Histogrammes

Introduction à la statistique descriptive

Lycée Pierre Corneille – MP

2016-2017

Calculs

But : décrire une série de données réelles $(x_i)_{i \in I}$

Calculs

But : décrire une série de données réelles $(x_i)_{i\in I}$

- Nombre de données : $N = \#(I)$

Calculs

But : décrire une série de données réelles $(x_i)_{i\in I}$

- Nombre de données : $N = \#(I)$
- **Étendue** : $m = \min\limits_{i\in I} x_i,\ M = \max\limits_{i\in I}$

Calculs

But : décrire une série de données réelles $(x_i)_{i\in I}$

- Nombre de données : $N = \#(I)$
- **Étendue** : $m = \min\limits_{i\in I} x_i,\ M = \max\limits_{i\in I}$
- Grouper les données en **classes** :

$$I_0 = [\alpha_0, \alpha_1[\,, \dots, I_{n-2} = [\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}[\,, I_{n-1} = [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$$

où $m = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = M$

Calculs

But : décrire une série de données réelles $(x_i)_{i \in I}$

- Nombre de données : $N = \#(I)$
- **Étendue** : $m = \min\limits_{i \in I} x_i$, $M = \max\limits_{i \in I}$
- Grouper les données en **classes** :

$$I_0 = [\alpha_0, \alpha_1[\,, \ldots, I_{n-2} = [\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}[\,, I_{n-1} = [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$$

  où $m = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = M$

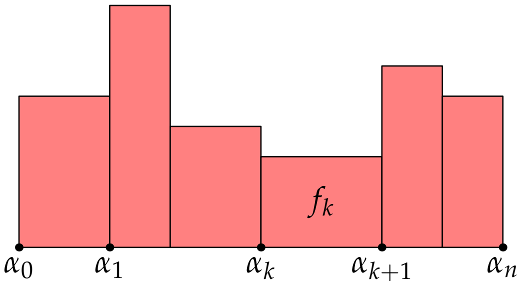
- Calculer la **fréquence** de chaque classe :

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad f_k = \frac{1}{N} \cdot \#\{i \in I \;:\; x_i \in I_k\}$$

Graphique

Chaque classe I_k est représentée par un rectangle de base $(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$ et de hauteur h_k telle que les **aires** des rectangles soient proportionnelles aux fréquences des classes.

$$A_k = (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \times h_k \propto f_k.$$



Fonction hist du module matplotlib

Arguments nécessaires :

- Série statistique : tableau unidimensionnel
- Option `normed=True`

Fonction hist du module matplotlib

Arguments nécessaires :

- Série statistique : tableau unidimensionnel
- Option `normed=True`

Argument facultatif : classes

- Par défaut, 10 classes de même taille

Fonction hist du module matplotlib

Arguments nécessaires :

- Série statistique : tableau unidimensionnel
- Option `normed=True`

Argument facultatif : classes

- Par défaut, 10 classes de même taille
- Option `bins=n` : *n* classes de même taille

Fonction hist du module matplotlib

Arguments nécessaires :

- Série statistique : tableau unidimensionnel
- Option `normed=True`

Argument facultatif : classes

- Par défaut, 10 classes de même taille
- Option `bins=n` : n classes de même taille
- Option `bins=L` où `L` est une liste strictement croissante de réels $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$

Fonction hist du module matplotlib

Arguments nécessaires :

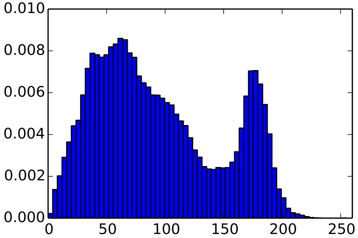
- Série statistique : tableau unidimensionnel
- Option `normed=True`

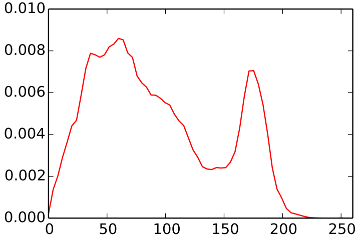
Argument facultatif : classes

- Par défaut, 10 classes de même taille
- Option `bins=n` : n classes de même taille
- Option `bins=L` où `L` est une liste strictement croissante de réels $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$: classes de tailles variables.

Graphique

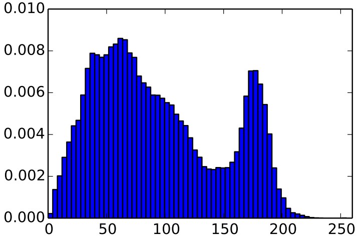
Avec un grand nombre de classes :

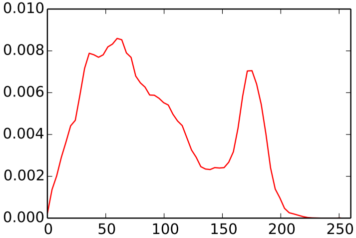




Graphique

Avec un grand nombre de classes :

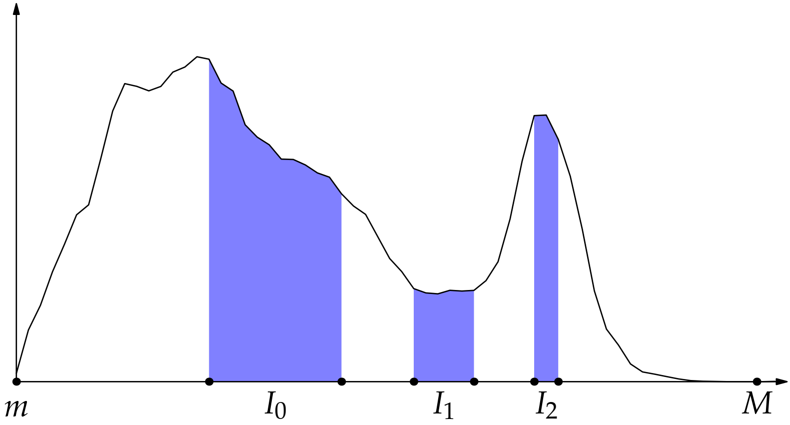




Notion de densité de probabilité

Interprétation

La fréquence d'un intervalle est estimée par un calcul d'aire.



Cas élémentaire

- Donnée
  Événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendants et de même probabilité p

Cas élémentaire

- Donnée
  Événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendants et de même probabilité p
- Étude statistique
  Proportion d'événements réalisés

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant k<n} \mathbb{1}_{A_k}$$

Cas élémentaire

- **Donnée**
  Événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendants et de même probabilité p
- **Étude statistique**
  Proportion d'événements réalisés

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant k<n} \mathbb{1}_{A_k}$$

- **Prédiction**
  La fréquence empirique f_n tend vers la probabilité p

Cas élémentaire

- Donnée
  Événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendants et de même probabilité p
- Étude statistique
  Proportion d'événements réalisés

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant k<n} \mathbb{1}_{A_k}$$

- Prédiction
  La fréquence empirique f_n tend vers la probabilité p

$\rightarrow$ *interprétation fréquentiste*
Probabilité = fréquence théorique

Généralisation

- Donnée
  Variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes et de même loi

Généralisation

- **Donnée**
  Variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes et de même loi
- **Étude statistique**
  Moyenne des valeurs observées

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant k<n} X_k$$

Généralisation

- Donnée
  Variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes et de même loi
- Étude statistique
  Moyenne des valeurs observées

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} X_k$$

- Prédiction
  La moyenne empirique M_n tend vers $\mathbf{E}(X_0)$

Généralisation

- Donnée
  Variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes et de même loi
- Étude statistique
  Moyenne des valeurs observées

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant k<n} X_k$$

- Prédiction
  La moyenne empirique M_n tend vers $\mathbf{E}(X_0)$

➙ Espérance = moyenne théorique

Exemple

Un dé à 6 faces lancé indéfiniment

Exemple

Un dé à 6 faces lancé indéfiniment

Modélisation du résultat :

- Variables indépendantes
- Loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Exemple

Un dé à 6 faces lancé indéfiniment

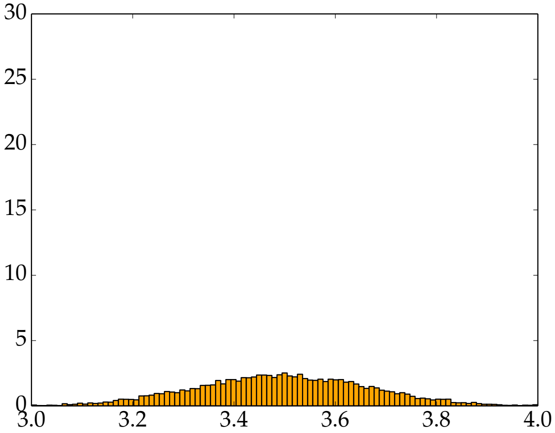
Modélisation du résultat :

- Variables indépendantes
- Loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

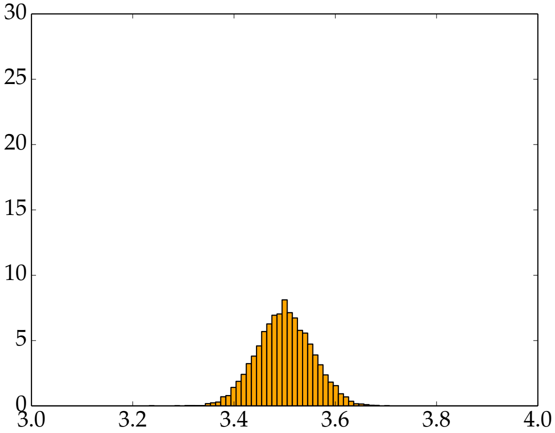
Espérance

$$\frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}$$

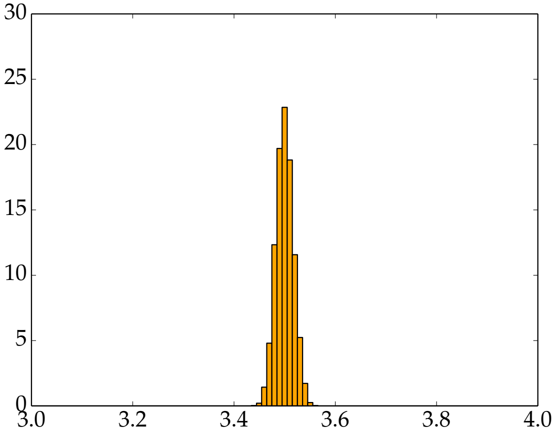
Exemple : histogramme de M_{100}



Exemple : histogramme de M_{1000}



Exemple : histogramme de M_{10000}



Hypothèses

- Données
  Échantillon $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi

Hypothèses

- Données
  Échantillon $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi
- Calculs

Hypothèses

- Données
  Échantillon $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi
- Calculs
  - Moyennes empiriques

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant k<n} X_k$$

Hypothèses

- Données
  Échantillon $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi
- Calculs
  - Moyennes empiriques

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant k<n} X_k$$

  - Centrées et réduites

$$M_n^* = \frac{M_n - \mathbf{E}(M_n)}{\sqrt{\mathbf{V}(M_n)}}$$

Répartition asymptotique

Pour $n \to +\infty$,

$$\forall\ a < b, \quad \mathbf{P}(a \leqslant M_n^* \leqslant b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

Répartition asymptotique

Pour $n \to +\infty$,

$$\forall\ a < b, \quad \mathbf{P}(a \leqslant M_n^* \leqslant b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

Indépendamment de la loi de X_0

Répartition asymptotique

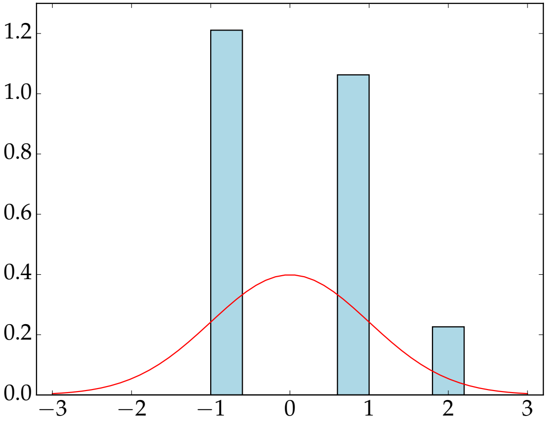
Pour $n \to +\infty$,

$$\forall\ a < b, \quad \mathbf{P}(a \leqslant M_n^* \leqslant b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

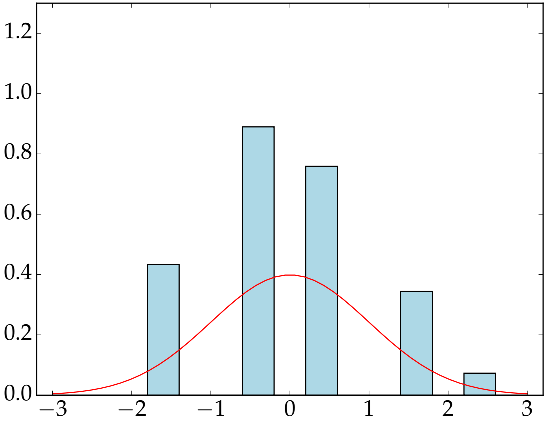
Indépendamment de la loi de X_0

➞ *Central* limit theorem

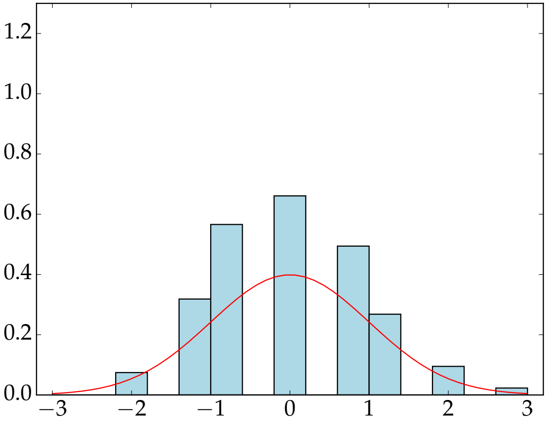
Exemple : loi de Bernoulli $\mathscr{B}(0,3)$ $n = 2$



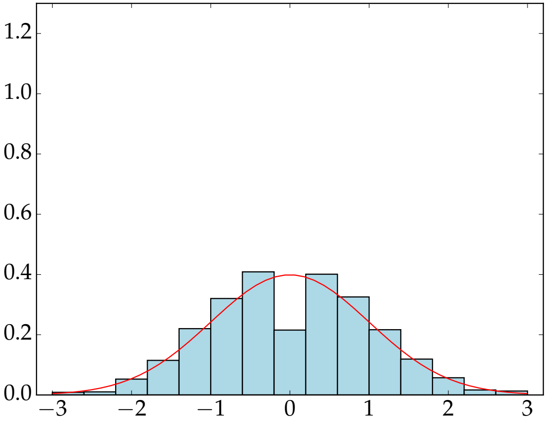
Exemple : loi de Bernoulli $\mathscr{B}(0,3)$ $n = 5$



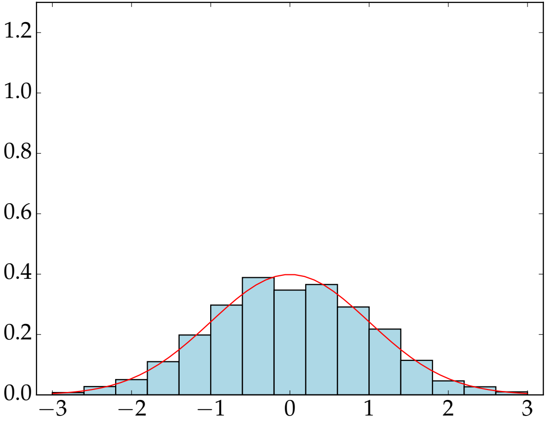
Exemple : loi de Bernoulli $\mathscr{B}(0,3)$ $n = 10$



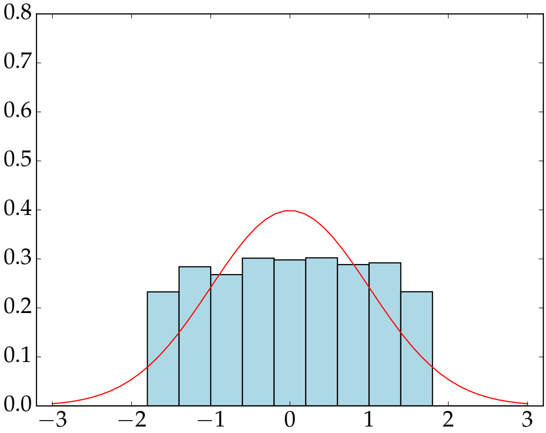
Exemple : loi de Bernoulli $\mathscr{B}(0,3)$ $n = 100$



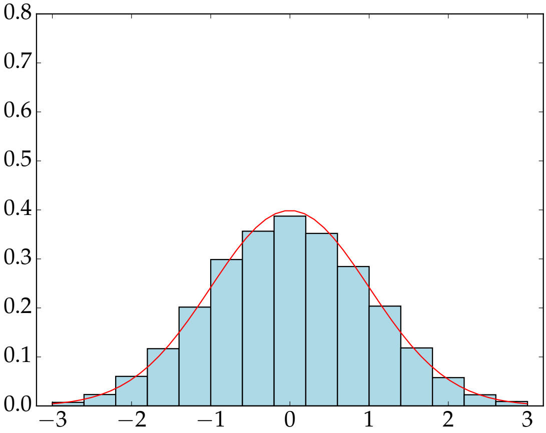
Exemple : loi de Bernoulli $\mathscr{B}(0,3)$ $n = 1000$



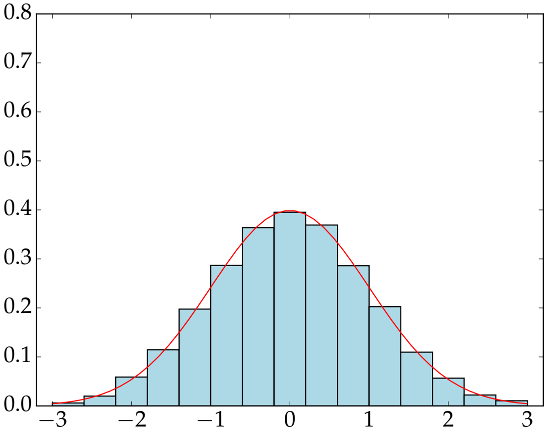
Exemple : loi uniforme sur $[0, 1]$ $\quad n = 1$



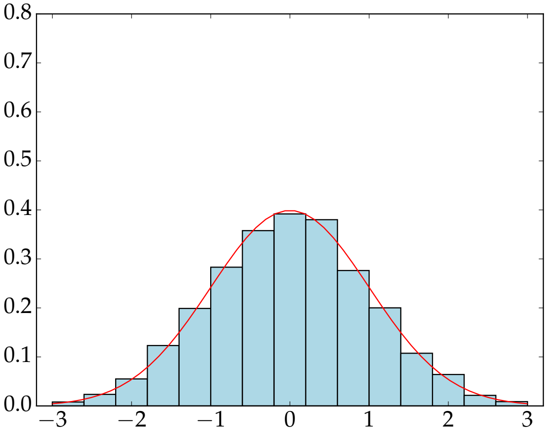
Exemple : loi uniforme sur $[0, 1]$ $\quad n = 5$



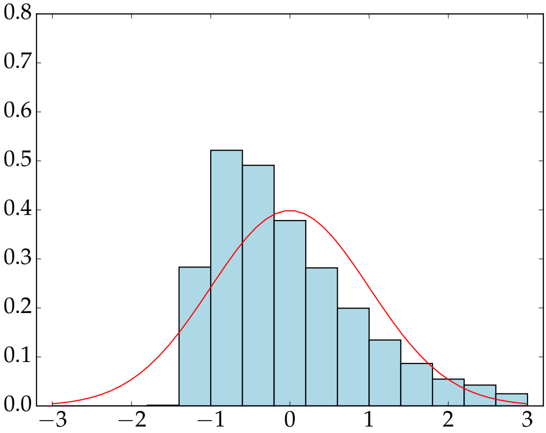
Exemple : loi uniforme sur $[0, 1]$ $\quad n = 10$



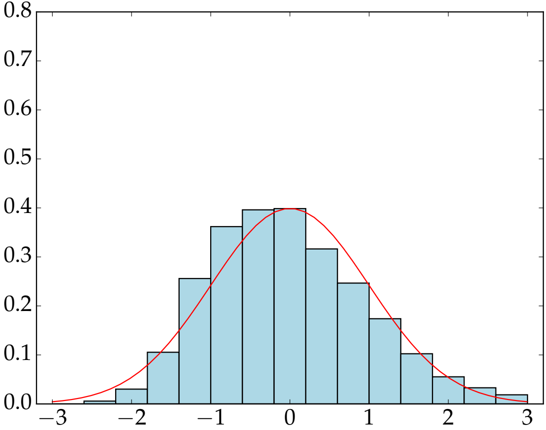
Exemple : loi uniforme sur $[0, 1]$ $\qquad n = 50$



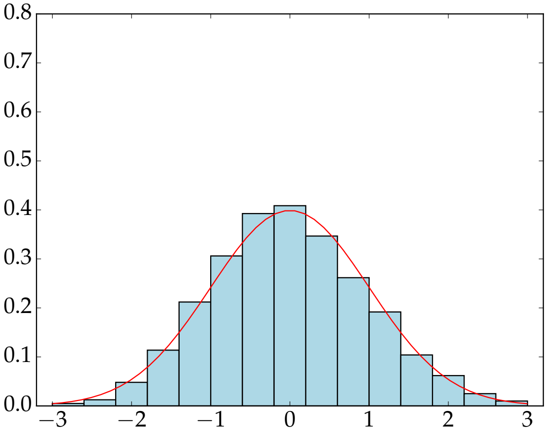
Exemple : loi exponentielle $\mathcal{E}(0,5)$ $n = 2$



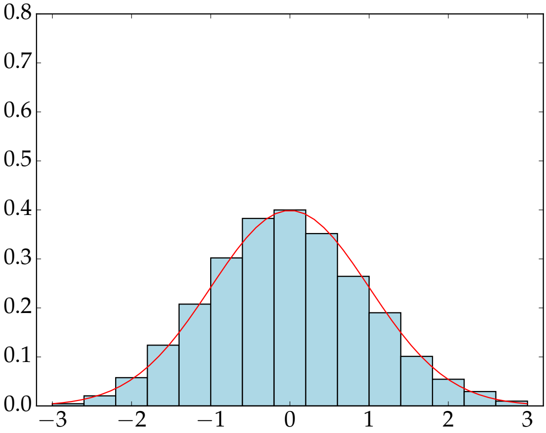
Exemple : loi exponentielle $\mathcal{E}(0,5)$ $n = 10$



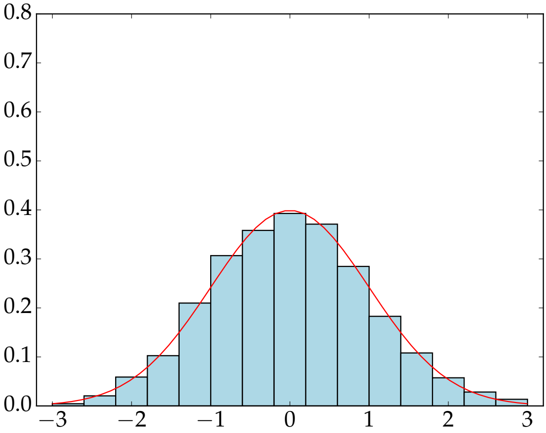
Exemple : loi exponentielle $\mathcal{E}(0,5)$ $n = 50$



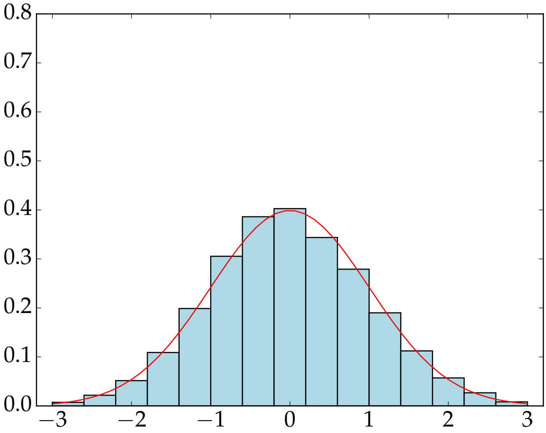
Exemple : loi exponentielle $\mathcal{E}(0,5)$ $n = 100$



Exemple : loi exponentielle $\mathcal{E}(0,5)$ $\qquad n = 250$



Exemple : loi exponentielle $\mathcal{E}(0,5)$ $n = 500$



Exemple : loi exponentielle $\mathcal{E}(0,5)$ $n = 1000$