

POUR BIEN PRÉPARER LA RENTRÉE EN PCSI

Chers futurs étudiantes et étudiants de PCSI,

Félicitations pour avoir été admis dans nos classes au Lycée Pierre Corneille.

Vous trouverez dans ce courrier quelques informations utiles pour préparer votre rentrée.

La rentrée aura lieu le mardi 1er septembre 2026, selon les modalités indiquées sur le site internet du lycée. Les cours commenceront dès ce jour, à la suite de la réunion d'accueil.

Une journée d'intégration sera organisée, vraisemblablement le vendredi 4 septembre, incluant une course d'orientation et autres activités sportives : pensez à prendre des vêtements et chaussures de sport dès la semaine de la rentrée.

Anticipez les modalités de transport : abonnement de transport en commun, choix des horaires de vos trains, repérage des places de parking, etc, sachant que les cours commencent à 7h45 au lycée (ce qui permet aux étudiants de CPGE de passer en premier au restaurant scolaire).

Concernant l'achat du matériel scolaire :

- Aucun manuel n'est nécessaire dans les disciplines scientifiques, mais nous vous fournirons de nombreux documents photocopiés ;
- Vous aurez besoin d'une blouse pour les TP de chimie ;
- La majorité des épreuves de concours que vous passerez, et donc la majorité des devoirs surveillés, se déroulent sans calculatrice. Une calculatrice reste indispensable au quotidien, mais il est inutile d'investir dans un modèle onéreux : conservez votre calculatrice de lycéen ;
- De même, envisager l'achat d'un ordinateur haut de gamme n'est pas utile, un PC standard comme celui fourni aux lycéens par la région Normandie sera amplement suffisant ;
- Acheter et lire les trois oeuvres au programme de lettres (voir ci-dessous) ;
- Acheter le livre de grammaire en anglais (voir ci-dessous).

Il est indispensable que vous passiez un été reposant et détendu. Chercher à prendre seul de l'avance sur les programmes de CPGE n'est en aucun cas nécessaire pour réussir votre année. Toutefois, une remise en route en fin d'été ne sera pas inutile pour bien démarrer l'année. Vous trouverez des suggestions dans la suite du document.

Vous pouvez enfin profiter de cette période pour réfléchir aux points que vous pourriez améliorer dans votre organisation et dans vos méthodes de travail.

Mathématiques, physique, chimie et sciences de l'ingénieur

Afin de bien préparer la rentrée, votre priorité doit être de renforcer vos acquis de Terminale, en particulier au niveau du calcul. Cette étape est fondamentale, bien plus importante que d'essayer d'assimiler des notions nouvelles : nous avons l'année pour cela. Votre aisance calculatoire sera en effet l'une des clefs de votre réussite dans les différentes matières scientifiques. Il faudra calculer de manière efficace et sûre, ce qui passe nécessairement par l'entraînement.

Dans cette optique nous vous proposons une liste d'exercices de calculs, de niveaux variables. Certains d'entre eux seront repris et approfondis lors des premiers cours. Nous vous encourageons vivement à les travailler afin d'être prêts pour la rentrée.

Les exercices 31,32,33,34 sur les nombres complexes ne concernent que ceux qui ont suivi l'option Mathématiques Expertes.

L'entraînement n'est pas fait pour s'épuiser mais pour garder la forme. Il serait contre-productif d'essayer de faire tous ces exercices juste avant la rentrée. Au contraire, vous devez organiser votre travail sur plusieurs semaines afin de pouvoir localiser vos éventuelles lacunes et avoir le temps d'y remédier. Enfin ces exercices abordent différents thèmes, vous pouvez donc les traiter dans le désordre.

Attention par ailleurs à l'utilisation de la calculatrice : ce ne doit pas être un réflexe. **Son utilisation sera d'ailleurs interdite** pour la plupart des devoirs de Mathématiques et Physique car c'est le cas dans la plupart des concours !

Pour vous accompagner dans ce travail, des rappels de cours, des indications et certains éléments de réponses sont fournis dans l'énoncé. Un corrigé vous sera également donné ultérieurement.

Pré-requis en programmation et Python

Il n'est nullement question d'avoir suivi l'enseignement de NSI pour étudier l'informatique de tronc commun en PCSI. Dans les faits, l'avantage lié à cet enseignement peut être rapidement comblé par ceux qui ne l'auront pas suivi.

En informatique, le programme de PCSI s'appuie sur les acquis supposés du lycée : bases d'algorithmique et de programmation en python (utilisation de variables, instruction conditionnelle **if/else**, boucle **for**, boucle **while**, fonctions, listes) vues en SNT en seconde et en spécialité mathématiques en première et terminale.

En pratique, toutes ces notions seront reprises en début d'année, mais, pour certaines, cela sera fait assez rapidement. Pour ceux qui souhaiteraient se préparer pendant l'été, vous pouvez utiliser des tutoriels comme par exemple sur ce site :

<https://fr.futurecoder.io/>

Ces tutoriels sont en français, très progressifs, ludiques. Pour chaque exercice, votre code est testé en ligne et validé ou non. Sont fournis des indications et une correction détaillée. Cela ne nécessite aucune installation.

Anglais

Chers futurs étudiants de PCSI,

Nous constatons qu'une proportion de plus en plus grande de nos élèves arrive(nt) en première année de CPGE sans maîtriser les bases grammaticales les plus élémentaires de l'anglais, qui devraient pourtant être connues depuis le collège. Cela concerne aussi bon nombre d'étudiants qui ont par ailleurs un assez bon niveau de compréhension orale et écrite, et / ou une bonne fluidité à l'oral, au sens où ils savent parler avec un bon débit et se faire comprendre et souvent ont même un bon accent. Mais cela ne les empêche pas de faire énormément de fautes.

Si vous êtes concerné(e), cette abondance de fautes de langue vous privera de la possibilité d'obtenir une note convenable en anglais aux concours, et diminuera donc vos chances d'intégrer les écoles les plus prestigieuses. Or vous n'aurez sans doute pas le temps de réviser ces bases au cours de vos années de prépa...

C'est pourquoi nous vous demandons, après avoir acquis le livre demandé (Maîtriser la grammaire anglaise, de Michèle Malavielle et Wilfrid Rotgé, Bescherelle, éditions Hatier), de réviser les chapitres suivants cet été. Vous devez en maîtriser parfaitement le contenu. Certains n'auront sans doute besoin que d'y jeter qu'un coup d'œil rapide, mais les étudiants dont le niveau d'expression est fragile doivent aussi faire les exercices qui accompagnent chaque chapitre.

- 03. Le verbe be (+ tableaux de synthèse 1 et 2 p.176)
- 04. Le verbe have (+ tableaux de synthèse 3* et 4 p.176-177) -
- 05. le verbe do (+ tableau de synthèse 7 p.179)
- 06. Le présent simple (+ tableau de synthèse 8 p.179)
- 07. Le présent en be + V-ing (+ tableau de synthèse 9 p.180)

- 08. Présent simple ou présent en be + V-ing ?
- 09. Le prétérit simple (+ tableau de synthèse 10 p.180-181)
- 11. Le prétérit en be + V-ing (+ tableau de synthèse 11 p.181)
- 17. Le passif : formes (+ tableau de synthèse 16 p.182-183)
- 18. Le passif : valeurs
- 19.+ rabat arrière de l'ouvrage : Les verbes irréguliers les plus courants
- 20. Les modaux (généralités) : may, can, must, shall, will
- 21. can, can't, could et la capacité
- 22. can, be able to et la capacité
- 23. May, can, be allowed to et la permission
- 24. Le quasi-certain : must ; le quasi-certain négatif : can't, couldn't
- 25. Le possible : may, might, could
- 26. L'obligation : must et have to (+ tableau de synthèse 6 p.178)
- 27. Would et le conditionnel (ne vous focalisez pas sur les remarques introduites par "Attention" pour l'instant)
- 29. Should et ought to - A et B
- 30 A. Will
- 36 A 1. Les pluriels irréguliers de base + "formation des pluriels" p.184
- 41 A. This / That : montrer qch ou qn
- 47. Some et Any
- 52 A, 52C1. Adjectifs épithètes / adjectifs en -ed ou -ing
- 55. Les comparatifs
- 56. Les comparatifs en less / les superlatifs
- 57. Les pronoms personnels / Les possessifs + tableau de synthèse é6 p. 188!!!
- 58. Les pronoms réfléchis / Les pronoms réciproques
- 61. L'ordre des mots dans la négation et l'interrogation

Tout compris (cours, exercices, tableaux complémentaires), cela représente environ 60 pages. A répartir comme vous l'entendez. . . Cela peut vous effrayer mais encore une fois les chapitres en question ont trait à des connaissances élémentaires ; il ne s'agit que de consolider des règles qui vous sont sans doute déjà familières, mais ne sont pas suffisamment intériorisées ni automatisées par une bonne partie d'entre vous.

La grande majorité des sujets aux concours (à l'écrit comme à l'oral) portant sur des articles de presse, il faudrait aussi profiter de l'été pour prendre l'habitude de lire régulièrement la presse anglophone. Sur beaucoup de sites, en créant un compte, on a accès à quelques articles par mois. The Guardian fait partie des organes de presse les plus généreux. Des visites régulières sur le site de BBC News permettent aussi de se tenir au courant de l'actualité.

Prenez aussi le temps de vous détendre en anglais en regardant des films et des séries en V.O.

Bon courage !

Georgina Thompson et Patrick Lairie

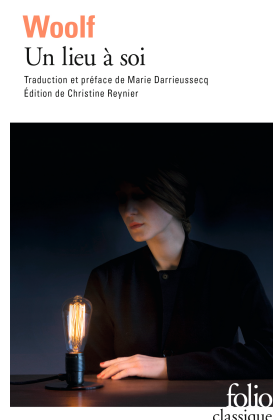
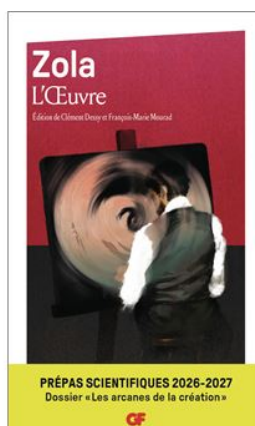
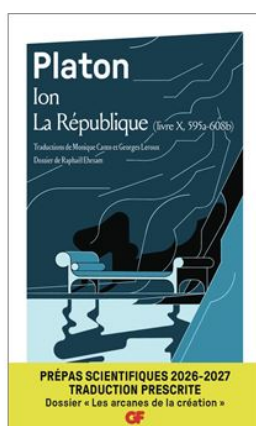
Français / Philosophie

Devoirs d'été en français-philosophie – Classes de MPSI2, PCSI1, MP et PSI*

THÈME 2026/2027 :

« LES ARCANES DE LA CRÉATION »

Veillez à bien vous procurer les œuvres dans les éditions prescrites :



- PLATON, *Ion*, trad. de M. Canto-Sperber, et Livre X de *La République*, trad. de G. Leroux, GF, n° 1705, 2025.
- ZOLA, *L'Œuvre*, GF, n° 1702, 2025.
- WOOLF, *Un lieu à soi* (*A room of one's own*), trad. de M. Darrieussecq, Folio Classique, n° 6764, 2020.

Tous les devoirs écrits de l'année porteront sur ce programme.
Vous devez impérativement avoir lu les trois œuvres avant la rentrée.

Prenez des notes pendant vos lectures, relevez des passages et des citations qui éclairent le thème au programme.

Quelques questions pour vous aider à cibler l'essentiel :

- Quels sont les secrets de fabrication d'une œuvre ?
- La création est-elle le fruit du labeur et de la technique, ou bien d'une inspiration fulgurante ?
- À quel point les conditions matérielles déterminent-elles la création ?
- Quels rapports la création entretient-elle avec la réalité (imitation *vs* imagination) ?
- En quoi le créateur est-il un être singulier ?
- Quels rôles peuvent jouer l'artiste et son œuvre dans le monde ?

Quelques ressources pour accompagner vos lectures :

- PLATON : <https://www.radiofrance.fr/franceculture/podcasts/avec-philosophie/l-art-est-il-un-artisanat-l-intuition-des-anciens-2325083>
- ZOLA : <https://essentiels.bnf.fr/fr/article/d492e1ad-347e-492f-a8d9-1911f8648f1a-oeuvre#> (spoiler alert)
- WOOLF : <https://www.radiofrance.fr/franceculture/podcasts/la-compagnie-des-auteurs/un-lieu-pour-les-femmes-4560995>

PRÉPARATION DES ORAUX :

Les oraux d'entrée à Polytechnique et aux écoles du concours Mines-Ponts (Mines Paris, ISAE-SUPAERO, etc.) comportent une épreuve de culture générale, exigeante mais pas inaccessible, à condition de la préparer dès maintenant. Commencez à tenir un cahier de culture dans lequel vous prenez des notes de façon précise et régulière, afin d'avoir un répertoire solide de références maîtrisées.

Littérature

- Reprenez les œuvres étudiées au lycée, en ciblant des passages précis (un poème, une scène dans une pièce, un passage dans un roman, une citation...) accompagnés d'analyses.
- Veillez à connaître une comédie de Molière, une tragédie classique (Racine ou Corneille), une œuvre des Lumières (un conte philosophique de Voltaire par exemple), un roman réaliste et/ou naturaliste (Balzac, Stendhal, Flaubert...), un recueil poétique, ou au moins quelques poèmes, du XIX^e (Hugo, Baudelaire, Rimbaud...) et du XX^e (Apollinaire, Ponge, Éluard...).
- Le jury appréciera également des lectures plus personnelles et originales : lisez selon vos goûts et vos centres d'intérêt. Il faut toutefois éviter l'abus de références de type roman jeunesse, *fantasy*, manga. Suggestions : Jane Austen, *Orgueil et préjugés* ; Mary Shelley, *Frankenstein ou le Prométhée moderne* ; Dostoïevski, *Crime et châtiment* ; Margaret Atwood, *La Servante écarlate* ; Toni Morrison, *Sula* ; Georges Perec, *Les Choses* ; Annie Ernaux, *La Place* ; *Les Années* ; Alice Zeniter, *L'Art de perdre* ; Sally Rooney, *Normal people*.
- Faites une frise chronologique pour placer les auteurs dans leurs siècles respectifs et bien les situer les uns par rapport aux autres. S'ils sont associés à un mouvement littéraire (Humanisme, Lumières, Romantisme, Réalisme, Naturalisme...), indiquez-le également.

Philosophie

- Reprenez vos cours de terminale.
- Consultez un manuel de terminale, par exemple sur lelivrescolaire.fr (accès gratuit) et ciblez les auteurs et notions sur lesquels vous pensez avoir des lacunes. Le plus important est de vraiment lire leurs textes (même si ce ne sont que des extraits) et de ne pas se contenter d'un résumé de leur pensée. Le jury veut percevoir que vous avez véritablement lu et réfléchi *à partir des textes*, et non à partir d'une *fiche* sur les textes.
- Là aussi, complétez en lisant selon vos goûts et vos centres d'intérêt.

Cinéma, arts plastiques, musique, architecture

- Reprenez les films que vous avez vus et appréciés. Veillez à toujours avoir une analyse, même rapide : ne vous contentez pas d'évoquer l'histoire du film, mais parlez de plan, de jeu d'acteur, de rythme, de montage, etc. Suggestions : Bong Joon-Ho, *Parasite* ; Joachim Trier, *Oslo 31 août* ; Julie en 12 chapitres ; Justine Triet, *Anatomie d'une chute* ; James Gray, *La nuit nous appartient* ; Wim Wenders, *Perfect days* ; Boris Loujkine, *L'Histoire de Souleymane*.
- Prenez des notes sur des musées/expositions que vous avez eu l'occasion de visiter. Le jury appréciera que vous soyez capable de parler d'une visite. Profitez d'être à Rouen pour visiter le Musée des Beaux-Arts : l'accès à la collection permanente est gratuit. Ne vous contentez pas de regarder les tableaux, renseignez-vous pour pouvoir en parler avec précision : consultez les encarts et les textes sur le site du musée (par exemple : <https://mbarouen.fr/fr/collections/l-impressionnisme>), écoutez des podcasts sur les peintres concernés.
- Quelques photographes à (re)découvrir : Martin Parr (par exemple série *The Selfie stick*), Cartier-Bresson, Dorothea Lange, Vivian Maier, Sebastião Salgado...
- Peu de candidats utilisent des exemples musicaux : en avoir sera d'autant plus apprécié, à condition que la référence soit maîtrisée et utilisée avec pertinence. Comme pour le cinéma, l'essentiel est de réussir à entrer dans une analyse : ne pas se contenter d'évoquer la thématique abordée par le morceau, mais exploiter les paroles, le rythme, l'originalité, etc.
- Ne négligez pas l'architecture. Vous pouvez vous appuyer sur la visite d'un monument, mais aussi bien sûr parler d'une réalisation architecturale sans l'avoir vue en vrai. Suggestions : renseignez-vous sur Le Corbusier (la Cité radieuse), sur Frank Lloyd Wright (la Maison sur la Cascade), et complétez selon vos goûts et vos intérêts.

Bonnes lectures et bonnes vacances !

Madame Maestrali
antoniamaestrali@gmail.com

Exercice 1 : Sans calculatrice, calculer et mettre sous forme de fraction simplifiée :

- 1) $\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{5}{6} + \frac{1}{3}},$
- 2) $\frac{2 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}}{6 - 2\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right)},$
- 3) $\left(1 - \frac{1}{6}\right) - \left(3 - \frac{1}{2}\right) + \left(7 - \frac{1}{3}\right)$
- (à calculer de deux façons différentes),
- 4) $12 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 4\right),$
- 5) $\left(1 + \frac{1}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{4}\right),$
- 6) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3} + 1\right),$
- 7) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$

Rappels de cours - Identités remarquables .

Pour tous réels x et y .

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \qquad (x - y)(x + y) = x^2 - y^2.$$

Exercice 2 : Développer et ordonner les résultats :

- 1) $P_1(x) = (4x - 7x^2)(x^3 - 8x + 7),$
- 2) $P_2(x) = (2x^3 + x + 1)(4x^2 - x + 5),$
- 3) $P_3(x) = (x^3 - x + 2x^2 + 1)^2,$
- 4) $P_4(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1),$
- 5) $P_5(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1),$
- 6) $P_6(x) = (x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1).$

Exercice 3 : Factoriser :

- 1) $P_1(x) = 4x^2 + 4x + 1,$
- 2) $P_2(x) = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9},$
- 3) $P_3(x) = (2x + 1)^2 - 25(3x + 2)^2,$
- 4) $P_4(x) = (x^2 + 8x + 4)^2 - (x^2 + 4)^2,$
- 5) $P_5(x) = x^4 - 4x^2 + 4,$
- 6) $P_6(x) = (x - 2)^4 + (x^2 - 4)^2.$

Indication : reconnaître des identités remarquables

Corrigé : $P_1(x) = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = (2x + 1)^2$

Exercice 4 : Factoriser le numérateur et le dénominateur et simplifier la fraction :

- 1) $F_1(x) = \frac{x^2 + 10x + 25}{x^3 + 5x^2},$
- 2) $F_2(x) = \frac{x^2}{2x^2 + x},$
- 3) $F_3(x) = \frac{x^3 - x}{x + 1},$
- 4) $F_4(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1},$
- 5) $F_5(x) = \frac{x^5 - 4x^3}{(x^2 + 1)^2 - 1}$
- 6) $F_6(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4}$

Corrigé : $F_1(x) = \frac{(x + 5)^2}{x^2(x + 5)} = \frac{(x + 5)}{x^2}$

Exercice 5 : Simplifier :

$$1) F_1(x) = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x(x^2 - 1)},$$

$$2) F_2(x) = 2 + \frac{3}{x} + \frac{x-1}{3x} - \frac{x+7}{6x},$$

$$3) F_3(x) = 1 - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2 - 1},$$

$$4) F_4(x) = \frac{2x^2}{x+1} + \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x} + \frac{1}{x},$$

$$5) F_5(x) = \frac{x(x-1)^2}{2(2x-1)} + \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

On réduira au même dénominateur en cherchant un dénominateur commun “optimal” (plus petit commun multiple), par exemple pour 1) on prendra $x(x^2 - 1)$ comme dénominateur commun et non pas $x(x^2 - 1)^2$

Exercice 6 :

$$1) \text{ Montrer que pour tout } x \in [2, 4], \frac{5}{18} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 2} \leq \frac{17}{4}.$$

2) Sur le même modèle, proposer un encadrement des quantités suivantes.

-a- $\frac{x + 2 - \cos x}{x^2 + 1}$ pour tout $x \in [0, 12]$,

-b- $\frac{3x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x+1} + 2x + 7}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Corrigé : 1) Soit $x \in [2, 4]$.

On encadre le numérateur. On a $2 \leq x \leq 4$ et la fonction $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $4 \leq x^2 \leq 16$, on déduit

$$5 \leq x^2 + 1 \leq 17 \quad (*).$$

On encadre le dénominateur. On somme les encadrements

$$2 \leq x \leq 4 \qquad 4 \leq x^2 \leq 16.$$

et on ajoute -2 membre à membre, pour obtenir

$$4 \leq x^2 + x - 2 \leq 18.$$

On inverse le dénominateur et on le multiplie au premier encadrement. Puis comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il découle :

$$\frac{1}{18} \leq \frac{1}{x^2 + x - 2} \leq \frac{1}{4}.$$

Les quantités présentes dans cet encadrement ainsi que celle de (*) sont strictement positives, on peut donc multiplier ces encadrements, pour obtenir

$$\frac{5}{18} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 2} \leq \frac{17}{4}.$$

Remarque méthode : il s'agit de la manière la plus simple d'encadrer un quotient de réels positifs : on majore en majorant le numérateur et en minorant le dénominateur et on minore en minorant le numérateur et en majorant le dénominateur.

Attention aux signes : $-2 < -1$ et $1 < 10$ mais $-2 \times 1 > -1 \times 10$.

Exercice 7 :

$$1) \text{ Développer } (\sqrt{5} + 1)^2, (\sqrt{5} - 1)^2 \text{ et } (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2.$$

2) Compléter

-a- $7 + 2\sqrt{7} + \dots = (\dots + 1)^2,$

-b- $3 + 4\sqrt{3} + \dots = (\sqrt{3} + \dots)^2,$

$$-c- \dots - 6\sqrt{5} + 9 = (\dots - \dots)^2.$$

3) En s'inspirant de ce qui précède, mettre sous forme d'un carré $3 + 2\sqrt{2}$ et $5 + 2\sqrt{6}$.

Exercice 8 : Écrire aussi simplement que possible (en particulier on rendra rationnels les dénominateurs) :

$$1) \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}},$$

$$4) \left(\sqrt{3\sqrt{3}} \right)^4,$$

$$8) \left(\sqrt{2} + 3 \right)^2 - \left(\sqrt{2} - 3 \right)^2,$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}},$$

$$5) \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$$

$$9) \left(\sqrt{2} + 3 \right)^2 + \left(\sqrt{2} - 3 \right)^2,$$

$$3) \frac{4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{6} + 1},$$

$$6) \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$$

$$10) \left(\sqrt{2} - 3 \right)^3 \times \left(\sqrt{2} + 3 \right)^3.$$

$$7) \sqrt{(x - 1)^2},$$

Corrigé :

1) On multiplie le dénominateur et le numérateur de la fraction par $2 + \sqrt{3}$ (appelée **expression conjuguée** de $2 - \sqrt{3}$)

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})^2}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{4 + 4\sqrt{3} + 3}{4 - 3} = 7 + 4\sqrt{3}$$

On utilisera la même technique utilisant l'**expression conjuguée** pour 2), 3), 4).

Exercice 9 : Vérifier les égalités suivantes :

$$1) \sqrt{8} (\sqrt{8} - \sqrt{50}) = \sqrt{18} (\sqrt{18} - \sqrt{50}),$$

$$2) 4\sqrt{27} - 3\sqrt{75} + 2\sqrt{12} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2-\sqrt{3}},$$

$$3) \sqrt{5 + \sqrt{7}} - \sqrt{5 - \sqrt{7}} = \sqrt{10 - 6\sqrt{2}}.$$

On utilisera, entre autres, des simplifications des racines carrées pour 1) et 2).

Pour 3), on utilisera que si a et b sont des réels de même signe vérifiant $a^2 = b^2$ alors $a = b$.

Corrigé : 1) Utiliser $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{50} = \dots$

Rappels de cours - Propriétés calculatoires sur les puissances .

Soient x et y des réels non nuls et p et q des entiers relatifs.

$$x^p \times x^q = x^{p+q} \quad (x^p)^q = x^{pq} \quad (xy)^p = x^p y^p.$$

$$x^{-p} = \frac{1}{x^p} \quad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q} \quad \left(\frac{x}{y} \right)^n = \frac{x^n}{y^n}.$$

Exercice 10 : Simplifier :

$$1) \frac{4^{-2} \times 8^3}{16^2},$$

$$4) \frac{a^8}{(a^2 b^3)^5},$$

$$6) \frac{a^4 b^{-5}}{a^2 \times \frac{b^3}{a^{-3} b}}.$$

$$2) 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9},$$

$$5) \frac{(a^2 b)^3}{a^{-3} (-b)^2},$$

$$3) \left(\frac{2}{3} \right)^{12} \times \left(\frac{3}{2} \right)^{10},$$

Pour 1), 2), 3) écrire le résultat sous forme $2^p 3^q$; pour 4), 5), 6) écrire le résultat sous forme $a^p b^q$

Exercice 11 : Simplifier, le plus possible, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les expressions suivantes :

- 1) $\frac{a^{n^2}}{a^n}$,
- 2) $(a^n)^3 \times (a^3)^n$,
- 3) $(a^n)^n - a^{n^2}$,
- 4) $5^{n+2} - 5^{n+1} + 12 \times 5^n - 6 \times 5^{n-1}$,
- 5) $\frac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$,
- 6) $\frac{5^n \times 12^{2n}}{10^n \times 6^{4n}}$,
- 7) $\frac{16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{8^n}$.

Exercice 12 : Mathématiques pour les sciences physiques

Le taux d'avancement α et la constante d'équilibre K^o sont des réels positifs tels que $K^o = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2$ où $\alpha \in]0,1[$.
Établir l'expression de α en fonction de K^o .

Rappels de cours - Propriétés de $\ln$ et $\exp$.

Soient a et b réels et n entier relatif :

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{na} = (e^a)^n \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}.$$

Soient a et b réels strictement positifs et n entier relatif :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \quad \ln(a^n) = n \ln a.$$

Exercice 13 : Calculer en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$:

- 1) $\ln\left(\frac{81}{4}\right)$,
- 2) $\ln\left(\frac{225}{162}\right)$,
- 3) $\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{3} + \ln \frac{1}{5}$,
- 4) $\ln(15^3) - \ln 100$,
- 5) $\ln 1024$,
- 6) $\ln(0.002)$,
- 7) $\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$.

Exercice 14 : Simplifier les expressions suivantes :

- 1) $e^{2x} \times e^{1-2x}$,
- 2) $\frac{e^{2x+4}}{e^{x+1}}$,
- 3) $e^{-2x} - \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}$,
- 4) $4 \ln \frac{a}{b} - 3 \ln a + 5 \ln b$,
- 5) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \ln \sqrt{ab}$.

Exercice 15 : Simplifier :

- 1) $e^{2 \ln 3}$,
- 2) $e^{-2 \ln 3}$,
- 3) $e^{-\ln 5 + 2 \ln 3}$,
- 4) $\ln \frac{e^5}{\sqrt{e^3}}$,
- 5) $\ln e^{-\ln 3}$,
- 6) $\ln \left(\left(e^{\ln \frac{1}{3}} \right)^2 \right)$,
- 7) $e^{-\ln(\ln 3)}$,
- 8) $\ln \sqrt{e^{\frac{1}{2} \ln 3}}$.

Exercice 16 : Mathématiques pour les sciences physiques

Une solution acide de concentration $C_0 = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$ a une concentration en ions $h = [H_3O^+]$ telle que $h = \sqrt{K_A C_0} \approx 10^{-2.9} \text{ mol.L}^{-1}$.

Établir l'expression littérale du $pK_A = -\log(K_A)$ en fonction du pH défini par $\text{pH} = -\log(h)$ et $pC_0 = -\log(C_0)$ et effectuer l'application numérique.

Exercice 17 : Mathématiques pour les sciences physiques

La constante de vitesse k d'une réaction chimique dépend T de la température T selon la relation :

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$$

où R , A et E_a sont des constantes réelles positives. Pour deux températures différentes T_1 et T_2 . On a alors :

$$k_1 = Ae^{-\frac{E_a}{RT_1}} \quad k_2 = Ae^{-\frac{E_a}{RT_2}}$$

Donner l'expression littérale de E_a en fonction de k_1 , k_2 , T_1 , T_2 et R .

Indication : on commencera par simplifier le quotient $\frac{k_1}{k_2}$, puis on isolera E_a pour l'exprimer en fonction des autres grandeurs.

Exercice 18 : Mathématiques pour les sciences physiques

On obtient l'inégalité suivante sur la concentration en ions hydroxyde : $[HO^-] < \sqrt{\frac{K_S}{c}}$ avec $[HO^-]$, K_S et c des réels positifs. Posons

$$pOH = -\log([HO^-]) \quad pK_S = -\log(K_S) \quad pc = -\log c \quad pOH + pH = pK_e.$$

Établir l'inégalité vérifiée par pH en fonction de pK_e , pK_S et pc .

Rappels de cours - Formules trigonométriques .

Soient a et b deux réels

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1.$$

Formules d'addition

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Exercice 19 :

En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 20 :

- 1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(2a)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$. Puis uniquement en fonction de $\sin(a)$. Ces formules devront être connues par coeur en prépa
Exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$.
- 2) Soit $a \in \mathbb{R}$, exprimer $2\cos^2 a + 4\sin^2 a$ uniquement à l'aide de $\cos(2a)$. Même question avec $\cos^4 a - \sin^4 a$.
- 3) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(a) \neq 0$ et $\sin(a) \neq 0$. Simplifier $\frac{\sin(2a)}{\sin(a)} - \frac{\cos(2a)}{\cos(a)}$.

Méthode - Comment rédiger une résolution d'équation ou inéquation .

- 1) On donne un nom à l'équation
- 2) On introduit, la variable inconnue dans l'ensemble sur lequel l'équation est définie, "soit $x \in \dots$ " (si x est l'inconnue)
- 3) On raisonne par équivalences à l'aide du symbole $\Leftrightarrow$
- 4) On conclut en donnant l'ensemble-solution.

Exercice 21 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

Ramener à une égalité à 0, factoriser, puis utiliser le fait qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

1) $x(x + 4) = (x + 4)$

2) $4x^2 - 49 = 0$

3) $9x^3 - 25x = 0$

4) $(x + 2)(2x + 5) = x^2 - 4$

5) $(2x + 1)^2 = 9(x - 4)^2$

6) $(2x - 3)(x + 2)^2 = (2x - 3)(3x - 1)^2$

Corrigé

1) On applique la méthode exposée ci-dessus.

Posons (E) l'équation $x(x + 4) = (x + 4)$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(E) \Leftrightarrow x(x + 4) - (x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 4)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 1.$$

L'ensemble-solution de (E) est $\{-4, 1\}$.

Exercice 22 : Équations et inéquations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations :

1) $x^2 - 3x - 5 = 0$

3) $3x^2 - 2x + 7 = 0$

5) $x^2 - 5x + 1 < 0$

2) $x^2 - 6x + 9 = 0$

4) $2x^2 - x - 3 \geq 0$

6) $-3x^2 + x - 7 < 0$

On utilisera les formules de résolution d'une équation du second degré pour 1), 2) et 3). Puis la règle du signe d'un trinôme pour 4), 5), 6).

Exercice 23 : Mathématiques pour les sciences physiques

Soit l'équation $y^2 + \beta y + \frac{2k}{m} = 0$ avec β , k et m grandeurs constantes positives et y inconnue réelle.

1) Établir la condition sur β , k et m pour que le discriminant Δ de l'équation soit positif.

2) Établir l'expression des solutions y en fonction de β , k et m dans le cas d'un discriminant positif.

Exercice 24 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$,

3) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$,

2) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$,

4) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

Corrigé

1) Posons (E) l'équation $e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $X = e^x$

$$(E) \Leftrightarrow X^2 - 4X + 4 = 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 2$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2).$$

L'ensemble-solution de (E) est $\{\ln(2)\}$.

Exercice 25 : Mathématiques pour les sciences physiques

Une position d'équilibre x_e vérifie la relation suivante :

$$-mg \sin(\alpha) + k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n = 0 \quad \text{où } \alpha \text{ est un angle tel que } \sin(\alpha) = \frac{h}{L}.$$

Établir l'expression de x_e en fonction des autres grandeurs caractéristiques h, L, m, g, k, n et x_0 qui sont tous des réels strictement positifs.

On utilisera que pour x, a réels strictement positifs et n entier naturel : $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$

Exercice 26 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$1) \frac{x}{3} + \frac{3}{x} = \frac{5}{2}$$

$$2) \frac{4}{x} + \frac{3}{x-1} = \frac{x}{4} + \frac{x-1}{3}$$

$$3) \frac{x}{1-x} + \frac{1-x}{x} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3}$$

Corrigé

1) Posons (E) l'équation $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} = \frac{5}{2}$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^*$ pour ne pas annuler le dénominateur)

$$(E) \Leftrightarrow \text{“réarranger l'équation pour se ramener à une équation du second degré...”}$$

Exercice 27 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$$1) \frac{3}{x-2} \leq 4$$

$$2) \frac{x+2}{3-x} \leq 1$$

$$3) x^2 + 2 \geq 5x - 4$$

$$4) x^2 - 2 \geq 2x - 5$$

$$5) (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 6x + 8) \geq 0$$

$$6) (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 6x + 8) \leq 0$$

$$7) \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-2} \leq \frac{3}{10}$$

$$8) \frac{x}{x+1} \leq \frac{x+2}{x+3}$$

$$9) \frac{2x^2 - 10x + 10}{x^2 - 5x + 6} \geq 1$$

Indication : pour toutes les inéquations se ramener à $f(x) \leq 0$ (ou $\geq 0, < 0, > 0$) pour étudier le signe grâce éventuellement à un tableau de signes ou la règle du signe d'un trinôme.

Exercice 28 : Facultatif

1) Montrer que pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

2) En déduire que pour tous x, y, z réels strictement positifs de somme s ,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 6 - s.$$

Exercice 29 : Facultatif

1) Montrer que pour tous x, y réels positifs, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

2) En déduire que pour tous x, y réels strictement positifs, $\frac{x}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2xy}$.

3) En déduire que pour tous x, y réels strictement positifs, $\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{xy}$.

Rappels de cours - Valeur absolue .

Soient x et y deux réels et d un réel positif.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$|x| = d \Leftrightarrow x = d \text{ ou } x = -d \qquad |x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$$

$$|x| \leq d \Leftrightarrow -d \leq x \leq d \qquad |x| \geq d \Leftrightarrow x \leq -d \text{ ou } x \geq d.$$

$$|x|^2 = x^2$$

Exercice 30 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $|2x - 1| = 3$

4) $|3x - 1| \geq 4$

2) $|2x - 1| = |4 - x|$

5) $|3 - 2x| < 6$

3) $|x - 2| \leq 5$

6) $|x^2 + 2x - 3| \leq 5$

Corrigé

1) Posons (E) l'équation $|2x - 1| = 3$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = -3 \\ &\Leftrightarrow 2x = 4 \quad \text{ou} \quad 2x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -1. \end{aligned}$$

L'ensemble-solution de (E) est $\{2, -1\}$.

Rappels de cours - Nombres complexes.

Attention cette section sur les nombres complexes ne concerne que ceux qui ont suivi l'option Mathématiques Expertes en Terminale.

Soient a et b deux réels, posons $z = a + ib$ (forme algébrique de z) où i est le nombre imaginaire vérifiant $i^2 = -1$.

Partie réelle de z : $\Re(z) = a$

Partie imaginaire de z : $\Im(z) = b$

Conjugué de z : $\bar{z} = a - ib$

Module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$|z|^2 = z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Un argument de z est un réel θ tel que : $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ (**forme trigonométrique** de z).

Notation exponentielle : $z = |z|e^{i\theta}$.

Pour θ et θ' réels $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.

Exercice 31 : Pour ceux qui ont suivi l'option Mathématiques Expertes

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1) $a = (3 - i)(2 + i)$

3) $c = \frac{2}{1+i}$

5) $e = \frac{2i}{3-i}$

7) $g = \frac{2}{2-3i} + \frac{3}{1-4i}$

2) $b = (5 + 2i)^2$

4) $d = \frac{1-3i}{2+4i}$

6) $f = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$

Indication pour 3) $\rightarrow$ 7), pour “chasser” le i du dénominateur il faut penser à multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur et penser à $z\bar{z} = |z|^2$

Corrigé :

3) On multiplie le dénominateur et le numérateur de c par $1 - i$ le conjugué de $1 + i$,

$$c = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{1^2 + 1^2} = 1 - i.$$

Exercice 32 : Pour ceux qui ont suivi l'option Mathématiques Expertes

Écrire avec la notation exponentielle les nombres complexes suivants :

1) $a = 1 + i$

3) $c = -4$

5) $e = -i$

7) $g = 1 + \sqrt{3}i$

2) $b = 2$

4) $d = 3i$

6) $f = \sqrt{3} - i$

Corrigé :

1) On calcule le module de a , $|a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Puis on factorise a par son module et on reconnaît θ via son sinus et son cosinus :

$$a = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Exercice 33 : Pour ceux qui ont suivi l'option Mathématiques Expertes

Mettre sous forme algébrique, placer sur le cercle trigonométrique et écrire sous forme $e^{i\alpha}$ les nombres suivants :

1) $a = e^{0i}$

3) $a = e^{i\pi}$

5) $b = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

7) $b = -e^{i\pi}$

9) $b = -ie^{i\frac{\pi}{6}}$

2) $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$

4) $a = e^{2i\pi}$

6) $b = -e^{-i\frac{\pi}{3}}$

8) $b = ie^{i\frac{\pi}{4}}$

10) $b = e^{-\frac{3i\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 34 : Pour ceux qui ont suivi l'option Mathématiques Expertes - Mathématiques pour les sciences physiques - Plus difficile

Soit Z_{MN} un nombre complexe vérifiant $\frac{1}{Z_{MN}} = \frac{1}{r+iL\omega} + iC_0\omega$ où C_0 , r , L et ω sont des réels positifs. Déterminer C_0 en fonction de r , L et ω pour que Z_{MN} soit un réel.

Exercice 35 : Sans se soucier du domaine de validité des calculs, calculer la dérivée des fonctions f définies par :

1) $f(x) = \frac{1}{x}$

3) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

5) $f(x) = \frac{1}{(3-4x)^2}$

7) $f(x) = \frac{1}{3x-1}$

2) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

4) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^5}$

6) $f(x) = \frac{1}{(2-x)^4}$

8) $f(x) = \frac{1}{(5x+1)^4}$

Pour 1),...8) utiliser la dérivée de u^α et pas celle de $\frac{1}{u}$

9) $f(x) = (x-2)(x-1)$

16) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

24) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

10) $f(x) = (x+1)^2(3x+2)^3$

17) $f(x) = \cos(3x)$

25) $f(x) = e^{3x}$

11) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

18) $f(x) = \sin(2x)\cos(5x)$

26) $f(x) = e^{2x^2+x-1}$

12) $f(x) = \frac{x}{(x+4)^2}$

19) $f(x) = \sin^2(x)\cos^3(2x)$

27) $f(x) = x^2e^x$

13) $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x-3)^2}$

20) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

28) $f(x) = e^{\cos(x)}$

14) $f(x) = \sqrt{x-2}$

21) $f(x) = \ln(3x-2)$

29) $f(x) = e^{x\ln(x)}$

15) $f(x) = \sqrt{3x^2+2x-4}$

22) $f(x) = \ln(2x^2+1)$

30) $f(x) = \frac{e^x}{e^{x+1}}$

Exercice 36 : Mathématiques pour les sciences physiques

Soit x une variable réelle strictement positive que $x > 0$ et k, x_0, x_e, n sont des grandeurs réelles constantes et n est un entier naturel. On considère la fonction :

$$E_p(x) = k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n x - k \frac{x_0^n}{1-n} \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Établir les expressions de ses dérivées première et seconde.

Exercice 37 : Sans se soucier du domaine de validité des calculs, déterminer une primitive des fonctions f suivantes définies par :

- | | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 5x + 3$ | 11) $f(x) = \frac{4x}{(x^2 + 2)^3}$ | 19) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ |
| 2) $f(x) = 2(x - 2)^2$ | 12) $f(x) = \frac{1}{x}$ | 20) $f(x) = \sqrt{x}$ |
| 3) $f(x) = (2x - 1)(x - 4)$ | 13) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ | 21) $f(x) = \sqrt{5x+1}$ |
| 4) $f(x) = 3x(x^2 - 2)^2$ | 14) $f(x) = \frac{1}{4-3x}$ | 22) $f(x) = 3x^2 \sqrt{2x^3 + 5}$ |
| 5) $f(x) = 3x(x^2 - 2)^{20}$ | 15) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ | 23) $f(x) = 3e^x \sqrt{4e^x + 1}$ |
| 6) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ | 16) $f(x) = \frac{4x-6}{x^2-3x+1}$ | 24) $f(x) = \cos(3x)$ |
| 7) $f(x) = \frac{5}{x^4}$ | 17) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ | 25) $f(x) = \sin(2x)$ |
| 8) $f(x) = \frac{3}{(2+x)^2}$ | 18) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ | 26) $f(x) = e^x \sin(e^x)$ |
| 9) $f(x) = \frac{1}{(3-x)^3}$ | | 27) $f(x) = \cos(3x)e^{\sin(3x)}$ |
| 10) $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^4}$ | | |

Rappel de cours - Raisonnement par récurrence simple .

Soit $\mathcal{P}$ une proposition portant sur les entiers naturels.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, on suppose que :

- **Initialisation** : $\mathcal{P}(n_0)$ est vérifiée.
- **Hérédité** : pour tout entier $n \geq n_0$ si $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geq n_0$.

En pratique : la propriété $\mathcal{P}$ doit être posée. L'exemple détaillé dans l'exercice suivant est un modèle à respecter.

Pour $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels, on note $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Exercice 38 :

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Corrigé :

On effectue une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation : $\sum_{k=1}^1 k = 1$ et $\frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée (c'est l'hypothèse de récurrence).

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1)$$

D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée ce qui achève la récurrence.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 39 :

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. *Respecter le modèle de rédaction de l'exemple détaillé ci-dessus*

Exercice 40 :

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 41 :

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.