence absolue implique la convergence ;

- règle spéciale des séries alternées.

Il est également demandé de savoir manipuler les familles sommables, indispensables en probabilités et très utiles en analyse. En pratique, on utilise deux faits :

- on peut calculer par des regroupements arbitraires la somme d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$;

- on peut calculer par des regroupements arbitraires d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes, à condition que cette famille soit sommable, i.e. que $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$.

28. Étudier la convergence de la série de terme général ci-après :

- (a) $f\left(\frac{1}{n}\right)$ où f est une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$,
- (b) $f(n)$ où f est une fraction rationnelle sans pôle réel,
- (c) $\exp(-(\ln(n))^\alpha)$, avec $\alpha > 0$,
- (d) $\frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$,
- (e) $\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}\right)\right)$,
- (f) $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$,
- (g) $p_n^{-p_n}$ où p_n est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n ,
- (h) $\operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n^\alpha)\right)$ avec $\alpha > 0$,
- (i) $\cos\left(\frac{a}{n}\right) + \sin\left(\frac{b}{n}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{c}{n}\right) - e^a \left(1 + \frac{b+c}{n}\right)^n$ avec a, b, c dans $\mathbb{R}$,
- (j) $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$,
- (k) $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$, où $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$,
- (l) $\frac{(-1)^{\lfloor \ln(n) \rfloor}}{n}$,
- (m) $\frac{|\cos(2^n x)|}{n}$ où $x \in \mathbb{R}$,
- (n) $\frac{\sin(\ln(n))}{n}$.

29. * Donner deux suites réelles $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ telles que $\sum a_n$ converge, $\sum b_n$ diverge et que $a_n \sim b_n$.

30. * Donner un exemple de suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de réels positifs ou nuls telle que $\sum u_n$ converge mais que la suite $(n^\alpha u_n)_{n \geq 1}$ ne soit bornée pour aucune valeur de α dans $\mathbb{R}^{+*}$.

31. * On suppose que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et que $\sum u_n$ converge. Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

32. Soit H_n la somme partielle d'indice n de la série harmonique. Si $x > 0$, soit $a(x)$ le cardinal de l'ensemble :

$$\{n \in \mathbb{N}^* ; H_n \leq x\}.$$

Donner un équivalent de $a(x)$ en $+\infty$.

33. Pour quels nombres réels α la famille $\left(\frac{1}{n^{\alpha m}}\right)_{m \geq 2, n \geq 2}$ est-elle sommable ? Calculer sa somme pour $\alpha = 1$.

34. Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ et $C \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{C}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K n^C.$$

35. Si $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$, montrer que $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $\left\{ \sum_{i \in F} a_i ; F \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$ est une partie bornée de $\mathbb{C}$.

5 Fonctions de variable réelle : continuité

Les points majeurs sont les suivants :

- définition des fonctions continues, caractérisation séquentielle ;
- théorème des valeurs intermédiaires, image continue d'un segment et application à l'existence d'extrema ;
- définition de l'uniforme continuité et théorème de Heine.

36. * La plus classique des équations fonctionnelles

Déterminer les applications continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

37. Que dire d'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont 1 et $\sqrt{2}$ sont périodes ?
38. a) L'image d'un intervalle borné I de $\mathbb{R}$ par une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ est-elle bornée ?
- b) L'image d'un intervalle borné I de $\mathbb{R}$ par une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-elle bornée ?
39. *Existence de points fixes*
- a) Si f est une application continue de $[0, 1]$ dans lui-même, montrer que f a un point fixe.
- b) Une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a-t-elle nécessairement un point fixe ?
- c) Soient k dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) - kx$ soit bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f a un point fixe.

40. * *Existence d'un minimum global*

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Montrer qu'il existe x_0 dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(x_0).$$

L'idée est de se ramener à un segment. Dessin !

41. Montrer que, si f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

42. Soit f une application continue et surjective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}^+$.

43. Indiquer une application continue et bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ non uniformément continue.

Il suffit, pour montrer qu'une fonction f n'est pas uniformément continue, de produire deux suites (x_n) et (y_n) telles que $(x_n - y_n)$ tende vers 0 sans que $(f(x_n) - f(y_n))$ tende vers 0. Il n'est pas difficile d'en déduire un exemple (dessin).

44. Montrer qu'une fonction continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

45. * Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f(x)| \leq Ax + B.$$

Soit $\delta > 0$ d'uniforme continuité associé à 1. En faisant un pas de δ en abscisse, on fait un pas d'au plus 1 en ordonnée. Un dessin dit alors tout.

6 Fonction de variable réelle : dérivabilité, convexité

Pour la dérivabilité, les points essentiels sont les suivants :

- dérivabilité, interprétation en terme de développement limité à l'ordre 1 et en termes de tangente, opérations sur les fonctions dérivables ;
- condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur ;
- théorème de Rolle (qui est, avec le théorème des valeurs intermédiaires, l'outil essentiel pour produire des zéros) ;
- théorème des accroissements finis, application à la variation des fonctions et au théorème de la limite de la dérivée.
- fonctions de classe C^1 , définition, classe C^1 par prolongement ;
- notion de fonction convexe, inégalité de Jensen, inégalité des pentes, caractérisation des fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables, inégalités de convexité.

Les remarques ci-après sont importantes.

- Sans hypothèse particulière, on ne peut contrôler f' à partir de f : une fonction peut être partout petite avec une dérivée grande en certains points. La raison en est qu'on ne peut pas dériver les inégalités.

- En revanche, on peut intégrer les inégalités et donc contrôler f à partir de f' . Dans le cas C^1 , on récupère f à partir de f' et de l'égalité $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'$ Le théorème

des accroissements finis est en fait un théorème d'intégration. Sous la seule hypothèse « f dérivable » (qui ne permet pas d'utiliser l'intégrale), il établit l'implication

$$\forall x \in [a, b], \quad m \leq f'(x) \leq M \implies m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

En particulier, si $|f'|$ est majorée par M , alors f est M -lipschitzienne. Cinématique : en se déplaçant à vitesse au plus égale à M pendant un intervalle de temps T , on parcourt une distance majorée par MT .

46. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en x_0 . On pose :

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}.$$

La fonction M est-elle dérivable en x_0 ?

Dessin !

47. Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en 0 et nulle en 0. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit

$$u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k^2}{n^3}\right).$$

Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge, déterminer sa limite.

48. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = x^{3/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ mais que f' n'est pas continue en 0. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, quelle est l'image de $]0, \alpha[$ par f' ?

49. * *Contrôle des annulations de f à partir de celles de $f^{(n)}$*

Soit f une fonction n fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f^{(n)}$ s'annule en exactement p points distincts de $\mathbb{R}$. Majorer le nombre de points en lesquels f s'annule.

50. *Dérivation et caractère lipschitzien*

a) Montrer qu'une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que toute application de classe C^1 sur un segment S de $\mathbb{R}$ y est lipschitzienne.

51. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f(x)| \leq Cx.$$

Les deux exercices ci-après illustrent le fait qu'il est possible de contrôler f à partir de f' et non pas l'inverse.

52. Soient $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, f une fonction dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda$. Montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda.$$

53. (*) Donner un exemple de fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite en $+\infty$ mais telle que f' ne tende pas vers 0 en $+\infty$.

Pour la convexité, les points essentiels sont :

- la formulation de la convexité en termes de pentes ;
- les caractérisations des fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables ;
- l'utilisation de la convexité pour établir des inégalités.

Les inégalités de l'exercice ci-après sont classiques et doivent être connues.

54. * Inégalités de convexité

Prouver les inégalités ci-après :

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1,$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leq x - 1,$
- $\forall x \in [0, \pi/2], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x,$
- Inégalité de Young

Soient $p \in]1, +\infty[, q$ le réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, a et b dans $\mathbb{R}^{+*}$. Alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

- Inégalité arithmético-géométrique

Soient $n \in \mathbb{N}^*, x_1, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. alors

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right).$$

55. Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexes et majorées sur $\mathbb{R}$.
56. Soit f une fonction convexe de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. À quelle condition f peut-elle être prolongée en une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

7 Fonctions de variable réelle : classe C^k

Voici les principaux résultats relatifs aux fonctions de classe C^k :

- opérations, notamment formule de Leibniz ;
- théorème de classe C^k par prolongement ;
- formules de Taylor globales, c'est-à-dire avec reste intégral ou inégalité de Taylor-Lagrange ;
- formule de Taylor-Young.

Les deux types de formules de Taylor ont des champs d'action bien distincts. La formule de Taylor-Young donne des renseignements locaux, c'est-à-dire valables sur un voisinage (non précisé) d'un point donné x_0 . La formule avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange fournissent des informations valables sur tout un intervalle.

57. * Une fonction C^∞ non identiquement nulle plate à tout ordre en 0

a) Montrer que $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées s'annulent en 0.

b) Donner un exemple de fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ de classe C^∞ telle que

$$f(x) > 0 \iff x \in]0, 1[.$$

58. Contre-exemple à une idée naïve

La fonction f est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = e^{-1/x^2} \sin^2(1/x), \quad f(0) = 0.$$

Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, que f a un minimum global en 0, que f n'est monotone sur aucun intervalle $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$.

Les deux exercices ci-après sont des applications simples et **très importantes** de la formule de Taylor-Young.

59. * Les zéros d'ordre fini sont isolés⁴

a) Soient f une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a un point tel que $f(a) = 0$. On suppose qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $[a - h, a + h] \setminus \{a\}$.

b) Soit f une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout zéro a de f , il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Si S est un segment de $\mathbb{R}$, montrer que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur S .

60. * Dérivées en un point et extrema

Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) On suppose que f a un maximum local en 0. Montrer que

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) \leq 0.$$

b) On suppose que $f'(0) = 0$ et que $f''(0) < 0$. Montrer que f a un maximum local en 0.

61. Expliciter $C > 0$ tel que

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty[,\quad |\ln(1+x) - x| \leq Cx^2.$$

62. Soit f une fonction de classe C^2 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = f'(1) = 0$. Montrer qu'il existe c dans $[0, 1]$ tel que

$$|f''(c)| \geq 4 |f(1) - f(0)|.$$

L'intuition est claire : si un point parcourt une certaine distance pendant un certain intervalle de temps en partant et en arrivant à vitesse nulle, l'accélération est « grande » quelque part.

4. Résultat et démonstration particulièrement importants.

63. * *Inégalité de Landau*

Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f et f'' bornées sur $\mathbb{R}^+$, respectivement par M_0 et M_2 .

Si x est dans $\mathbb{R}^+$ et h dans $\mathbb{R}^{+*}$, exprimer $f'(x)$ à l'aide de $f(x)$, $f(x+h)$ et des valeurs de f'' sur $[x, x+h]$ de manière à établir l'inégalité :

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par $2\sqrt{M_0 M_2}$.⁵

64. (*) *Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange*

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, f une fonction de classe C^{n+1} de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, $p \in \mathbb{R}_n[X]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f en $x_0, \dots, x_n$. Montrer que, pour x dans $[a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

On pourra introduire une fonction auxiliaire judicieuse.

8 Intégration et équations différentielles

Il est indispensable de maîtriser les points suivants :

- linéarité et croissance de l'intégrale, inégalité triangulaire ;
- sommes de Riemann ;
- intégrale fonction de sa borne supérieure (dérivation) ;
- techniques de calcul : intégration par parties, changement de variable, primitives usuelles.

65. Si u et v sont deux applications de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$ et f une application continue de I dans $\mathbb{R}$, dériver :

$$\Phi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f.$$

66. *Comparaison somme intégrale*

Soit α dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(n^\alpha).$$

67. Soit f une application continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les primitives de f soient périodiques.

5. Les courageux pourront chercher à généraliser : si $n \geq 2$ est un entier, si f est une fonction de classe C^n de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, si f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$, alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et on peut donner des bornes semblables à celle obtenue dans cet exercice.

68. * *Fonctions dont les premiers moments sont nuls*

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \int_a^b f(t) t^k dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $]a, b[$.

Observer que, pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, on a $\int_a^b fP = 0$. Raisonner ensuite par l'absurde : si f s'annule au plus n fois sur $]a, b[$, considérer les points en lesquels f s'annule en changeant de signe, construire P dans $\mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$ tel que fP soit ≥ 0 sur $[a, b]$.

69. Calculer les primitives de

$$x \mapsto e^{ax} \cos(bx).$$

70. Calculer les primitives de Arctan sur $\mathbb{R}$.

71. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}.$$

72. Calculer, si $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^x \frac{dt}{2 + \cos t}.$$

73. * *Intégrales de Wallis*

Pour n dans $\mathbb{N}$, soit :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$

a) Pour n dans $\mathbb{N}$, exprimer W_{n+2} en fonction de W_n .

b) Calculer W_n en fonction de n . On discutera selon la parité de n .

c) Étudier la monotonie de $(W_n)_{n \geq 0}$. En déduire, en utilisant a), que

$$W_{n+1} \sim W_n.$$

d) Pour n dans $\mathbb{N}$, calculer $(n+1)W_n W_{n+1}$.

e) Donner un équivalent de W_n .

74. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites $(I_n)_{n \geq 0}$ et $(J_n)_{n \geq 0}$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 f(t^n) dt, \quad J_n = n \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

75. * *Normes L^p quand p tend vers $+\infty$*

Soient f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^+$, M le maximum de f sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b f^p \right)^{1/p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M.$$

76. * *Lemme de Riemann-Lebesgue, cas C^1*

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f une fonction de classe C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. Trouver une constante $C(f) > 0$ ne dépendant que de f telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{C(f)}{|\lambda|}.^6$$

77. * *Lemme de Riemann-Lebesgue, cas général*

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f une fonction continue par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. Démontrer que

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

On commencera par le cas où f est en escalier.

Le cours de première année sur les équations différentielles se réduit à deux techniques : résolution des équations linéaires d'ordre 1 avec la « variation de la constante » et des équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Les équations étudiées sont donc soit résolues au moyen de fonctions usuelles, soit ramenées à des recherches de primitives.

78. a) Si g est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, résoudre l'équation :

$$y' + y = g.$$

On donnera une expression intégrale des solutions.

b) Soit f de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f' + f$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

79. a) Trouver les fonctions f deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - 10f'(x) + 29f(x) = 0.$$

b) Quels sont les nombres réels k tels que toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ deux fois dérivables et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + kf'(x) + f(x) = 0$$

soient bornées sur $\mathbb{R}$?

80. Soit λ un nombre réel. Trouver les fonction f dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\lambda - x).$$

Indication. Déterminer une équation différentielle linéaire (d'ordre 2) satisfaite par f .

9 Polynômes et fractions rationnelles

Ce chapitre met en jeu des techniques variées (algèbre, analyse, géométrie des nombres complexes). Les points principaux du cours de première année sont les suivants :

- *l'aspect arithmétique : division euclidienne, relation de Bézout, théorème de Gauss, factorisation en produit d'irréductibles, irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$;*

6. Attention aux modules dans les majorations.

- la notion de multiplicité d'une racine, avec (au moins en caractéristique nulle) le lien avec la dérivation, obtenu via la formule de Taylor ;
 - les relations coefficients-racines ;
 - la formule d'interpolation de Lagrange.
81. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^{2n} + 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
82. Soient $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ avec $a_n \neq 0$, $x_1, \dots, x_n$ les racines de P comptées avec multiplicités. Calculer $x_1^2 + \dots + x_n^2$ en fonction des a_i . Si $a_0 \neq 0$, calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2}$.
83. Quels sont les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(X^2 + X + 1)^2$ divise $X^{2n} + X^n + 1$?
84. *Majoration du module des racines d'un polynôme complexe*
- * a) Montrer que les racines du polynôme complexe $X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ sont de module majoré par $\max \left\{ 1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right\}$.
- b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, Γ une partie de l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{C}[X]$. Montrer l'équivalence entre :
- il existe $C > 0$ tel que, pour tout $P \in \Gamma$, les coefficients de P soient bornés par C ;
 - il existe $C' > 0$ tel que, pour tout $P \in \Gamma$, les racines de P soient bornées par C' .
85. * *Polynômes de Tchébychev*
- a) Montrer, si $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :
- $$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$
- b) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, que $T_n + T_{n+2} = 2XT_{n+1}$.
- c) Déterminer le terme de plus haut degré de T_n .
- d) Déterminer les racines de T_n , en particulier montrer qu'elles sont réelles et simples.
- e) Déterminer les x de $[-1, 1]$ en lesquels $|T_n(x)| = 1$. À quoi ressemble le graphe de la restriction de T_n à $[-1, 1]$?
- f) Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par T_n .
86. Soient $r \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que
- $$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(k) = r^k.$$
- Calculer $P(n+1)$.
87. *Polynômes de Hilbert*
- La suite $(H_n)_{n \geq 0}$ des polynômes de Hilbert est définie par :
- $$H_0 = 1 ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad H_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X - k).$$
- a) Pour n dans $\mathbb{N}$ et j dans $\mathbb{Z}$, calculer $H_n(j)$. On discutera selon la valeur de j et utilisera des coefficients binomiaux.
- b) Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si et seulement si P est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des $H_n, n \in \mathbb{N}$.

88. Dérivée d'un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

a) * Montrer que si P est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ alors P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

b) * Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$. Que dire des éventuelles racines multiples de P' ?

Il existe de nombreuses variations sur ce thème. Voici deux exemples.

c) On suppose P simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout a dans $\mathbb{C}$, $P - a$ n'a pas de racine complexe de multiplicité ≥ 3 .

d) On suppose P simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

89. * Somme de deux carrés dans $\mathbb{R}[X]$

a) Montrer que tout trinôme du second degré unitaire irréductible de $\mathbb{R}[X]$ est somme de deux carrés de $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que si P et Q sont somme de deux carrés de $\mathbb{R}[X]$, il en est de même de PQ .

c) Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$ envoie $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, alors P est somme de deux carrés de $\mathbb{R}[X]$.

90. Soient n un entier ≥ 2 , a et b deux réels. Montrer que $X^n + aX + b$ a au plus trois racines réelles distinctes.

91. a) Montrer que $X^3 + X + 1$ n'a pas de racines rationnelles, puis que ce polynôme est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

b) Donner un polynôme de degré 4 de $\mathbb{Q}[X]$ sans racine rationnelles mais réductible sur $\mathbb{Q}$.

Les exercices ci-après concernent les fractions rationnelles. Il faut savoir déterminer rapidement le coefficient d'un pôle simple.

92. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{1}{X(X-1)\cdots(X-n)}, \quad \frac{1}{X^n-1}, \quad \frac{1}{T_n}$$

où T_n est le n -ième polynôme de Tchebychev.

93. * Dérivée logarithmique

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{P'}{P}$.

Ce résultat est souvent utile : si P est factorisé, l'expression de P' obtenue par dérivation est lourde alors que celle de $\frac{P'}{P}$ est simple. Pour z non racine de P , l'équation $P'(z) = 0$ s'écrit donc plus clairement sous la forme $\frac{P'}{P}(z) = 0$. Application dans les deux exercices suivants.

94. * Théorème de Gauss-Lucas

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que toute racine de P' est barycentre à coefficients positifs de l'ensemble des racines de P .

95. Soient $a \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de $\frac{P'}{P}$ et montrer que $P' - aP$ est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

10 Algèbre linéaire : point de vue géométrique

En algèbre linéaire, on peut distinguer un peu brutalement deux points de vue qui se complètent et s'enrichissent. Le point de vue géométrique privilégie l'étude intrinsèque des objets : sous-espaces, supplémentaires, applications linéaires... Le point de vue numérique repose sur le calcul dans des bases, l'utilisation des matrices et des déterminants. Pour être véritablement efficace, il est nécessaire de maîtriser les deux aspects.

L'algèbre linéaire « géométrique » comporte, outre les définitions relatives aux espaces, sous-espaces et applications linéaires, les points suivants :

- familles libres, liées, génératrices, bases ;
- espaces de dimension finie, définition de la dimension, caractérisations des bases d'un espace de dimension n , formule de Grassmann (dimension de $F + G$) ;
- rang d'une application linéaire, théorème du rang.

96. Quelques familles libres de fonctions

a) Montrer que les fonctions :

$$f_\alpha : x \mapsto x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

forment une famille libre de l'espace des fonctions de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que les fonctions :

$$f_n : x \mapsto \sin(x^n), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

forment une famille libre de l'espace des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

c) Montrer que les fonctions :

$$f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

forment une famille libre de l'espace des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$.

97. * Condition suffisante d'intersection non nulle

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels tels que $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$. Montrer que

$$F \cap G \neq \{0\}.$$

98. * Dimension d'une intersection finie d'hyperplans

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension n , $H_1, \dots, H_m$ des hyperplans de E (avec $m < n$). Montrer que

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^m H_i \right) \geq n - m.$$

99. a) Soit n dans $\mathbb{N}$. Donner une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de polynômes de même degré.

b) Soit V un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que V contient une base dont tous les polynômes sont de degrés distincts, puis une base dont tous les polynômes ont même degré.

100. (*) *Réunion finie de sous-espaces affines stricts*

Soient V un espace vectoriel sur un corps infini $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $V_1, \dots, V_m$ des sous-espaces affines stricts de V . Montrer que

$$\bigcup_{i=1}^m V_i \neq V.$$

Les quatre exercices suivants proposent des calculs de dimension. Voici quelques méthodes pour calculer la dimension d'un espace vectoriel V :

- trouver une base de V ;
- exhiber un isomorphisme de V sur un espace de dimension connue ;
- plus généralement, écrire V comme image d'une application linéaire dont on connaît le noyau et utiliser le théorème du rang ;
- écrire V comme noyau d'une application linéaire dont on connaît l'image et utiliser le théorème du rang ;
- écrire V comme intersection d'hyperplans indépendants.

Les trois premières méthodes reviennent à paramétrer linéairement V . Les deux dernières reposent à l'inverse sur une description de V par des équations linéaires.

101. * *Changement du corps de base*

Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

102. * *Suites récurrentes*

Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$. Trouver la dimension de l'espace des suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i}.$$

103. *Matrices hermitiennes*

Montrer que l'espace des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\overline{M}^T = M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vu comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et déterminer sa dimension.

104. *Fonctions continues affines par morceaux*

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ une subdivision de $[0, 1]$. Déterminer la dimension de l'espace des fonctions f continues de $[0, 1]$ dont la restriction à $[a_k, a_{k+1}]$ est affine pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

105. * *Propriétés élémentaires du rang*

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que

$$\text{rg}(u \circ v) \leq \min\{\text{rg}(u), \text{rg}(v)\} \quad \text{et} \quad \text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

106. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie n tels que $v \circ u = 0$ et que $u + v$ soit inversible. Calculer $\text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.

107. *Noyau et image imposés*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie, E_1 et E_2 deux sous-espaces de E . Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur E_1 et E_2 pour qu'il existe f dans $\mathcal{L}(E)$ de noyau E_1 et d'image E_2 .

108. * *Rang d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces de dimension finie, f dans $\mathcal{L}(E, F)$ et g dans $\mathcal{L}(F, G)$. Montrer :

$$\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) - \dim(\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)).$$

Cette formule, que l'on obtient facilement en appliquant le théorème du rang à la restriction $\tilde{g}$ de g à $\text{Im}(f)$, est souvent utile.

109. * *Caractérisation des homothéties*

Soit f un endomorphisme du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E tel que, pour tout x de E , $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie.

110. * *Indice de nilpotence*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ tel que $f^{(p-1)}(x) \neq 0$, $f^{(p)}(x) = 0$. Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{(p-1)}(x))$ est libre.

Que peut-on en déduire sur l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n ?

111. * *Noyaux et images itérés*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie, u dans $\mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que

$$\text{Ker}(u^m) = \text{Ker}(u^{m+1}) \Rightarrow \forall k \geq m, \text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^m).$$

b) Soit p le plus petit m de $\mathbb{N}$ tel que :

$$\text{Ker}(u^m) = \text{Ker}(u^{m+1}).$$

Montrer que

$$\text{Ker}(u^p) \oplus \text{Im}(u^p) = E.$$

11 Matrices

Le calcul matriciel est un outil très puissant. Il est souvent utilisé pour l'étude des applications linéaires, mais il a une existence propre. Les points essentiels du programme de première année sont les suivants :

- calcul matriciel, notamment produit de matrices élémentaires ;
- matrice d'une application linéaire dans un couple de bases ;
- application linéaire canoniquement associée à une matrice : définition, interprétation des vecteurs colonnes comme famille génératrice de l'image, des vecteurs lignes comme systèmes d'équations du noyau ;
- matrices équivalentes, interprétation géométrique, classification des matrices équivalentes via le rang ;
- opérations élémentaires : description, interprétation comme produit matriciel, conservation du rang, effet sur le déterminant ;
- matrices semblables, interprétation géométrique, trace ;
- déterminants.

112. * *Application du calcul sur les matrices élémentaires*

- a) Rappel : que vaut le produit de deux matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
- b) Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent à toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
- c) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad f(AB) = f(BA).$$

Montrer que f est proportionnelle à la trace.

113. * *Interpolation de Lagrange et Vandermonde*

Soient $a_1, \dots, a_n$ des scalaires deux à deux distincts.

- a) Montrer que l'application linéaire :

$$P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \longmapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)) \in \mathbb{K}^n$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$.

- b) Relier ce résultat à l'interpolation de Lagrange.

- c) En déduire également que la matrice de Vandermonde associée au n -uplet $(a_1, \dots, a_n)$ est inversible (sans utiliser les déterminants).

114. * *Un calcul de dimension*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie E . Calculer la dimension du sous-espace vectoriel $A_{F,G}$ de $\mathcal{L}(E)$ constitué des u de $\mathcal{L}(E)$ tels que $u(F) \subset G$.

115. * *L'application $u \mapsto b \circ u \circ a$*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie, a et b deux endomorphismes de E de rangs respectifs r et s , Φ l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même définie par :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad \Phi(u) = b \circ u \circ a.$$

- a) Vérifier que Φ est linéaire. En utilisant l'exercice précédent, calculer la dimension du noyau de Φ .

On interprètera géométriquement la relation $b \circ u \circ a = 0$.

- b) Quel est le rang de Φ ?

- c) Montrer que l'image de Φ est l'ensemble des endomorphismes de E dont le noyau contient celui de a et dont l'image est contenue dans celle de b .

On utilisera la question précédente et un argument d'inclusion et d'égalité des dimensions.

116. * *Similitude et équivalence*

Soit $n \geq 2$ un entier.

- a) Indiquer deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ équivalentes mais non semblables.
- b) Quelles sont les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ équivalentes à une matrice nilpotente ?

117. * *Lemme d'Hadamard sur les matrices à diagonale strictement dominante*

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |m_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} |m_{i,j}|.$$

Montrer que M est inversible.

On montrera que le noyau de M est nul. Pour ce faire, on prendra X dans le noyau, on écrira les équations scalaires traduisant $MX = 0$ et on choisira une composante de X de module maximum.

118. * *Génération du groupe spécial linéaire*

Soit $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de déterminant 1 ; $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que toute matrice de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est produit de matrices de transvection.

Puisque l'inverse d'une matrice de transvection est une matrice de transvection, il s'agit, si $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, de montrer qu'en multipliant M à droite et à gauche par des matrices de transvection, on peut obtenir l'identité. Or, la multiplication à gauche (resp. droite) par une matrice de transvection s'interprète simplement au niveau des lignes (resp. colonnes).

119. Soient $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathrm{rg}(M) \geq r$ et que

$$\mathrm{rg}(M) = r \iff D = CA^{-1}B.$$

Les six exercices suivants sont consacrés à la similitude. Pour montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, on raisonne en général géométriquement : on introduit l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A et on construit une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle cet endomorphisme a pour matrice B . Les exercices suivants illustrent ce principe.

Attention, les opérations élémentaires ne transforment pas une matrice en matrice semblable.

120. * Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}I_n$. Montrer qu'il existe une matrice semblable à M dont la première colonne est

$$C = (0, 1, 0, \dots, 0)^T.$$

121. *Matrices de trace nulle*

Déduire de l'exercice précédent que, si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

On raisonne par récurrence sur la dimension.

122. *Similitude à J_r*

Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à la matrice :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si et seulement si M est de rang r et vérifie $M^2 = M$.⁷

7. À comparer au fait que les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ équivalentes à J_r sont les matrices de rang r .

123. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension n , u dans $\mathcal{L}(E)$ de rang r . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- le noyau et l'image de u sont en somme directe ;
- il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } A \in \text{GL}_r(\mathbb{K}).$$

124. **Nilpotents d'indice maximal*

Montrer que la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

si et seulement si M est nilpotente d'indice n .

125. *Nilpotents*

Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

On raisonnera par récurrence. Pour amorcer la construction, on notera que le noyau d'un endomorphisme nilpotent est non nul.

126. Montrer que la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 est semblable à la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $0, 0, \dots, 0, n$.

127. Indiquer deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ équivalentes mais non semblables.

128. * *Vandermonde*

Calculer le déterminant de Vandermonde.

129. a) Montrer que si A et H sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec H de rang 1, alors l'application :

$$t \in \mathbb{K} \mapsto \det(A + tH)$$

est affine.

- b) En déduire le déterminant d'une matrice A dont tous les coefficients d'indice (i, j) avec $i < j$ (resp. $i > j$) valent a (resp. b) avec $a \neq b$ et dont la diagonale est quelconque.

On pourra utiliser la matrice H dont tous les coefficients valent 1.

130. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : M = (C_1, \dots, C_n)$ où les C_j sont les colonnes de M . Si $1 \leq j \leq n$, on pose $C'_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} C_i$. Si $M' = (C'_1, \dots, C'_n)$, calculer $\det(M')$ en fonction de $\det(M)$.

131. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , e une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^n \det_e(x_1, \dots, x_{j-1}, u(x_j), x_{j+1}, \dots, x_n) = \text{tr}(u) \det_e(x_1, \dots, x_n).$$

12 Espaces euclidiens

Les espaces euclidiens sont une généralisation de grande portée de la géométrie métrique élémentaire. Leur force est de permettre l'emploi de l'intuition géométrique dans un grand nombre de situations. Les points essentiels du cours de première année sont les suivants :

- produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, norme associée à un produit scalaire, cas d'égalité de l'inégalité triangulaire ;
- orthogonalité, théorème de Pythagore, algorithme de Schmidt ;
- familles orthonormées, existence des bases orthonormées en dimension finie, calculs en base orthonormée (coordonnées, produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme) ;
- théorème du supplémentaire orthogonal (pour un sous-espace de dimension finie) ;
- caractérisation métrique du projeté orthogonal de x sur V (unique point de V réalisant la distance de x au sous-espace V) ; expression du projeté orthogonal en base orthonormée).

132. Soient E un espace euclidien, S sa sphère unité, p un entier ≥ 2 , f l'application de S^p dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (v_1, \dots, v_p) \in S^p, \quad f(v_1, \dots, v_p) = \sum_{1 \leq i < j \leq p} \langle v_i, v_j \rangle.$$

En considérant $\left\| \sum_{i=1}^p v_i \right\|^2$, déterminer le maximum et le minimum de f sur S^p .

133. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n$ des réels. Déterminer le maximum de $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ lorsque $(x_1, \dots, x_n)$ décrit l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$.

134. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$|\operatorname{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}.$$

135. Dans un espace préhilbertien, décrire l'ensemble des points équidistants de deux points donnés distincts a et b .
136. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur lequel la forme bilinéaire symétrique

$$(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \operatorname{tr}(XY)$$

est définie positive (i.e. est un produit scalaire) ?

137. *Contre-exemple au théorème du supplémentaire orthogonal*

L'espace E des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg.$$

Déterminer l'orthogonal du sous-espace F constitué des fonctions dont la restriction à $[0, 1]$ est nulle. Vérifier que

$$F \oplus F^\perp \neq E.$$

138. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ.$$

Calculer la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ ainsi que la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

139. * *Polynômes orthogonaux*

Soit w une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

a) Expliquer pourquoi il existe une unique suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynômes vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n est unitaire de degré n ;
- pour tous m, n de $\mathbb{N}$ tels que $m \neq n$, on a :

$$\int_0^1 P_n P_m w = 0.$$

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, P_n a n zéros simples dans $]0, 1[$.

Observer que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et se reporter à un exercice d'intégration.

c) On suppose $n \geq 2$. Montrer que $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$. En déduire qu'il existe a_n et b_n dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}.$$

140. *Matrice d'un projecteur orthogonal sur une droite*

On munit $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire euclidien canonique. Soit $V \in \mathbb{R}^n$ de norme euclidienne égale à 1 (i.e. $V^T V = 1$). Montrer que la matrice canonique du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}V$ est VV^T .

141. * *Une caractérisation des projecteurs orthogonaux*

Soient E un espace euclidien, p dans $\mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Un sens est évident. Pour l'autre, un dessin peut aider.

142. *Distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour la norme de convergence en moyenne quadratique sur $[0, 1]$*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$I(P) = \int_0^1 (t^n - P(t))^2 dt.$$

a) Montrer qu'il existe un unique P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad I(Q) \geq I(P).$$

On écrit $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ et on pose :

$$F = \frac{1}{X + n + 1} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{X + j + 1}.$$

- b) Calculer $F(i)$ si $0 \leq i \leq n-1$; en déduire F et les a_j .
 c) Montrer que $I(P) = F(n)$ et calculer cette quantité.
143. *Familles obtusangles*
 Montrer que, si E est un espace euclidien de dimension n et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E tels que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle x_i, x_j \rangle < 0,$$

alors :

$$p \leq n + 1.$$

144. *Simplexe régulier*
 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n . Montrer qu'il existe $n+1$ vecteurs unitaires $u_1, \dots, u_{n+1}$ de E tels que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \Rightarrow \langle u_i, u_j \rangle = -\frac{1}{n}.$$

13 Probabilités

Ce chapitre a pour objectif la mise en place des probabilités sur des univers finis. Le but est d'acquies, dans ce cadre restreint, une bonne maîtrise de la notion de variable aléatoire. Les points essentiels du cours sont les suivants :

- axiomatique des probabilités sur des univers finis ;
- distribution de probabilités ;
- probabilités conditionnelles et formules de Bayes ;
- définition et loi d'une variable aléatoire ;
- égalité en loi ;
- variables de Bernoulli, variables binomiales ;
- couples et marges, loi jointe d'une famille finie de variables aléatoires ;
- variables aléatoires indépendantes ;
- espérance d'une variable aléatoire, linéarité et inégalité de Markov ;
- espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes ;
- variance et covariance, expression de la variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables deux à deux indépendantes ;
- inégalité de Bienaymé-Tchebychev et concentration de la distribution binomiale.

Les variables aléatoires considérées dans les exercices sont implicitement supposées prendre un nombre fini de valeurs.

Les premiers exercices nécessitent une modélisation simple.

145. a) Que dire de deux événements indépendants A et B tels que $A \subset B$?
 b) Que dire de deux événements indépendants et incompatibles ?
 c) Les événements $A_1, \dots, A_k$ sont mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_1, \dots, p_k$. Calculer la probabilité de $\bigcup_{i=1}^k A_i$.

146. Un joueur de tennis A en affronte deux autres, B et C , C étant meilleur que B . Il gagne s'il gagne deux matchs consécutifs. Quel est l'ordre qui maximise sa chance de gagner entre BCB et CBC ?

147. *Filles et garçons*

Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$ avec $m < n$.

a) Quelle est la probabilité qu'un couple ayant n enfants dont les m premiers sont des garçons n'ait que des garçons ?

b) Quelle est la probabilité qu'un couple ayant n enfants dont au moins m garçons n'ait que des garçons ?

148. *Loi de succession de Laplace*

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Donnons nous $m + 1$ urnes $U_0, \dots, U_m$ et supposons que, pour tout k , U_k contient k boules bleues et $m - k$ boules rouges. Choisissons une des urnes et effectuons y n tirages avec remise.

a) Quelle est la probabilité, sachant que les n tirages ont donné des boules bleues, qu'il en soit de même du $(n + 1)$ -ième ?

b) Déterminer la limite de la probabilité précédente lorsque m tend vers $+\infty$.

Cet exercice est une version discrète d'un argument utilisé par Laplace pour calculer la probabilité qu'un événement qui s'est produit n fois se reproduise.

149. Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, X une variable aléatoire réelle, $Y = f(X)$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer que Y est déterministe.

150. * *Somme de deux variables binomiales indépendantes*

Soit p dans $]0, 1[$, n et n' dans $\mathbb{N}$, X et X' deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$X \sim \mathcal{B}(n, p), \quad X' \sim \mathcal{B}(n', p).$$

Démontrer, par deux méthodes différentes, que

$$X + X' \sim \mathcal{B}(n + n', p).$$

151. * *Valeurs de probabilité maximale pour la loi binomiale*

Soient p dans $]0, 1[$, n dans $\mathbb{N}^*$, X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Pour $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, comparer $P(X = k + 1)$ et $P(X = k)$. En déduire le maximum de

$$\{P(X = k) ; 0 \leq k \leq n\}.$$
⁸

Les deux exercices ci-après concernent les lois marginales. Il est essentiel de comprendre que la donnée des lois de deux variables aléatoire est une information beaucoup plus faible que celle de la donnée de la loi du couple.

152. *Égalité de deux variables de Bernoulli*

Soient p et p' dans $[0, 1]$. Déterminer l'ensemble des nombres réels de la forme $P(X = X')$ où X et X' sont deux variables aléatoires de Bernoulli, de paramètres respectifs p et p' , définies sur un même espace probabilisé.

8. Il est important d'avoir en tête l'histogramme de la distribution binomiale.

153. Soient $a \in \mathbb{R}$, n et m dans $\mathbb{N}^*$, $X_1, \dots, X_{n+m}$ des variables aléatoires réelles i.i.d..⁹ Pour $k \in \llbracket 1, m+n \rrbracket$ soit

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

Montrer que

$$P(S_{m+n} \geq (m+n)a) \geq P(S_n \geq na) P(S_m \geq ma).$$

On demande une démonstration correctement formalisée. Le concept d'égalité en loi est très utile!

154. *Calculs d'espérances et de variances par la méthode des sommes d'indicatrices*
 a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$, X la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes de σ . Calculer l'espérance et la variance de X .
 b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, p un nombre premier, P une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{F}_p[X]$, N la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes distincts de P dans $\mathbb{F}_p$. Calculer l'espérance et la variance de N .
 155. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. strictement positives et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer en fonction de n et k uniquement

$$E\left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n}\right).$$

156. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi strictement positives. Montrer que

$$E\left(\frac{Y}{X}\right) \geq 1.$$

157. *Généralisation du précédent*

Soient a, b, m des réels avec $a \leq m \leq b$, f une fonction convexe de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est la valeur maximale de $E(f(X))$ pour X variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$ d'espérance m ?

158. *Déterminant aléatoire*

Soit $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes centrées réduites.

- a) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire D , égale au déterminant de la matrice $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
 b) Si $a \in \mathbb{R}^{+*}$, montrer que

$$P(|D| \geq a\sqrt{n!}) \leq \frac{1}{a^2}.$$

159. *Méthode probabiliste*

Utiliser l'exercice précédent pour montrer l'existence de $M \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ telle que

$$\det(M) \geq \sqrt{n!}.$$

160. (*) *Concentration de la binomiale*

Soit $p \in]0, 1[$ et $\lambda \in]0, 1[$. Déterminer la limite de

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \lambda n \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

9. Abréviation standard pour « indépendantes (mutuellement) et identiquement distribuées », i.e. mutuellement indépendantes et de même loi.

14 Calcul différentiel

L'objectif essentiel de ce chapitre est une bonne maîtrise du calcul des dérivées partielles d'une fonction composée.

161. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Calculer les dérivées partielles des fonctions

$$u : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x^2y + e^{xy}, \cos(x^3y^2)) \quad \text{et} \quad v : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(y, x).$$

162. (*) *Gradient en coordonnées polaires*

Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$ et F la fonction de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Déterminer les coordonnées du gradient de f au point $(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ dans la base $((\cos(\theta), \sin(\theta)), (-\sin(\theta), \cos(\theta)))$ de $\mathbb{R}^2$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)$ et de $\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)$.

Les exercices suivants sont des exemples simples d'équations aux dérivées partielles reflétant des propriétés géométriques des fonctions considérées.

163. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

- la fonction $a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}$ est nulle sur $\mathbb{R}^2$;
- la fonction f est constante sur les droites affines dirigées par le vecteur (a, b) ;
- il existe une fonction g de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(bx - ay).$$

164. (*) *Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes*

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- pour $(t, (x, y))$ dans $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y) ;$$

- pour (x, y) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f(x, y).$$

165. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = f(y, x)$$

équivalent à

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1 f(x, y) = \partial_2 f(y, x).$$

15 Quelques exercices plus difficiles

166. Transformation de Fourier sur un groupe cyclique

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Si f est une fonction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, on définit une fonction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ en posant

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{f}(\overline{k}) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\overline{j}) \omega^{-jk}.$$

a) Donner une formule exprimant f en fonction de $\widehat{f}$.

b) Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle,

$$|\text{supp}(f)| |\text{supp}(\widehat{f})| \geq n. \quad {}^{10}$$

167. Soit r un réel > 1 . Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note : $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iX)^k}{k!}$. Autrement dit, P_n est le

polynôme de Taylor de degré $n-1$ de l'exponentielle imaginaire : $x \mapsto e^{ix}$.

a) Montrer que l'équation $|P_n(x)| = r$ admet une plus petite solution dans $\mathbb{R}^+$. On note x_n cette solution.

b) Montrer que $x_n \sim \frac{n}{e}$.

168. Soient $\alpha \in]0, 1[$, $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$m_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad t_n = (1-\alpha)m_n + \alpha u_n.$$

On suppose que la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ converge. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge. ¹¹

169. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

a) On suppose f convexe sur I , $h > 0$, $x \in I$, et $[x-h, x+h] \subset I$. Montrer que

$$f(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f.$$

b) On suppose f est continue sur I et que, pour tout x de I , il existe une suite $(h_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $h_n \rightarrow 0$, $[x-h_n, x+h_n] \subset I$, et

$$f(x) \leq \frac{1}{2h_n} \int_{x-h_n}^{x+h_n} f.$$

Montrer que f est convexe sur I .

170. (***) Une forme affaiblie de l'inégalité de Remez

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, $S = [a, b]$, E une réunion finie de sous-segments de S dont l'un au moins est de longueur strictement positive. Soit $\ell > 0$ la longueur ¹² de E . Trouver une constante absolue $C > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \|P\|_{\infty, S} \leq C^n \left(\frac{b-a}{\ell} \right)^n \|P\|_{\infty, E}. \quad {}^{13}$$

10. Principe d'incertitude de Donoho-Stark pour les groupes cycliques. Une fois connue la notion de caractère, cet énoncé se généralise naturellement à tout groupe abélien fini.

11. Théorème dû à Mercer, 1906.

12. En fait, la mesure de Lebesgue.

13. L'inégalité de Remez (1936) assure que l'on peut prendre $C = 4$.

171. Soient α et β deux réels non nul tels que $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$, f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$x \mapsto f(x + \alpha) - f(x) \quad \text{et} \quad x \mapsto f(x + \beta) - f(x)$$

soient polynomiales sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est polynomiale.

172. *Théorème de Corominas et Sunyer y Balaguer, 1954.*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction de classe C^∞ de I dans $\mathbb{R}$.

a) On suppose que f n'est pas polynomiale sur I . Montrer qu'il existe un segment J de I sur lequel f n'est pas polynomiale et ne s'annule pas.

b) On suppose que f n'est pas polynomiale sur I . Montrer qu'il existe $x \in I$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) \neq 0.$$

Quelle caractérisation des fonctions polynomiales obtient-on ainsi ?

173. Montrer qu'il n'existe pas de quadruplet (f_1, f_2, f_3, f_4) de fonctions polynomiales définies sur un voisinage de 0 et à valeurs réelles telles que :

- pour $x < 0$ suffisamment proche de 0, $f_1(x) < f_2(x) < f_3(x) < f_4(x)$;

- pour $x > 0$ suffisamment proche de 0, $f_2(x) < f_4(x) < f_1(x) < f_3(x)$.

174. (***) *Inégalité de Bernstein sur le cercle*¹⁴

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $z_1, \dots, z_n$ les racines de $X^n + 1$, P dans $\mathbb{C}_n[X]$.

a) Démontrer :

$$XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}.$$

b) Dédire de a) l'inégalité de Bernstein suivante :

$$\max\{|P'(z)| ; z \in \mathbb{U}\} \leq n \max\{|P(z)| ; z \in \mathbb{U}\}.$$

175. *2-valuation des nombres harmoniques*

On étend naturellement la notion de valuation à $\mathbb{Q}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la 2-valuation

$$\text{de } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} ?$$

176. *Sous-groupes de $(\mathbb{Q}, +)$*

Les deux questions sont indépendantes

a) Montrer que $(\mathbb{Q}, +)$ n'a aucun sous-groupe maximal au sens de l'inclusion.

b) Montrer que l'ensemble des sous-groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ est infini non dénombrable.

177. Montrer que, si $\ell \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $m' \in \mathbb{Z}$ tels que l'ensemble

$$\llbracket m + 1, m + \ell \rrbracket \times \llbracket m' + 1, m' + \ell \rrbracket$$

ne contienne aucun point dont les coordonnées sont premières entre elles.

178. *Sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ engendré par un n -cycle et une transposition*

Soient $n \geq 3$ un entier, r et s dans $\{1, \dots, n\}$ tels que $r < s$, $G_{r,s}$ le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ engendré par $(12 \dots n)$ et (rs) . À quelle condition a-t-on $G_{r,s} = \mathcal{S}_n$?

14. Bernstein, 1912.

179. *Ordre maximal d'un élément de $\mathcal{S}_n$*

Donner une minoration asymptotique de ω_n , ordre maximal d'un élément de $\mathcal{S}_n$ lorsque n tend vers $+\infty$, montrant en particulier que $(\omega_n)_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$ plus vite que toute suite $(n^k)_{n \geq 1}$.

180. *Existence d'un élément d'ordre 2 ayant un gros centralisateur dans un groupe fini*¹⁵

Soit G un groupe fini.

a) Soient s et t deux éléments d'ordre 2 de G . Montrer que soit s et t sont conjugués, soit il existe un élément d'ordre 2 qui commute à s et t .

b) On suppose que G contient deux éléments d'ordre 2 non conjugués. Montrer qu'il existe un élément d'ordre 2 dont le centralisateur est d'ordre strictement supérieur à $\sqrt[3]{|G|}$.

181. *Une version discrétisée du problème de Dirichlet relatif aux fonctions harmoniques*

Soit n un entier ≥ 3 . On pose

$$\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^2 \setminus \{(1, 1), (1, n), (n, 1), (n, n)\} \quad \text{et} \quad \partial\Omega = \Omega \setminus \llbracket 2, n-1 \rrbracket^2.$$

On note $H(\Omega)$ l'espace des fonctions f de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \Omega \setminus \partial\Omega, \quad f(i, j) = \frac{1}{4} (f(i-1, j) + f(i+1, j) + f(i, j-1) + f(i, j+1)).$$

a) Si f est dans $H(\Omega)$, montrer le principe du maximum :

$$\max\{f(i, j) ; (i, j) \in \Omega\} = \max\{f(i, j), (i, j) \in \partial\Omega\}.$$

b) Montrer que l'application de $H(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^{\partial\Omega}$ qui à f associe sa restriction à $\partial\Omega$ est un isomorphisme de $H(\Omega)$ sur $\mathbb{R}^{\partial\Omega}$. En déduire la dimension de $H(\Omega)$.

182. Soient $(d, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle réalisation en dimension d de M un triplet $(E, (\varphi_1, \dots, \varphi_n), (x_1, \dots, x_n))$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension d , $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in (E^*)^n$, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et où

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad M_{i,j} = \varphi_i(x_j).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de M pour que M admette une réalisation en dimension d .

183. Soient $\mathbb{K}$ un corps fini, $q = |\mathbb{K}|$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathbb{P}^1(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E . Si $\mathcal{S}$ est une partie de $\mathbb{P}^1(E)$, on dit que $\mathcal{S}$ vérifie la propriété (*) si

$$\forall g \in \text{GL}(E), \quad \exists (D, D') \in \mathcal{S}^2, \quad g(D) = D'.$$

a) Soient P un plan de E , $\mathcal{S}_P$ l'ensemble des droites de P . Calculer $|\mathcal{S}_P|$ et montrer que $\mathcal{S}_P$ vérifie (*).

b) Soient D et D' dans $\mathbb{P}^1(E)$, g une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\text{GL}(E)$. Calculer $\mathbb{P}(g(D) = D')$.

c) Déterminer le cardinal minimal d'une partie de $\mathbb{P}^1(E)$ vérifiant (*).

15. Résultat dû à R. Brauer, 1956.

184. Pour quels couples (m, n) d'éléments de $\mathbb{N}^*$ existe-t-il :
- un morphisme injectif de $\mathbb{K}$ -algèbres de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
 - un morphisme injectif de $\mathbb{K}$ -algèbres de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
185. On suppose E euclidien de dimension n , $e_1, \dots, e_n$ est une base orthonormée de E . Déterminer l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ ; B_f(0, r) \subset \bigcup_{\substack{\varepsilon \in \{-1, 1\} \\ i \in \llbracket 1, n \rrbracket}} B_f(\varepsilon e_i, 1) \right\}.$$

186. Soient E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2, $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des applications continues de E dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \perp y \Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y).$$

- a) Soit f dans $\mathcal{E}$ paire. Montrer qu'il existe a dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = a\|x\|^2.$$

- b) Soit f dans $\mathcal{E}$ impaire. Montrer qu'il existe $c \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle c, x \rangle.$$

- c) Déterminer $\mathcal{E}$.

187. *Grandes parties sans somme*

- a) Soient $\mathbb{K}$ un corps fini, A et B deux parties non vides de $\mathbb{K}^*$, X une v.a.d. suivant la loi $\mathcal{U}(\mathbb{K}^*)$, $N = |A \cap XB|$. Calculer $\mathbb{E}(N)$.

- b) Avec les notations de a), montrer que, si B est sans somme, A contient une partie sans somme de cardinal au moins égal à $\frac{|A| |B|}{|\mathbb{K}^*|}$.

- c) Soit p un nombre premier de la forme $3k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Construire une partie sans somme de cardinal $k + 1$ de $\mathbb{F}_p$.

- d) Conclure que toute partie finie non vide A de $\mathbb{Z}$ contient une partie sans somme de cardinal strictement supérieur à $\frac{|A|}{3}$.¹⁶

188. *Minimisation sur un graphe connexe*

Soit (V, E) un graphe connexe, avec V fini de cardinal $n \geq 1$, f une fonction de V dans $\mathbb{R}$. Si $a \in V$, on dit que f admet un minimum local en a si $f(a)$ est inférieur ou égal à $f(b)$ pour tout voisin b de a . On fixe $M \in \mathbb{N}^*$ et on se donne $U_1, \dots, U_M$ une famille de v.a.d. suivant chacune la loi $\mathcal{U}(V)$. On définit une suite de variables aléatoires $V_0, \dots, V_M$ à valeurs dans V telle que $f(V_0) = \min\{f(U_1), \dots, f(U_M)\}$ et, si $n \in \llbracket 0, M - 1 \rrbracket$, $V_{n+1} = V_n$ si f admet un minimum local en V_n , sinon V_{n+1} est un voisin de V_n tel que $f(V_{n+1}) < f(V_n)$. Soit A l'événement « f admet un minimum local en V_M ». Montrer que

$$\mathbb{P}(A) \geq 1 - \left(1 - \frac{M}{n}\right)^M.$$

Si $M \geq \sqrt{n}$, montrer que $\mathbb{P}(A) \geq 1 - \frac{1}{e}$.

16. Résultat dû à Erdős, 1965, très récemment (2025) amélioré par Benjamin Bedert.

189. *Génération de la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$, application au nombre de cycles*

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que, si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U_i \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, i \rrbracket)$. Déterminer la loi de la permutation aléatoire

$$\sigma = (1 \ U_1) \circ (2 \ U_2) \circ \dots \circ (n \ U_n).^{17}$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, σ_n une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}(\mathcal{S}_n)$, C_n le nombre de cycles de σ_n . Montrer que l'on a

$$C_n \sim B_1 + \dots + B_n$$

où $B_1, \dots, B_n$ sont des v.a.d. indépendantes telles que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_i \sim \mathcal{B}(\frac{1}{i})$.

c) Déterminer, pour $\varepsilon > 0$, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{C_n}{\ln(n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right).$$

190. *Inégalité maximale de Lévy*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille indépendante de variables aléatoires discrètes réelles symétriques, m un nombre réel. Pour $0 \leq k \leq n$, soit $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$. On pose $M_n = \max\{S_k ; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(M_n > m) \leq 2 \mathbb{P}(S_n > m).$$

17. Résultat dû à Fisher et Yates, 1948, popularisé par Knuth.